【土木計画学研究・講演集 No.23(2) 2000年11月】

不確実性下における道路舗装の補修投資ルールに関する研究*

THE OPTIMAL REPAIRING RULES FOR PAVEMENTS UNDER UNCERTAINTY *

栗野盛光**・田村謙介***・小林潔司****
by Morimitsu KURINO**, Kensuke TAMURA*** and Kiyoshi KOBAYASHI****

1. はじめに

我が国における道路舗装の補修費用は経年的に増大傾向にあり，今後もその傾向が続くことが予想されている．したがって，道路舗装の合理的な補修・更新管理を行うべき時期に直面しているといえる．我が国では，道路舗装のライフサイクルコストを最小にするように舗装の設計，維持修繕を行うという，舗装管理システム(Pavement Management System:PMS)の概念が広く導入されつつある．PMSの概念は，舗装の劣化過程の予測に基づき，利用者費用を含めたライフサイクルコストを最小にするように補修のルールを定めるというものである．しかし，劣化の予測においては劣化過程に介在する不確実性が考慮されていない．それに対し，現実の舗装の劣化過程には多大な不確実性が存在し，その影響は無視できない．したがって，本研究では，将来需要や道路舗装の劣化過程に不確実性が含まれることを前提として，道路舗装のライフサイクルコストを最小にするような最適補修ルールを求める方法を提案する．本研究で提案する最適補修問題には投資戦略の分割不可能性という問題が含まれており，最適補修ルールを解析的に求めることができない．本研究では，モンテカルロシュミレーションを用いて補修投資ルールを求める方法を提案することとする．

2. 本研究の基本的立場

*キーワード：土木施設維持管理
**学生員 工修 京都大学大学院工学研究科土木工学専攻
(〒606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL・FAX 075-753-5073)
***学生員 京都大学大学院工学研究科土木工学専攻
(〒606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL・FAX 075-753-5073)
****正員 工博 京都大学大学院工学研究科土木工学専攻
(〒606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL・FAX 075-753-5071)

(1) 過去の研究の概要

道路舗装の補修問題に関しては，従来より膨大な研究が蓄積されてきた．その中で，建設費，維持修繕費，利用者費用など供用期間全体で生じるライフサイクルコストを考慮して舗装を設計・管理しようという立場がPMSである．しかし，明確にPMSが定義されているわけではなく，PMSの解釈，研究の方向などPMSに関する見解は様々であり，統一がとれているとはいえない．近年我が国でもPMSに基づいて補修ルールが策定されている[1)]が，その導出の根拠は明らかでなく，また道路舗装の劣化過程において重要と考えられる不確実性は考慮されていない．一方，不確実性を考慮した維持修繕モデルとしては，1980年代後半よりマルコフ決定過程を用いたモデルが提案されているが，実用的な維持補修モデルを作成しようとすれば推移行列が膨大となり操作上問題が生じる．また，将来交通量が変動した場合，推移行列を変更する必要があり，実用性に欠ける．

(2) 道路舗装の破損と劣化過程の不確実性

道路舗装の破損は表層・基層のみ補修を行えばよい機能的破損と，舗装構造全体の補修が必要な構造的破損とに分けられる．一般に構造的破損は機能的破損が進行したときにのみ起こり，補修の意思決定には機能的破損の程度が主な判断材料として用いられている．本研究においても構造的破損は起こらないと仮定し，機能的破損の程度により物理的なサービス水準(以下，機能水準)を評価し，補修の判断材料として用いる．舗装の劣化過程は舗装が供用される期間の交通量及び車両構成の影響を受けるが，将来の交通量，車両構成は様々な要因によって決まり，事前に確定的に把握することは不可能である．道路舗装の補修を考える場合，交通量の不確実性を前提

に行う必要がある．また，舗装の劣化過程は気象条件，地質条件などの環境条件の影響を受ける．本研究では環境条件による舗装の劣化を自然的劣化と呼ぶ．将来の環境条件を確定的に把握することは不可能であり，環境条件が劣化過程に及ぼすメカニズムに関しても不明な点が多い．本研究では，このような交通需要の不確実性と自然的劣化の不確実性という２種類の不確実性を考慮する．

(3) 補修投資と補修投資費用の性質

道路舗装の補修投資は一般に維持と修繕の２つに分けられるが，本研究では修繕にのみ焦点を絞り，修繕を補修投資と呼ぶ．維持投資は常に適切になされ，その費用は時間を通じて一定であると仮定する．この仮定により，維持投資は最適な補修投資ルールには影響を及ぼさない．また，修繕には常に１種類かつ同じ工法が採用されると仮定する．もちろん，モデルに含まれるパラメータ値を変更することにより，異なった工法を用いた補修投資モデルを定式化することが可能であることは言うまでもない．

道路舗装の機能水準は，轍，ひび割れ，舗装材料，凹凸，騒音，道路の勾配等の程度により決定されるのが望ましいと考えられる．しかしながら，実際には轍，ひび割れ，凹凸のみにより舗装の劣化水準（機能水準）の評価がなされる．本研究では道路舗装の機能水準が１元化された指標で表現されると考える．ある舗装の種類や工法が決定されれば，補修投資により機能水準はある一定の機能水準（以下，回復水準と呼ぶ）にまで回復されると考える．回復水準は選択した舗装の種類や工法により決定され，回復水準を自由に決定することは難しい．したがって，補修投資ルールは「機能水準がどの程度まで低下した場合に補修投資を行うことが望ましいか」を決定する問題として定式化される．回復水準に自由度が存在しないため，次章で述べるように，最適補修ルールを解析的に解くことができない．そこで，４章でモンテカルロシミュレーションにより最適補修ルールを求める方法を提案する．

3．最適補修問題のモデル化

(1) モデル化の前提条件

道路管理者は，初期時点から無限に続く時間軸上で道路舗装の機能水準と需要水準を観察しながら，舗装の機能水準を回復するために補修投資を行う．道路舗装の機能水準が低下すれば，可変費用が増加する．舗装の機能水準は交通需要に影響を及ぼさないと仮定する．交通需要はある定常過程に従って変動すると仮定する．一方，道路舗装の機能水準は交通需要や自然的劣化により時間を通じて低下していく．したがって，道路舗装の劣化過程は累積交通量，自然的劣化という２種類の不確実性に直面する．道路管理者は補修費用と可変的費用で構成される期待費用の現在価値の総和を最小にするように，補修投資のタイミングを決定する．

(2) モデル化

初期時点から時刻tまでの累積需要を$s(t)$と表す．累積交通需要は伊藤過程

$$ds(t) = \beta dt + \sigma dW_1(t) \tag{1a}$$
$$s(0) = s_0 \tag{1b}$$

に従うと考える．ここで$W_1(t)$はウィナー過程である．時刻tにおける交通需要は$ds(t)$と表される．

次に，道路舗装の機能水準の補修過程をモデル化しよう．道路舗装の機能水準を一次元的に表すパラメータzが，区間$(0, Z)$で定義されているとする．補修投資が時刻$0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_i < \cdots$において実施され，時刻$\theta_i$に道路舗装の機能水準が所与の値$\bar{Z}$に改善されると考える．補修投資後の機能水準はある値$\bar{Z}$に固定されていると考える．補修投資直前の機能水準を$z(\theta_i^-)$と表す．以上のような補修投資が行われる場合，道路舗装の機能水準は確率過程

$$\begin{aligned} dz(t) &= -\rho z(t)ds(t)dt - \delta z(t)dt - \gamma z(t)dW_2(t) \\ &\quad -z(t)dq + \sum_{i\geq 1}\{\bar{Z} - z(\theta_i^-)\}\iota(t-\theta_i) \end{aligned} \tag{2a}$$

$$dq = \begin{cases} u & (\text{確率 } \lambda dt) \\ 0 & (\text{確率 } 1-\lambda dt) \end{cases} \tag{2b}$$

$$z(0) = z_0 \tag{2c}$$

に従うと仮定する．$\iota(\cdot)$はディラックの測度(Dirac measure)であり，$t = \theta_i$の時にのみ確率測度１を，それ以外の時は確率測度0を与える．右辺第１項は交通需要による劣化，第２項は自然的劣化のトレンド，第３項，第４項はともに自然的劣化による不確実性

を表している．第3項は連続的な劣化を表し，第4項は強度がλ，ジャンプの大きさが$uz(t)$のポアソン過程を示しており，その機能水準は右連続であるがその時点においてジャンプする．uは確率変数である．道路舗装の種類が異なれば，劣化過程そのものが変化することは言うまでもない．以上の補修過程では，補修投資によりインパルス時間$0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_i < \cdots$においてシステムの状態がジャンプするようなインパルス制御過程となっている．点列$\{\theta_i\}_{i>0}$をインパルス制御と呼ぶ．

つぎに，最適補修問題を定式化しよう．管理主体は総費用を最小化するように施設の補修投資を行う．総費用は可変的費用と補修投資費用で構成される．機能水準がzの時の利用者1台により生じる可変的費用を$c(z)$と表す．よって，時刻tにおける可変的費用は$c(z(t))ds(t)$と表される．$c(z)$は任意の$z \in (0, Z)$に対して微分可能であり，$c(z) > 0$, $\frac{dc(z)}{dz} < 0$を満足すると仮定する．一方，時刻θ_iにおいて機能水準が$z(\theta_i^-)$である道路に対して補修投資により機能水準を$\bar{Z}$まで改善する場合を考えよう．オーバーレイ，切削オーバーレイ，打ち換えなどの補修工法のうち常に1通りの工法のみにより補修投資を実施すると仮定する．さらに，ある道路の箇所では，技術的条件により各工法の設計事項が1通りに定まるとし，補修費用が一意的に定まると仮定する．以上の仮定より，ある一箇所の道路の補修費用は，補修前の機能水準の値によらず常に一定値Fをとる．いま，管理主体は現在価値に割り引いた期待総費用の最小化を試みると考える．すなわち，管理主体が最小化を試みる汎関数を

$$\begin{aligned} J(V) &= E_V\Big[\int_0^\infty c(z(t))\exp(-\alpha t)ds(t) \\ &\quad + \sum_{i\geq 1} F\exp(-\alpha\theta_i)\Big] \end{aligned} \tag{3}$$

と定義する．ただし，$V = \{\theta_i | i \geq 1\}$はインパルス制御変数であり，$\alpha$は瞬間的割引率である．したがって，道路管理者が解くべき問題は次式で表される．

$$\left.\begin{array}{l} \min_V\{J(V)\} \\ \text{subject to} \\ eqs.(1a), eqs.(1b), \\ eqs.(2a), eqs.(2b), eqs.(2c) \end{array}\right\} \tag{4}$$

(3) 最適補修ルール

以上の問題は，システムの状態が離散的な瞬間的時刻におけるジャンプ（インパルス）で制御される最適インパルス制御問題となっている．本研究で定式化した最適インパルス制御問題では，インパルス時刻（「いつ補修投資を実施するか」）が制御変数となる．時刻tの機能水準を$z(t) = z$と表そう．最適値関数$\Phi(z)$を時刻tから最適インパルス制御を行使することで達成可能な最小期待総費用により定義しよう．時刻tの現在価値で評価した最適値関数は

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \min_V E\Big[&\int_t^\infty c(z(u))\exp\{-\alpha(u-t)\}ds(u) \\ &+ \sum_{i\geq i_t+1} F\exp\{-\alpha(\theta_i - t)\}\Big] \end{aligned} \tag{5}$$

と定式化できる．ただし，$u \geq t$は時刻，i_tは初期時点から時刻tまでに補修投資を行った回数を表す．したがって，任意の$i \geq i_t + 1$に対して$\theta_i \geq t$が成立する．時刻tに補修投資を行った場合，施設の機能水準はzから$\bar{Z}$にジャンプする．最適値関数は期待総費用の最小値を表していることより，一般的に

$$\Phi(z) - \{F + \Phi(\bar{Z})\} \leq 0 \tag{6}$$

が成立する．時刻tにおいて補修投資が行われるのは，その時刻に回復水準$\bar{Z}$の補修投資を行うことにより，期待総費用が最小化される時，その時のみである．すなわち，時刻tに最適補修投資が実施される場合にのみ式(6)が等号で成立する．一方，式(6)が不等式で成立する場合，補修投資は実施されない．機能水準の観察値$\hat{z}$が与えられたとしよう．ここで，継続集合$\mathcal{C}$を

$$\mathcal{C} = \{z | \Phi(z) < F + \Phi(\bar{Z})\} \tag{7}$$

と定義する．継続集合$\mathcal{C}$は補修投資を見送ることが最適となる機能水準の集合であり，

$$\mathcal{C} = \{z | z > z^*\} \tag{8}$$

と定義できる．観察値$\hat{z}$がz^*より小さい時，直ちに補修投資が行われる．z^*は補修投資が必要となる最大の機能水準であり臨界機能水準と呼ぶ．任意の$z \in (0, z^*]$に対して，最適値関数は

$$\Phi(z) = F + \Phi(\bar{Z}) \tag{9}$$

と定義される．状態変数の実現値$\hat{z}$が観察された場合，補修投資を行うべきか否かはルール$\Im$

$$\Im = \begin{cases} \text{直ちに}\bar{Z}\text{まで機能を回復する} & \hat{z} \leq z^* \\ \text{補修投資を見送る} & \hat{z} > z^* \end{cases}$$

で決定される．時間の経過とともにzの値が経路$z(t)$に沿って減少していく．いま，機能水準$z(t)$が臨界機能水準z^*に到達する時刻をθ_1と表す．この時刻θ_1

が最初のインパルス時刻であり，その時点に回復水準$\bar{Z}$の補修投資を行うことにより最適補修を実現することができる.

4. シミュレーションの方法

式(4)で表現された最適補修問題を解析的に解くことはできないので，モンテカルロシミュミレーションにより解を導出する．単位期間をΔtとし，各期$t = t_k$における累積需要，機能水準を

$$s_k = s(t_k), z_k = z(t_k), t_k = k\Delta t; k = 0,1,2,\cdots \quad (10)$$

と表す．(1a)式，(2a)式を離散近似すると

$$s_{k+1} = s_k + \beta\Delta t + \sigma\epsilon_1(t_k) \quad (11)$$

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_k} = -\rho\{s_{k+1} - s_k\} - \delta\Delta t - \Delta q(t_k) - \gamma\epsilon_2(t_k) \quad (12)$$

$$\Delta q(t_k) = \begin{cases} u & (\text{確率 } \lambda\Delta t) \\ 0 & (\text{確率 } 1 - \lambda\Delta t) \end{cases} \quad (13)$$

と表される．式(2c)はインパルス発生時刻以外での離散近似を表す．$\epsilon_1(t_k), \epsilon_2(t_k), k = 0,1,2,\cdots$は正規分布$N(0,\Delta t)$に従う確率変数であり，互いに独立である．正規分布に従う乱数$\epsilon_1(t_k), \epsilon_2(t_k), k = 0,1,2,\cdots$を発生させ，各期の$\Delta q(t_k)$の値の抽選を行えば$s_k, z_k, k = 0,1,2,\cdots$の１つのサンプルパスを得ることができる.

目的関数(3)式は次式のように離散近似される.

$$J'(V) = E\left[\sum_{k\geq 0} c(z_k)(s_{k+1} - s_k)\frac{1}{(1+\alpha)^{t_k}} + \sum_{i\geq 1}\frac{F}{(1+\alpha)^{\theta_i}}\right] \quad (14)$$

ここに，$\{\theta_i | i \geq 1\}$はインパルス制御変数である．目的関数を最小にするように補修が行われる場合，補修が行われる直前における機能水準は一定値になる．この値を最適補修ルールz^*とする．補修ルールz^j(機能水準がz_j以下まで小さくなったらただちに補修を行うというルール)のもとで機能水準の初期値がz_0のときの目的関数値を$J(z_0; z^j)$と表すと，目的関数の再帰的な性質より次式が成立する.

$$J(\bar{Z}; z^j) = E_0\left[\sum_{k=0}^{\frac{\theta_1}{\Delta t}-1} c(z_k)(s_{k+1} - s_k)\frac{1}{(1+\alpha)^{t_k}} + \frac{F}{(1+\alpha)^{\theta_1}} + \frac{J(\bar{Z}; z^j)}{(1+\alpha)^{\theta_1}}\right] \quad (15)$$

ただし，$\bar{Z}$は補修直後の機能水準である．s_k, z_k, θ_1は確率変数である．右辺$E_0[\quad]$内の第１項は時刻$t = 0$から時刻$t = \theta_1$までの可変的費用の現在価値を表しており，第２項は時刻$t = \theta_1$で行われる補修投資費用の現在価値を表し，第３項は時刻$t = \theta_1$以降にかかる総費用の現在価値を表している．これを項$J(\bar{Z}; z^j)$に関して整理することにより，整理すると

$$J(\bar{Z}; z^j) = \left\{1 - E_0\left[\frac{1}{(1+\alpha)^{\theta_1}}\right]\right\}^{-1} \left\{E_0\left[\sum_{k=0}^{\frac{\theta_1}{\Delta t}-1} c(z_k)(s_{k+1} - s_k)\frac{1}{(1+\alpha)^{t_k}}\right] + E_0\left[\frac{F}{(1+\alpha)^{\theta_1}}\right]\right\}$$

を得る．いま，モンテカルロシミュミレーションによって累積需要，機能水準のヒストリカルな１つのパスを発生させることにより，確率変数s_k, z_k, θ_1は１つの実現値をもつ．上式の右辺は，パスの発生回数Mを十分大きくすれば，パスの発生によって得られる各項の実現値の平均値によって求められる．したがって，十分多くのパスを発生させることにより$J(\bar{Z}; z^j)$の値が求められることになる．様々な値のz^jに対して，この方法を繰り返し適用し，１次元探索法により$J(\bar{Z}; z^j)$が最小となる最適補修ルールz^*を求めることができる.

5. おわりに

本研究では道路舗装の最適補修ルールを求める方法を提案した．本研究で提案した最適補修モデルは，プロトタイプモデルとも言うべきものである．道路施設が置かれている環境に応じて各種のモデルの拡張が可能である．中でも，交通量の将来変動のシナリオに応じて最適補修ルールを求める問題は多様に異なる．実用的な補修ルールを求めるためには，交通需要の変化にトレンドが存在する場合や非定常的な成分が含まれる場合の最適補修ルールを求める必要がある．この場合，最適補修ルールは交通需要と機能水準の組み合わせとして表現することができる．紙面の制約上，本稿では現実のデータを用いた実証分析の結果やモデルの拡張に関する議論を割愛せざるを得ないが，その詳細は講演時に発表する.

参考文献

1) 内田弘,召田紀雄：地方道における長期補修計画の立案,土木学会論文集,No. 597, pp21-31, 1998.