【土木計画学研究・講演集　No.22(2)　1999年10月】

通勤交通における個人差を考慮した出発時刻選択問題
-動的な混雑料金への応用-

Departure Time Choice on Commute Traffic considering Individual Variation in Time Values
- An Application to Dynamic Road Pricing -

井料 隆雅*, 桑原 雅夫**
By Takamasa IRYO* and Masao KUWAHARA**

1　はじめに

混雑時の道路利用者に対して課金を行なう政策である「ピークロードプライシング」は，朝のラッシュ時などに発生する激しい渋滞を緩和する方策として注目されている．この政策は，混雑時の通行料金を他の時間に対して高く設定することにより，利用者の道路利用時間を分散させるのが狙いである．しかし実際には，利用者各個人の時間価値やスケジュールなどは大きく異なるのが自然と考えられ，混雑料金を考える際には，このような個人差を考慮するのが重要かと思われる．また，ピークロードプライシング政策は，利用者に出発時刻を調整する動機づけを与える，という点に意味がある．そこで，本稿では，特に個人差を考慮した上で，出発時刻選択に関する理論的な考察を行う．

2　個人差を考慮した出発時刻選択問題による渋滞の解析

利用者が出発時刻を選択する問題を「出発時刻選択問題」と呼び，これまでいくつかの研究の蓄積がある[1]．個人差を扱ったものにはNewellの論文[2]があるが，混雑料金問題に拡張するにはやや難があったので，今回，改めて理論を再構築した．

いま，居住地と勤務地が一本の道路で結ばれ，そこに単一ボトルネックがある状態を考える(図1)．

この道路は，基本的には容量に制限がないが，ボトルネックの部分に限って容量に上限がある．すると，

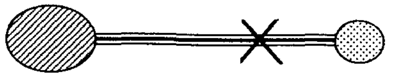

図1: 対象とするネットワーク

利用者はボトルネックの手前で，ボトルネックを通り抜けるのを待つ．この待つことが「渋滞」である．渋滞の中の追い越しが存在しないと仮定する，すなわちFIFOサービスを仮定すると，ボトルネックに入る時刻を t_a, ボトルネックを出る時刻を t_d としたとき，t_a は t_d の関数と表すことができるので，ボトルネックで待たされる時間は

$$w(t_d) \equiv t_d - t_a(t_d) \qquad (1)$$

と表される．そして，この $w(t_d)$ を知ることができれば，渋滞がどのように成長して，そして解消するかを知ったことになる．

では，どのようにしてこの $w(t_d)$ が決まるのだろうか，そのためには利用者の行動を考える必要がある．いま，利用者は，勤務開始時刻を持ち，その時刻に遅刻することのないように，なおかつ一般化交通費用を最小化するように自分の家を出る時刻を決定する，とする．(なお，ボトルネックから勤務地までの所要時間を不変と仮定すれば，各利用者は，勤務開始時刻の代わりに希望ボトルネック出発時刻 t_w を持つとすることができるので，この t_w を以降では用いることとする)．各利用者の一般化交通費用 p としては，

$$p = c_w w(t_d) + c_s(t_w - t_d) \qquad (2)$$

という形を仮定する．なお，いま遅刻を考えないために，式(2)では $t_d \leq t_w$ である．ここで，c_w は渋滞の単位待ち時間に対応するコスト，c_s は勤務地で勤務時間を待つ単位時間に対応するコストであり，この2

キーワード：交通管理，TDM
*学生員，理修，東京大学生産技術研究所第5部
連絡先：〒153-8505 東京都目黒区駒場4-6-1
TEL：03-5452-6001 ext.58175
FAX：03-5452-6420
e-mail　iryo@nishi.iis.u-tokyo.ac.jp
**正会員，Ph.D.，東京大学生産技術研究所第5部

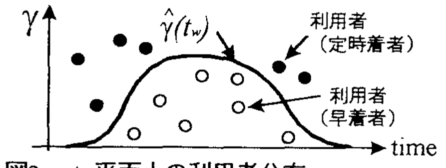

図2 γ-t_w 平面上の利用者分布

（利用者は γ-t_w 平面に分布する．また，早着者と定時着者を分ける一価関数 $\hat{\gamma}(t_w)$ を定義できる）

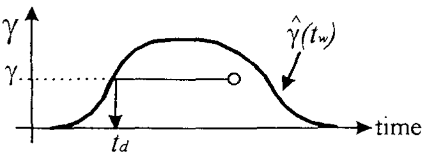

図3 早着者の流出時刻

（(γ, t_w)にいる早着者のt_dは，γと$\hat{\gamma}(t_w)$との交点で表せる．）

つの値は各個人がそれぞれ違った値を持つ．ここで，居住地からボトルネックまでの所要時間が変化しないとすると，ボトルネック到着時刻 t_a が t_d の関数であることより，居住地を出発する時刻を選択することと，ボトルネック出発時刻 t_d を選択することは等価となる．ゆえに，各利用者は，式 (2) を最小化するように t_d を選択することとなる．すなわち，

$$\frac{dp/c_w}{dt_d} = \frac{dw}{dt_d} - \gamma = 0 \text{ かつ } t_d < t_w$$
$$\text{(勤務地に早く着く = 早着者)} \quad (3)$$

または

$$t_d = t_w \text{ (勤務地に定時に着く = 定時着者)} \quad (4)$$

を満たす t_d から，p を最小化する t_d を選ぶこととなる．なお，式 (3) は c_w で両辺を除しており，$\gamma \equiv c_w/c_s$ と定義している．この γ は各個人により異なる値となる．

式 (3) は $w(t_d)$ の微分方程式となっているので，この式を積分すれば $w(t_d)$ を求められるのだが，この式は，t_d に到着する旅行者の中に早着者がいないと成り立たない．そこで，どの旅行者が早着者で，どの旅行者が定時着者かを知る必要がある．いま，式 (3),(4) に出てくる個人特性を示すパラメータが γ と t_w の 2 つだけであることより，利用者を特定するには，γ と t_w の 2 つの値がわかればよいことがわかる．

この γ,t_w を元に，利用者をある旅行者が早着者か定時着者かを判別する方法を求めることができる．それが以下に示す補題 1 である．

[補題 1] いま，$\hat{\gamma}(t_w) \leq \gamma$ の人は定時着，$\hat{\gamma}(t_w) > \gamma$ の人は早着，という一価関数 $\hat{\gamma}(t_w)$ を定義できる．
(証明は付録に記す)

この補題 1 を図にしたのが図 2 である．すべての利用者はこの図上の特定の場所 (γ, t_w) に配置され，境界線 $\hat{\gamma}(t_w)$ により区分される．この図はこの論文で基本的な役割をもつものであり，以下この図を「γ 図」と呼ぶことにする．

次に，早着者の t_d がどう決まるかを考える．このために別の補題を証明した．

[補題 2] γ を持つ早着者の t_d は，$\hat{\gamma}(t_d) = \gamma$ を満たす t_d のうち，$t_d < t_w$ でかつ t_w に一番近い t_d となる．(図 3) (証明は付録に記す)

また，補題 2 と図 3 から分かるように，早着者の到着する t_d では，必ず $\hat{\gamma}(t_d)$ が増加している（逆も成立）

以上のことにより，$\hat{\gamma}(\cdot)$ を決めてやれば，ある γ を持つ早着者の持つ t_d がいつかを知ることができ，$w(t_d)$ を決定することが出来そうである．そこで，$\hat{\gamma}(\cdot)$ をどのようにして求めるかを考えよう．

いま，補題 2 を使うと，ある時刻 t_w に，どれくらいの利用者がボトルネックを出るかが，γ 図から計算できる．まず，需要空間にいる利用者の数を，密度関数 $\rho(\gamma, t_w)$ であらわし，ρ の累積関数を，

$$\begin{aligned} F(\gamma, t_w) &= \int_0^{\gamma} \rho(\gamma^*, t_w) d\gamma^* \\ W(\gamma, t_w) &= \int_{-\infty}^{t_w} \rho(\gamma, t_w^*) dt_w^* \end{aligned} \quad (5)$$

とする．

ここで，ある出発時刻 t_d を考えたとき，t_d にボトルネックを出る定時着者の数 dN_o は，関数 $\hat{\gamma}$ の定義から，

$$dN_o = dt_d \{F(1, t_d) - F(\hat{\gamma}(t_d), t_d)\} \quad (6)$$

と与えられる．（なお，系が安定するには，$\gamma \leq 1$ でなくてはならない [1] ので，上の式では γ の上限を 1 としている）

一方，$\hat{\gamma}(t_d)$ が増加し，t_d に早着者が存在する際の早着者の数 dN_e については，t_d から $t_d + dt_d$ の間につく人間の持つ γ が，$\hat{\gamma}(t_d)$ から $\hat{\gamma}(t_d + dt_d)$ であることより，この範囲の γ を持つ早着者の数を合計すればよいので，dt_d を微小量として，

$$dN_e = d\hat{\gamma} \{W(\hat{\gamma}(t_d), t_d^*) - W(\hat{\gamma}(t_d), t_d)\} \quad (7)$$

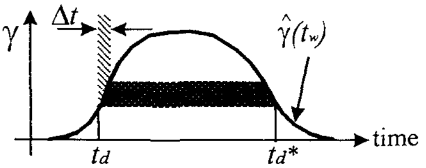

図4 流出時刻 t_d の流出者
（斜線＋黒色の利用者がΔtの部分に流出する．流出量は渋滞中は常に道路容量と等しくなる．）

と計算できる．ただし，t_d^* は，$\hat{\gamma}(t_d^*) = \hat{\gamma}(t_d)$ を満たすもののうち，t_d の次に大きいものである (図 4).

ところで，渋滞が発生している状況では，道路容量いっぱいに車が流れていると考えるべきなので，ある単位時間にボトルネックを通る利用者数は，必ずボトルネック容量と等しくなる (図 4)．これを用いると，渋滞中には，

$$
\begin{aligned}
\mu &= F(1,t_d) - F(\hat{\gamma}(t_d),t_d) \\
&+ \frac{d\hat{\gamma}}{dt_d}\{W(\hat{\gamma}(t_d),t_d^*) - W(\hat{\gamma}(t_d),t_d)\} \\
& \qquad \left(\frac{d\hat{\gamma}}{dt_d} > 0\right) \quad (8) \\
\mu &= F(1,t_d) - F(\hat{\gamma}(t_d),t_d) \qquad \left(\frac{d\hat{\gamma}}{dt_d} \leq 0\right) \quad (9)
\end{aligned}
$$

という式が成り立つ．(μ は道路容量である)

また，渋滞終了時刻 t_1 は，需要が容量に等しくなる時刻 ($\mu = F(1,t_1)$) で，かつそれ以降需要が容量を越えない時刻である．このときは，明らかに，

$$\hat{\gamma}(t_1) = 0 \text{ かつ } \frac{d\hat{\gamma}}{dt_d} \leq 0 \qquad (10)$$

である．

以上により，式 (10) で求まる t_1 を起点とし，式 (8) と式 (9) を時間をさかのぼりながら解くことにより，$\hat{\gamma}(\cdot)$ を一意に決めることが出来る．

さて，これで $\hat{\gamma}(\cdot)$ が決定できた．これを利用して，$w(t_d)$ の計算を行なうことにする．t_d が早着者のいる時刻 ($\hat{\gamma}(t_d)$ が増加する時刻) であれば，式 (3) より，$\frac{dw}{dt_d} = \gamma$ が成立する．また，補題 2 から，$\hat{\gamma}(t_d) = \gamma$ なので，これらを合わせて，積分することにより，

$$w(t_d) = \int_{t_0}^{t_d} \hat{\gamma}(t_w)dt_w \qquad (11)$$

と，$\hat{\gamma}(t_w)$ により表記できる．ただし，t_0 は，渋滞開始前で，かつ $w(t_0) = 0$ となる時刻である．

一方，t_w が早着者がいない時刻 ($\hat{\gamma}(t_w)$ が減少する時刻) である時を考える．いま，図 5 の γ 図上で

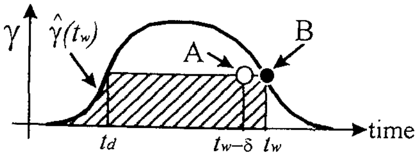

図5 (γ, t_w) の利用者のコスト
（Aの人とBの人のコストは連続するため，Bの人のコストは斜線部で表すことが出来る．）

点 A$(\hat{\gamma}(t_w), t_w - \delta)$ に居る人 (ただし $\delta \to +0$) を考えると，補題 1 よりこの人は早着者となり，その人のコストは，

$$
\begin{aligned}
p/c_w &= w(t_d) + \hat{\gamma}(t_w)(t_w - t_d) + Ord(\delta) \\
&\text{ただし，} \hat{\gamma}(t_d) = \hat{\gamma}(t_w) \text{ かつ } t_d < t_w \qquad (12)
\end{aligned}
$$

となる (図 5 の斜線部)．一方，γ 図上で点 B(γ, t_w) にいる人のコストは，この人が定時着者になることより，

$$p/c_w = w(t_w) \qquad (13)$$

となる．この両者のコストは，コストの連続性を考えると，$Ord(\delta)$ の差しかないはずなので，結局，

$$
\begin{aligned}
w(t_w) &= w(t_d) + \hat{\gamma}(t_w)(t_w - t_d) \\
&\text{ただし，} \hat{\gamma}(t_d) = \hat{\gamma}(t_w) \text{ かつ } t_d < t_w \qquad (14)
\end{aligned}
$$

となる．この $w(t_w)$ は図 5 の斜線部の面積で表される．

以上により，利用者の需要の特性 (すなわち $\rho(\gamma, t_w)$) と容量 μ より，$\hat{\gamma}$ を決定し，それを用いて，$w(t_d)$，すなわち，渋滞の状況を決定する方法が分かったことになる．

3. 個人差が混雑料金に与える影響

混雑料金について議論するには，式 (2) に料金の項を足す必要がある．すなわち，

$$p = c_w w(t_d) + c_s(t_w - t_d) + \chi(t_d) \qquad (15)$$

となる．いま，$\chi(t_d)$ は t_d にボトルネックを出る人に課される料金である．ここで，

$$w^*(t_d, c_w) \equiv w(t_d) + c_w^{-1}\chi(t_d) \qquad (16)$$

と定義すると，

$$p = c_w w^*(t_d, c_w) + c_s(t_w - t_d) \qquad (17)$$

とでき，式 (2) と同じ形となる．もし全ての人が同じ c_w を持っているのであれば，$w^*(t_d, c_w)$ は全利用者に共通の値 $w^*(t_d)$ となるので，これはすでに説明した方法で解くことができる．

c_wが個人によって異なる場合には，各c_wごとに，$w^*(t_d, c_w)$をすでに説明した方法で解けばよいのだが，ここで注意しなくてはならないのは，「それぞれのc_wをもつグループは，ある時間内の道路容量を分けあって利用するが，その配分比は時間に依存して変化し得る」点である．それゆえ，$w^*(t_d, c_w)$を知るために必要な各c_wのグループの境界線$\hat{\gamma}(t_w, c_w)$を決めるには，各時刻においての容量配分比をまず知らなくてはならない．容量配分を決定する条件は，待ち時間$w(t_d)$は全てのグループで共通であることから，式(16)より得られる条件

$$w^*(t_d, c_{w1}) - w^*(t_d, c_{w2}) = \left\{ c_{w1}^{-1} - c_{w2}^{-1} \right\} \chi(t_d) \quad (18)$$

である．

そして，条件(18)が満たされるような$w^*(t_d, c_w)$になるように，各時間の容量配分比を決定することが出来れば，$w(t_d)$を導出することが出来ることになる．

この計算は非常に難しくなるが，c_wが2種類しか存在しないとすると，数値計算により解くことが可能である．

今後，いろいろな場合について，混雑料金の効果などについて解析して行く予定である．

3 付録(補題の証明)

[補題1] t_wの等しいある2人の旅行者1,2を考える．この2人のコストは，

$$\begin{aligned} p_1/c_{w1} &= w(t_{d1}) + \gamma_1(t_w - t_{d1}) \\ p_2/c_{w2} &= w(t_{d2}) + \gamma_2(t_w - t_{d2}) \end{aligned} \quad (19)$$

である．ここで，2人の行列上での位置，すなわちt_dを入れ替えると，

$$\begin{aligned} p_1^*/c_{w1} &= w(t_{d2}) + \gamma_1(t_w - t_{d2}) \\ p_2^*/c_{w2} &= w(t_{d1}) + \gamma_2(t_w - t_{d1}) \end{aligned} \quad (20)$$

いま，系が利用者均衡であることを考えれば，
$p_1^* > p_1, p^*2 > p_2$なので，

$$\begin{aligned} (p_1^* - p_1)/c_{w1} &= w(t_{d2}) - w(t_{d1}) + \gamma_1(t_{d1} - t_{d2}) \geq 0 \\ (p_2^* - p_2)/c_{w2} &= w(t_{d1}) - w(t_{d2}) + \gamma_2(t_{d2} - t_{d1}) \geq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

であり，この両辺を足して$(\gamma_1 - \gamma_2)(t_{d1} - t_{d2}) \geq 0$．

以上により，$\gamma_1 > \gamma_2$ならば，$t_{d1} \geq t_{d2}$である．これにより，(γ, t_w)にいる定時着者のうち，もっとも小さいγを$\hat{\gamma}(t_w)$とすると，

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(t_w) &< \gamma \text{ の人は，} t_d < t_w \text{ (早着者)} \\ \hat{\gamma}(t_w) &\geq \gamma \text{ の人は，} t_d = t_w \text{ (定時着者)} \end{aligned} \quad (22)$$

とできる（証明終）．

[補題2] 補題1より，早着者のt_dは，t_wによらないので，$\delta \to +0$として，$(\gamma, t_w) = (\hat{\gamma}(t_{w0}), t_{w0}+\delta)$にいる早着者のコストと，$(\hat{\gamma}(t_{w0}), t_{w0})$にいる定時着者のコストを比較する．これらはそれぞれ，

$$\begin{aligned} p_e/c_w &= w(t_d) + \hat{\gamma}(t_{w0})(t_{w0} + \delta - t_d) \quad (23) \\ p_o/c_w &= w(t_{w0}) \quad (24) \end{aligned}$$

となり，コストの連続性を考えると，$\delta \to +0$では，$p_e = p_o$，つまり，

$$w(t_d) + \hat{\gamma}(t_{w0})(t_{w0} - t_d) = w(t_{w0}) \quad (25)$$

となる．これが等しくなるのは，$t_{w0} = t_d$であり，$(\hat{\gamma}(t_{w0}), t_{w0})$の人は定時着者であり，早着者ではないので，これ以外の解はない．

以上により，$\hat{\gamma}(t_d) = \hat{\gamma}(t_{w0}) = \gamma$(証明終)

参考文献

[1] 桑原雅夫: 道路交通における出発時刻選択に関する研究解説, 土木学会論文集,No.604/IV-41,pp73-84, 土木学会,1998.1

[2]Newell G.F.: The Morning Commute for Non-Identical Travelers, *Transportation Science*, Vol.21, No.2, pp.74- 88, 1985.