【土木計画学研究・講演集　No.23(1)　2000年11月】

# 最適容積率規制に関する研究

*Study of optimal floor area ratio controls*

河野達仁*，金子貴之**，森杉壽芳***

*By Tatsuhito KONO*, Takayuki KANEKO**, Hisayoshi MORISUGI****

## 1．研究の目的

都市密度の増加に伴い，交通混雑，日照，通風等の外部不経済が発生している．容積率規制は都市密度を制限することで外部不経済削減効果を行うことを目的に用いられている．つまり，外部不経済が発生している市場に対して，間接市場である床面積市場で住民の厚生を改善しようとするものである．しかし，このような規制は自由な市場を歪め，不効率を発生させる．そこで，本論文は容積率規制による不効率と外部不経済削減効果との関係を明示化して，最適容積率規制を考察することを目的とする．

容積率規制を含め，都市利用規制に対する分析は，過去に多くの蓄積[例えば 1),2)]がある．山崎らの研究では，建蔽率規制，容積率規制等の規制緩和が資源配分や所得分配にいかなる影響を，一般均衡理論を用いて分析している．しかし，これらの論文では容積率規制による地価，地代の変化，都市の広がり，利益分配等，都市構造や分配構造に着眼点が置かれており，最適容積率規制について分析したものではない．

## 2．都市モデルの構築

居住分布の変化を表すため，２つのゾーンを仮定した．空間的一般均衡分析を用い，理論的に最適な容積率規制の方法を検討する．政策変数として，２つの居住ゾーンの容積率を考え，両ゾーン内の住民の効用を最大化する容積率規制を最適とする．

### （１）モデルの仮定

①２つの居住ゾーン($i$=1,2)が存在し，各ゾーンの土地面積はそれぞれ$\overline{A}_1$，$\overline{A}_1$で固定される．

②すべての家計が居住ゾーンから所得を得るために居住ゾーン外の業務ゾーンで労働を行う．

③家計は，居住ゾーン間をコストをかけずに効用の高い地域に移動する．

④土地及び企業所有を含めすべての人は同質である．

⑤政府は同質のすべての人の効用水準を高めるために容積率規制を行う．

### （２）モデル

**(a)家計の行動**

準線形の効用関数$V_i$を仮定する．なお，ゾーンの面積$\overline{A}_i$は固定されており，効用関数は人口密度$d_i\left(=N_i/\overline{A}_i\right)$によって発生する外部不経済を表す．

$$V_i=\max_{x_i^h,f_i^h}u(f_i^h,d_i)+x_i^h \tag{1}$$

$$s.t.\quad x_i^h+r_i\,f_i^h=w+\frac{1}{N}\left\{\pi^f+\pi^d+\sum_i R_i\overline{A}_i\right\} \tag{2}$$

ただし，

$$\frac{\partial u}{\partial f_i^h}>0,\ \frac{\partial u}{\partial d_i}<0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial f_i^h\partial d_i}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial f_i^{h2}}<0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial d_i{}^2}<0 \tag{3}$$

$x_i^h$:ゾーン $i$ の合成財需要，$r_i^h$:ゾーン $i$ の床面積価格，$f_i^h$:ゾーン $i$ の床面積需要,$w$:賃金，$\pi^f$:企業の利潤，$\pi^d$:Developer の利潤,$R_i$:地代

**(b)企業の行動**

１次同次関数の生産関数を仮定する．

$$\pi^f=\max_{X^f,l^f}\left\{X^f-wl^f\right\} \tag{4}$$

$$s.t.\quad X^f=wl^f \tag{5}$$

$X^f$:合成財供給，$l^f$:労働需要

**(c)Developer の行動**

$$\pi^d=\max_{F_i,x_i^d,l_i^d}\left\{\sum_i r_iF_i-\sum_i\left(x_i^d+R_ia_i^d+wl_i^d\right)\right\} \tag{6}$$

$$s.t.\quad F_i=F\left(x_i^d,a_i^d,l_i^d\right) \tag{7}$$

$F_i$:ゾーン $i$ の床面積供給，$a_i^d$:ゾーン $i$ の土地需要，$l_i^d$:ゾーン $i$ の労働需要

なお，容積率規制下では$F_i$が固定される．

**(d)市場均衡**

合成財$\sum_i\left(N_i^hx_i^h\right)+x^d=X^f$ (8),床面積$N_if_i^h=F_i(\mathrm{i}=1,2)$ (9)

土地$a_i^d=\overline{A}_i(i=1,2)$ (10), 労働$\sum_i N_i=\sum_i l_i^d+l^f$ (11)

効用$V_1=V_2$(12), 人口$\sum_i N_i=\overline{N}$ (13)

## 3．厚生変化

式(2)を式(1)に代入することにより，式(14)を得る．

$$V_i=\max_{f_i^h}u(f_i^h,d_i)+w+\frac{1}{N}\left\{\pi^f+\pi^d+\sum_i R_i\overline{A}_i\right\}-r_i^hf_i^h \tag{14}$$

キーワード：公共事業評価法，整備効果計測法

*　学生員，工修　　東北大学大学院情報科学研究科
**　学生員，　　東北大学大学院情報科学研究科
***　正員，工博，東北大学教授　大学院情報科学研究科
(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06,
TEL 022-217-7502，FAX 022-217-7500)

式(14)の f.o.c の式(15)から最適な $f_i^{h}$ が求まり，式(16)の間接効用関数を得る．なお，$^*$は最適解を示す．

$$\frac{\partial u}{\partial f_i^h}\left(f_i^h, d_i\right) = r_i^h \tag{15}$$

$$V_i = u(f_i^{h*}, d_i) + w + \frac{1}{N}\left\{\pi^f + \pi^d + \sum_i R_i \bar{A}_i\right\} - r_i^h f_i^{h*} \tag{16}$$

ここで個人はすべて同質であるから，個人の効用最大化と，社会的厚生 $B(=\sum_i N_i V_i)$ を最大化することは同義である．そこで，この経済の内生変数による社会的便益 $B$ の変化を考察する．社会的厚生の変化 $dB$ は式(12),(16)を用いて式(17)のように変形できる．

$$\begin{aligned} dB &= d\left\{\sum_i N_i V_i\right\} = dN_1V_1 - dN_1V_2 + N_1dV_1 + N_2dV_2 \\ &= N_1dV_1 + N_2dV_2 \\ &= N_1\left(\frac{\partial u}{\partial d_1}\frac{dN_1}{A_1} - dr_1^h f_1^h\right) + N_2\left(\frac{\partial u}{\partial d_2}\frac{dN_2}{A_2} - dr_2^h f_2^h\right) \\ &\quad + \bar{N}dw + d\pi^f + d\pi^d + dR_1\bar{A}_1 + dR_2\bar{A}_2 \end{aligned} \tag{17}$$

式(4),(5)で示される利潤関数から式(18)が得られる．

$$d\pi^f = -l^f dw \tag{18}$$

次に，容積率が規制されている場合，式(6)で示される Developer の利潤最大化行動は式(19)(20)で示される各ゾーンでの費用最小化行動を意味する．両式から，利潤の変化 $d\pi^d$ は式(21)のように導出できる．

$$C_i^d = \min_{x_i^d, a_i^d, l_i^d}\left\{x_i^d + R_i a_i^d + w l_i^d\right\} \tag{19}$$

$$s.t.\quad F_i = F\left(x_i^d, a_i^d, l_i^d\right) \tag{20}$$

$$\begin{aligned} d\pi^d &= F_1 dr_1^h + F_2 dr_2^h + r_1^h dF_1 + r_2^h dF_2 \\ &\quad - a_1^d dR_1 - a_2^d dR_2 - \left(l_1^d + l_2^d\right)dw - \frac{\partial C_1^d}{\partial F_1}dF_1 - \frac{\partial C_2^d}{\partial F_2}dF_2 \end{aligned} \tag{21}$$

式(17)に式(18),(21)を代入して，更に市場均衡条件式(9)～(11)を用いると，式(22)が得られる．

$$dB = \left(r_1^h - \frac{\partial C_1^d}{\partial F_1}\right)dF_1 + \left(r_2^h - \frac{\partial C_2^d}{\partial F_2}\right)dF_2 + \left(d_1\frac{\partial u}{\partial d_1} - d_2\frac{\partial u}{\partial d_2}\right)dN_1 \tag{22}$$

したがって，社会的厚生 $B$ の最大化の必要条件は式(23)(24)で示される．式(23)(24)の第1項は床面積市場での死荷重の変化，第2項はゾーン1とゾーン2の混雑外部性の差を変化を示す．

$$\frac{\partial B}{\partial F_1} = \left(r_1^h - \frac{\partial C_1^d}{\partial F_1}\right) + \left(d_1\frac{\partial u}{\partial d_1} - d_2\frac{\partial u}{\partial d_2}\right)\frac{\partial N_1}{\partial F_1} = 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial B}{\partial F_2} = \left(r_2^h - \frac{\partial C_2^d}{\partial F_2}\right) + \left(d_1\frac{\partial u}{\partial d_1} - d_2\frac{\partial u}{\partial d_2}\right)\frac{\partial N_1}{\partial F_2} = 0 \tag{24}$$

## 4. 最適化

### （1）各関数の性質

ここでは式(23)(24)の各項について分析する．

**(a) $r_1 - \partial C_1^d/\partial F_1$ と $r_2 - \partial C_2^d/\partial F_2$ に関して**

式(25)のように関数 $\Phi_1, \Phi_2$ を定義する．

$$\Phi_1(F_1, F_2) = r_1 - \frac{\partial C_1^d}{\partial F_1},\ \Phi_2(F_1, F_2) = r_2 - \frac{\partial C_2^d}{\partial F_2} \tag{25}$$

任意の $F_2$ に対して式(26)を満たす $F_1$ を $F_1^M(F_2)$ と定義する．$F_1^M$ はゾーン2の床面積 $F_2$ のもとで一般均衡波及後に市場で決定されるゾーン1の床面積を示す．同様に式(27)より $F_2^M(F_1)$ が求まる．

$$\Phi_1\left(F_1^M, F_2\right) = r_1^h\left(F_1^M, F_2\right) - \frac{\partial C_1^d}{\partial F_1}\left(R_1\left(F_1^M, F_2\right), w, F_1^M\right) = 0 \quad \text{for } {}^\forall F_2 \tag{26}$$

$$\Phi_2\left(F_1, F_2^M\right) = r_2^h\left(F_1, F_2^M\right) - \frac{\partial C_2^d}{\partial F_2}\left(R_2\left(F_1, F_2^M\right), w, F_2^M\right) = 0 \quad \text{for } {}^\forall F_1 \tag{27}$$

また，市場で決定される場合の床面積 $F_1^M$ からの乖離，すなわち規制の大きさを表す変数 $\tilde{F}_1$ を導入すると，床面積 $F_1$ は式(28)で表される．

$$F_1^M(F_2) + \tilde{F}_1 = F_1\ ,\ F_2^M(F_1) + \tilde{F}_2 = F_2 \tag{28}$$

ここで式(25)より，式(29)が得られる．なお，各項の下の符号条件は付録Aに示した．各項の符号条件から式(29)の符号は負と定まる．

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial F_1} = \frac{\partial r_1^h}{\partial F_1} - \frac{\partial^2 C_1^d}{\partial F_1 \partial R_1}\frac{\partial R_1}{\partial F_1} - \frac{\partial^2 C_1}{\partial F_1^2} = \underset{(-)}{\frac{\partial r_1^h}{\partial F_1}} - \underset{(0)}{\frac{\partial A_1}{\partial F_1}}\frac{\partial R_1}{\partial F_1} - \underset{(+)}{\frac{\partial^2 C_1}{\partial F_1^2}} < 0 \tag{29}$$

ただし，$\dfrac{\partial^2 C}{\partial R_1^2} > 0$ と仮定．

したがって，式(26),(29)より式(30)，同様に式(31)の性質が得られる．

$$\begin{aligned} \Phi_1\left(F_1^M(F_2) + \tilde{F}_1, F_2\right) &> 0 \text{ for } \tilde{F}_1 > 0, {}^\forall F_2 \\ &= 0 \text{ for } \tilde{F}_1 = 0, {}^\forall F_2 \\ &< 0 \text{ for } \tilde{F}_1 < 0, {}^\forall F_2 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2\left(F_1, F_2^M(F_2) + \tilde{F}_2\right) &> 0 \text{ for } {}^\forall F_1, \tilde{F}_2 > 0 \\ &= 0 \text{ for } {}^\forall F_1, \tilde{F}_2 = 0 \\ &< 0 \text{ for } {}^\forall F_1, \tilde{F}_2 < 0 \end{aligned} \tag{31}$$

**(b) $dN_1/dF_1^h$，$dN_1/dF_2^h$ に関して**

付録Aより式(33)が得られる．

$$\frac{dN_1}{dF_1} > 0,\quad \frac{dN_1}{dF_2} < 0 \tag{32}$$

**(c) $d_1\,\partial u/\partial d_1 - d_2\,\partial u/\partial d_2$ に関して**

$\Psi, \Psi_1, \Psi_2$ を式(33)のように定義する．

$$\Psi(F_1, F_2) = \Psi_1(F_1, F_2) - \Psi_2(F_1, F_2) \tag{33}$$

ただし，$\Psi_1(F_1, F_2) = d_1(F_1, F_2)\dfrac{\partial u}{\partial d_1}(F_1, F_2)$

$$\Psi_2(F_1, F_2) = d_2(F_1, F_2)\frac{\partial u}{\partial d_2}(F_1, F_2)$$

付録Bにより，$\Psi$の$\tilde{F}_1$，$\tilde{F}_1$に関する偏微分が式(34)のように得られる．

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{F}_1}<0,\frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{F}_2}>0 \tag{34}$$

### （3）最適化

$\Phi_1(F_1,F_2),\Phi_2(F_1,F_2),\psi_2(F_1,F_2)$の座標$(F_1,F_2)$を分解して，$\left(F_1^M+\tilde{F}_1,F_2^M+\tilde{F}_2\right)$で考える．更に，紙面の制約上，$\left(F_1^M+\tilde{F}_1,F_2^M+\tilde{F}_2\right)$を$\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)$と記す．この標記を用いると，式(23),(24)の条件は式(35),(36)のように書きかえられる．

$$\frac{dB}{dF_1}=\Phi_1\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)+\Psi\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)\frac{dN_1}{dF_1}=0 \tag{35}$$

$$\frac{dB}{dF_2}=\Phi_2\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)+\Psi\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)\frac{dN_2}{dF_2}=0 \tag{36}$$

**(a) 市場均衡点について**

市場均衡点$\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)=(0,0)$を考えると，式(30),(31)から式(37)が成立する．

$$\Phi_1(0,0)=0\,,\Phi_2(0,0)=0 \tag{37}$$

$\Psi(0,0)$の構成要素$\Psi_1(0,0),\Psi_2(0,0)$の大きさによって以下のように場合分けできる．

(i) $|\Psi_1(0,0)|=|\Psi_2(0,0)|$の時，

式(35)-(37)より$\partial B/\partial F_1=0\,,\partial B/\partial F_2=0$が得られる．

(ii) $|\Psi_1(0,0)|>|\Psi_2(0,0)|$の時，

式(35)-(37)より$\partial B/\partial F_1<0\,,\partial B/\partial F_2>0$が得られ，近傍では$\tilde{F}_1$を負に，$\tilde{F}_2$を正にすることで便益が向上することがわかる．

(iii) $|\Psi_1(0,0)|<|\Psi_2(0,0)|$の時，

式(35)-(37)より$\partial B/\partial F_1>0\,,\partial B/\partial F_2<0$が得られる．

**(b) 最適容積率の必要条件**

(a)では市場均衡点における改善の可能性について述べた．ここでは，最適容積率規制について検討する．(a)で示した(i),(ii),(iii)の中で，(i)については，現実性が低いため除く．(ii)あるいは(iii)については，一般性を失うことなく，(ii)についてのみ検討を行う．検討方法として，図1のⅠ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ象限について式(35)(36)が同時に成立するかについて検討する．

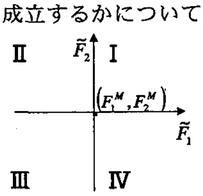


**図1.象限**

**(b-1) 第Ⅰ象限について**

$\tilde{F}_1\geq 0,\tilde{F}_2\geq 0$，ただし$\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)\neq(0,0)$

式(37)と式(30)(31)より，

$$\Phi_1\left(F_1^M,F_2^M\right)<0,\Phi_2\left(F_1^M,F_2^M\right)<0 \tag{38}$$

式(35)(36)が成立するためには式(39),(40)が同時に成立する必要がある．しかし，式(39),(40)は$\Psi\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)<0\,,\Psi\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)>0$を示しており，矛盾する．つまり，第Ⅰ象限に解は存在しない．

$$\Psi\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)=\underset{(-)}{\Phi_1\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)}\Big/\underset{(+)}{\left(dN_1/dF_1\right)} \tag{39}$$

$$\Psi\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)=\underset{(-)}{\Phi_2\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)}\Big/\underset{(-)}{\left(dN_1/dF_2\right)} \tag{40}$$

**(b-2) 第Ⅲ象限について**

$\tilde{F}_1\leq 0,\tilde{F}_2\leq 0$，ただし$\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)\neq(0,0)$

式(37)と式(30),(31)より，

$$\Phi_1\left(F_1^M,F_2^M\right)>0,\Phi_2\left(F_1^M,F_2^M\right)>0 \tag{41}$$

(b-1)と同様に，式(35),(36)が成立するためには式(42),(43)が同時に成立する必要があるが，これも矛盾する．つまり，第Ⅱ象限に解は存在しない．

$$\Psi\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)=\underset{(+)}{\Phi_1\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)}\Big/\underset{(+)}{\left(dN_1/dF_1\right)} \tag{42}$$

$$\Psi\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)=\underset{(+)}{\Phi_2\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)}\Big/\underset{(-)}{\left(dN_1/dF_2\right)} \tag{43}$$

**(b-3) 第Ⅳ象限について**

$\tilde{F}_1>0,\tilde{F}_2<0$，ただし$\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)\neq(0,0)$

式(37)と式(30),(31)より，

$$\Phi_1\left(F_1^M,F_2^M\right)>0,\Phi_2\left(F_1^M,F_2^M\right)<0 \tag{44}$$

ここで，式(45),(46)が成立し，式(47)が求まる．

$$\Psi\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)=\underset{(+)}{\Phi_1\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)}\Big/\underset{(+)}{\left(dN_1/dF_1\right)} \tag{45}$$

$$\Psi\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)=\underset{(-)}{\Phi_2\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)}\Big/\underset{(-)}{\left(dN_1/dF_2\right)} \tag{46}$$

$$\Psi\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)>0 \tag{47}$$

ただし，(ii)のケースであるため，$\Psi(0,0)<0$という条件と，式(34)を用いると，式(48)を得る．

$$\Psi\left(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2\right)<0 \tag{48}$$

したがって，式(47)と式(48)に矛盾が生じ，第Ⅳ象限には解は存在しない．

**(b-4) 第Ⅱ象限について**

第Ⅱ象限に関して，関数の符号の矛盾は生じない．したがって，式(36),(37)を満たす解が存在する場合は必ず第Ⅱ象限に解がある．すなわち，最適容積率規制を行う際には$\tilde{F}_1<0\;\tilde{F}_2>0$とする必要がある．なお，水平軸，垂直軸は含まない．

**(b-5) 最適解の存在**

最適解が唯一存在するには，社会的便益 B を $F_1$ と $F_2$ の関数として，$F_1$ と $F_2$ の凹関数となれば解は唯一となる．その条件は次式で表される．

$$\frac{d^2B}{dF_1^2}<0 \quad (49),\ \frac{d^2B}{dF_2^2}<0 \quad (50),\ \begin{vmatrix} \dfrac{d^2B}{dF_1^2} & \dfrac{d^2B}{dF_1dF_2} \\ \dfrac{d^2B}{dF_1dF_2} & \dfrac{d^2B}{dF_2^2} \end{vmatrix}>0 \quad (51)$$

ここでは詳しいことは述べないが，式(49),(50),(51)は $\psi\dfrac{d^2N_1}{dF_1^2}$ および，$\psi\dfrac{d^2N_1}{dF_2^2}$，$\psi\dfrac{d^2N_1}{dF_1dF_2}$ の大きさが無視できるほど，小さければ必ず成立する．$\dfrac{dN_1}{dF_1}$ は規制による人口変化を意味し，$\dfrac{d^2N_1}{dF_1^2}$ は人口変化の規制の大きさに伴う変化を示す．仮に床面積の変化が規制によって，大きく変化しない場合には十分成立する．特に，最適解の均衡で式(49)(50)(51)が成立する場合は，局所的に最適解である．

**(b-6) 最適容積率規制の実行可能性について**

第Ⅱ象限の規制の実行可能性について述べる．Developer は利潤が得られる限り，$\tilde{F}_1<0$ $\tilde{F}_2>0$，どちらの政策に対しても，床面積を生産する．したがって，生産関数に依存するが，規模の経済がある程度小さければ，この政策は十分実行可能である．

## 5. 結論

本研究の結論は次のようにまとめられる．容積率規制によって厚生を最大化することが可能であるならば，混雑の外部性が市場均衡点において，ゾーン 1 とゾーン 2 で比較してゾーン 1 の方が大きければ，ゾーン 1 には市場均衡で決まる容積率よりも小さい容積率を，ゾーン 2 には市場均衡で決まる容積率よりも大きい容積率を設定する必要がある．現在，容積率規制は最高容積率規制しか行われていない．しかし，本研究によれば，住民の厚生最大化のためには最低容積率規制も別のゾーンで行う必要がある．


[主要参考文献]

1) Komei Sasaki : Minimum Lot Size Zoning and FAR Regulation in the Presence of Neighborhood Externalities, Tohoku University Discussion Paper, 2000

2) 山崎福寿，日引聡：土地利用規制の経済分析，経済研究 44No.2，1993


**付録 A**

式(9),(12),(13)の全微分を行列で表現すると式(A1)を得る．

$$\begin{bmatrix} -f_1^h & f_2^h & \left(\dfrac{1}{A_1}\dfrac{\partial u}{\partial d_1}+\dfrac{1}{A_2}\dfrac{\partial u}{\partial d_2}\right) \\ N_1\dfrac{\partial f_1^h}{\partial r_1^h} & 0 & f_1^h \\ 0 & (N-N_1)\dfrac{\partial f_2^h}{\partial r_2^h} & -f_2^h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dr_1^h \\ dr_2^h \\ dN_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ dF_1 \\ dF_2 \end{bmatrix} \quad \text{(A1)}$$

式(A1)より，クラメールの公式を用いて，床面積価格と人口変化の関数が得られる．得られた関数に効用関数の仮定を適用すると式(A2)-(A8)が得られた．ただし，紙面の制約上，具体的な関数は省略．

$$\frac{dr_1^h}{dF_1^h}<0 \ \text{(A2)},\ \frac{dr_1^h}{dF_2^h}<0 \ \text{(A3)},\ \frac{dr_2^h}{dF_1^h}<0 \ \text{(A4)},\ \frac{dr_2^h}{dF_2^h}<0 \ \text{(A5)},$$

$$\frac{dN_1}{dF_1^h}>0 \ \text{(A6)},\ \frac{dN_1}{dF_2^h}<0 \ \text{(A7)},\ |D|<0 \ \text{(A8)}$$

**付録 B**

式(28)より式(B1)が得られる．

$$\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\partial F_1^M}{\partial F_2} \\ -\dfrac{\partial F_2^M}{\partial F_1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d\tilde{F}_1 \\ d\tilde{F}_2 \end{bmatrix} \quad \text{(B1)}$$

式(B1)の行列式を H とする．付録 C を用いれば，

$$\frac{dF_1}{d\tilde{F}_1}=\frac{1}{|H|}>0 \quad \text{(B2)},\quad \frac{dF_2}{d\tilde{F}_2}=\frac{1}{|H|}>0 \quad \text{(B3)}$$

$$\frac{dF_2}{d\tilde{F}_1}=\frac{\dfrac{\partial F_2^M}{\partial F_1}}{|H|}<0 \quad \text{(B4)},\quad \frac{dF_1}{d\tilde{F}_2}=\frac{\dfrac{\partial F_1^M}{\partial F_2}}{|H|}<0 \quad \text{(B5)}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial F_1}=\frac{1}{A_1}\underset{(+)}{\frac{\partial N_1}{\partial F_1}}\underset{(-)}{\frac{\partial u}{\partial d_1}}+\underset{(-)}{\frac{\partial^2 u}{\partial d_1{}^2}}\frac{d_1}{A_1}\underset{(+)}{\frac{\partial N_1}{\partial F_1}}-\frac{1}{A_1}\underset{(-)}{\frac{\partial N_1}{\partial F_1}}\underset{(-)}{\frac{\partial u}{\partial d_2}}-\underset{(-)}{\frac{\partial^2 u}{\partial d_2^2}}\frac{d_2}{A_2}\underset{(-)}{\frac{\partial N_1}{\partial F_1}}<0 \quad \text{(B6)}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial F_2}=-\frac{1}{A_1}\underset{(+)}{\frac{\partial N_2}{\partial F_2}}\underset{(-)}{\frac{\partial u}{\partial d_1}}-\underset{(+)}{\frac{\partial^2 u}{\partial d_1{}^2}}\frac{d_1}{A_1}\underset{(+)}{\frac{\partial N_2}{\partial F_2}}+\frac{1}{A_2}\underset{(+)}{\frac{\partial N_1}{\partial F_2}}\underset{(-)}{\frac{\partial u}{\partial d_2}}+\underset{(-)}{\frac{\partial^2 u}{\partial d_2^2}}\frac{d_2}{A_2}\underset{(+)}{\frac{\partial N_1}{\partial F_2}}>0 \quad \text{(B7)}$$

$\Psi\left(F_1^M(F_2)+\tilde{F}_1, F_2^M(F_1)+\tilde{F}_2\right)$ と表すと，

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{F}_1}=\underset{(-)}{\frac{\partial \Psi}{\partial F_1}}\underset{(+)}{\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{F}_1}}+\underset{(+)}{\frac{\partial \Psi}{\partial F_2}}\underset{(-)}{\frac{\partial F_2}{\partial \tilde{F}_1}}<0 \quad \text{(B8)}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{F}_2}=\underset{(-)}{\frac{\partial \Psi}{\partial F_1}}\underset{(-)}{\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{F}_2}}+\underset{(+)}{\frac{\partial \Psi}{\partial F_2}}\underset{(+)}{\frac{\partial F_2}{\partial \tilde{F}_2}}>0 \quad \text{(B9)}$$

**付録 C**

式(26),(27)より式(C1)が求まる．詳細は省くが，$|H|$ は式(A2)-(A8)で得られた関数より正と定まる．

$$\frac{\partial F_1^M}{\partial F_2}=\frac{-\dfrac{\partial r_1^h}{\partial F_2}}{\dfrac{\partial r_1}{\partial F_1}-\dfrac{\partial^2 C_1^d}{\partial F_1{}^2}}<0,\quad \frac{\partial F_2^M}{\partial F_1}=\frac{-\dfrac{\partial r_2^h}{\partial F_1}}{\dfrac{\partial r_2^h}{\partial F_2}-\dfrac{\partial^2 C_2^d}{\partial F_2{}^2}}<0 \quad \text{(C1)}$$

$$|H|=1-\frac{\dfrac{\partial r_1^h}{\partial F_2}\dfrac{\partial r_2^h}{\partial F_1}}{\left(\dfrac{\partial r_1}{\partial F_1}-\dfrac{\partial^2 C_1^d}{\partial F_1{}^2}\right)\left(\dfrac{\partial r_2^h}{\partial F_2}-\dfrac{\partial^2 C_2^d}{\partial F_2{}^2}\right)}>0 \quad \text{(C2)}$$