【土木計画学研究・講演集 No.22(2) 1999年10月】

不確実性下における最適更新ルール*

THE OPTIMAL REPLACEMENT RULES UNDER DEMAND UNCERTAINTY *

栗野盛光**・渡辺晴彦*** 小林潔司****
by Morimitsu KURINO**, Haruhiko WATANABE*** and Kiyoshi KOBAYASHI****

1. はじめに

戦後50年以上が経過し、この間に整備された社会資本の一部では、物理的な機能水準（以下、機能水準）が低下し、補修あるいは更新を必要とする状況が生じている。機能水準の低下は施設利用や自然現象に起因するが、その復元を行う場合には「どのようなタイミングで実施するか」あるいは、「どのような水準の更新投資を行うべきか」が問題となる。

従来から、補修・更新のタイミングについての研究が行われているが、その多くは機能水準の低下を確定的な変化過程として記述している。機能水準の変動が小さく、補修・更新の評価関数に対する影響が無視しうるか、モニタリングが常時行われ、随時補修・更新の判断を行えば良い場合はそのような扱いで十分である。しかし、施設需要の変動や自然現象という不確実性に基づく予測不可能性を前提とすれば、現時点での機能水準や過去の累積需要などから将来の機能水準の変動傾向しか知り得ない状況における更新のタイミングと水準について議論する必要がある。

本研究では、機能水準に影響を及ぼす施設需要に不確実な変動が生じるような社会資本の最適更新戦略について考察する。特に、刻々と変化する社会資本の機能水準と施設に対する需要量の観測値に基づいて、更新投資のタイミングと水準を適応的に決定するような更新投資ルールを設計する問題をとりあげる。

*キーワーズ：公共事業評価, 地域計画
**学生員 工修 京都大学大学院工学研究科土木工学専攻
（〒606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL・FAX 075-753-5073）
***正会員 工博 （株）日水コン環境事業部（〒532-0004 大阪市淀川区西宮原2-1-3,SORA新大阪21）
****正員 工博 京都大学大学院工学研究科土木工学専攻
（〒606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL・FAX 075-753-5071）

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 従来の研究概要

最適更新問題に関しては、オペレーションズ・リサーチや最適制御の分野において最適取り替え問題としてすでに確立した研究分野となっている[1)]。特に、施設や機械の物理的機能が確定的プロセスに従って劣化していくような最適更新投資に関しては種々の研究が蓄積されている。土木計画の分野においても、公共施設の最適維持補修問題に関して研究の蓄積がなされてきた。これらの研究では、機能水準の劣化に関する指標を検討したもの[2)]や機能水準を確定的に扱い補修・更新費用の最小化や工事量の平準化を行う研究[3) 4)]がある。さらに施設需要との関連を定型化した研究[5) 6)]があるが、施設需要は確定的な扱いとなっている。

(2) 施設需要の不確実性

施設需要がある確定的な需要量と、その時々における確率的な変動成分により構成されていると考える。いま、ある期間の施設需要が偶然的な理由により、確定的な水準より低いレベルに陥ったとすると、それ以降のすべての時点における累積需要は一律に減少することになる。すなわち、ある期における施設需要の一時的な変化は、それ以降の累積需要の変化として記憶され、より遠い将来時点における累積需要ほど、より多くの不確実性に直面することになる。このように施設需要に不確実性が存在する場合、施設管理者が管理する累積需要は過去の偶然的な需要変動に対する経路依存性を持つこととなる。

(3) 更新投資ルール

施設の機能水準は時間が進むにつれて劣化が進む。その劣化過程は施設の累積需要や時間的な自然的劣化に支配される。いま、施設が劣化すればする

ほど、それを利用する顧客が負担する利用者費用が増加すると考えよう。施設管理者は利用者費用と施設の更新投資費用の総期待費用の現在価値を最小にするように更新投資のタイミングを決定すると考える。施設の更新投資費用は、更新投資を行う時点での施設の機能水準に依存する。機能水準が劣化するほど更新投資費用は大きくなる。したがって、施設の更新投資を実施する最適な機能水準z^*が存在すると考えられる。施設需要に不確実な変動がある場合、将来の累積需要の動向は本質的に不確実である。したがって、事前に次の更新投資の最適なタイミングを計画しておくことはできない。施設管理者は施設需要を支配するパラメータを把握しつつ、機能水準をモニタリングしながら、最新の情報に基づいて「すぐに更新投資を実施すべきか。実施するならばどの程度の水準か」、あるいは「更新投資を見送るか」を決定することとなる。

3. 基本モデルの定式化

(1) モデル化の前提条件

施設管理者は、初期時点から無限に続く時間軸上で土木施設の機能水準と需要水準を観察しながら、必要に応じて施設の物理的機能を回復するために更新投資を行う。更新投資により施設の機能水準はある最適な水準にまで回復される。ここでは、施設機能が劣化すれば利用者費用が増大するようなタイプの社会資本を考える。このような社会資本の例としては、例えば道路等の交通施設が該当しよう。施設の機能水準は施設の需要に影響を及ぼさないと仮定する。更新投資は固定費用と更新前の機能水準に応じて変化する変動費用により構成される。施設管理者は更新費用と利用者費用で構成される期待費用の現在価値の総和を最小にするように、更新投資のタイミングを決定すると考える。

(2) モデル化

施設の更新投資が時刻$\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_i < \cdots$に実施される場合の施設需要の変化過程を定式化しよう。施設の劣化は更新投資後の累積需要の影響を受けるため、累積需要を更新投資を行った時点を初期点として逐次定義し直す。施設の累積需要は確率過程

$$ds(t) = \beta dt + \sigma dW_1(t) - \sum_{i\geq 1} s(\theta_i^-)\iota(t-\theta_i) \quad (1a)$$

$$s(0) = s_0 \quad (1b)$$

に従って推移すると考える。ここで、右辺第1項はトレンド項、第2項は拡散項である。また、ιはディラックの測度であり、$t=\theta_i$の時にのみ確率測度1を、それ以外の時は確率測度0を与える。$s(\theta_i^-)$は更新投資の直前の累積需要である。よって、更新投資が行われない時は施設需要は伊藤の確率過程に従う。

次に、施設の機能水準の更新過程をモデル化しよう。更新投資が実施されない時は、施設の機能水準は顧客の施設利用と自然的減耗により低下していくと考える。更新投資を時刻θ_iに実施する毎に、施設の機能水準がξ_iだけ改善されると考える。この場合、施設の機能水準は以下の確率過程に従って推移する。

$$\begin{aligned} dz(t) = & -\rho z(t)ds(t) - \delta z(t)dt - \gamma z(t)dW_2(t) \\ & + \sum_{i\geq 1}\xi_i\iota(t-\theta_i) \end{aligned} \quad (2a)$$

$$z(0) = z_0 \quad (2b)$$

以上の確率微分方程式で表される更新投資過程では、更新投資によりインパルス時間$0 \leq \theta_1 < \cdots < \theta_i < \cdots$においてシステムの状態がジャンプするインパルス制御過程となっている。すなわち、制御変数はインパルス時間θ_iとインパルスの大きさξ_iからなる。点列$\{(\theta_i,\xi_i)\}_{i>0}$をインパルス制御(impulse control)と呼ぶ。

次に最適更新問題を定式化しよう。管理主体は総費用を最小化するように施設の維持管理を行う。総費用は施設利用者費用と更新投資費用で構成される。利用者1人当たりの施設利用者費用を施設の機能水準zの関数$c(z)$で表し、$dc(z)/dz \leq 0, d^2c(z)/dz^2 \geq 0$を満足するとする。一方、機能水準が$z$である施設に対して更新投資により機能水準を$\xi$だけ改善するために必要な費用を$f(z,\xi)$で表そう。ただし、更新投資費用関数は、$\partial f(z,\xi)/\partial z<0$, $\partial^2 f(z,\xi)/\partial z^2>0$, $\partial f(z,\xi)/\partial\xi>0$, $\partial^2 f(z,\xi)/\partial\xi^2>0$, $\partial^2 f(z,\xi)/\partial z\partial\xi<0$を満たす。また、更新投資には固定費用$f(z,0)=\kappa>0$を要するものとする。いま、管理主体は現在価値に割り引いた期待総費用の最小化を試みる。すなわち、管理主体が最小化を試みる汎関数を

$$J(V) = E\left[\int_0^\infty c(z(t))\beta\exp(-\alpha t)dt\right.$$

$$+\sum_i f(z(\theta_i),\xi_i)\exp(-\alpha\theta_i)\Big] \quad (3)$$

と定義する。ただし、$V=\{(\theta_i,\xi_i)|\theta_i\geq 0, i>1\}$はインパルス制御変数を表す。この時、施設管理者が解くべき問題(PO)は

$$\inf_V\{J(V)\} \quad \text{subject to (1a),(1b),(2a),(2b)} \quad (4)$$

と表現される。この問題は通常の最適制御問題とは異なり、離散的な時刻のみに瞬間的な制御を実施する最適インパルス制御問題となっている。

4. 最適更新投資ルールの性質

本研究で定式化した最適インパルス制御問題を通常の最大値原理を用いて解こうとすれば、ほとんど、すべてのtにおいてハミルトニアンが制御関数に関して微分不可能になるという特性がある。このような特性を有する最適インパルス制御問題に対しては準変分不等式（Quasi-Variational Inequalities）を用いた解法[8)]が有効である。

(1) 最適インパルス制御

t期に施設の機能水準が$z(t)=z$にあるとしよう。この時、最適値関数$\Phi(z)$は

$$\Phi(z) = \inf_{V(t)} E\Big[\int_t^\infty c(z(u))\beta\exp\{-\alpha(u-t)\}du + \sum_i f(z(\theta_i),\xi_i)\exp\{-\alpha(\theta_i-t)\}\Big] \quad (5)$$

と定式化できる。更新投資問題を最適インパルス制御問題として定式化した場合、重要な意思決定問題は、その時点における施設の機能水準$z(t)$に関する情報の下で、「いま、すぐに更新投資を実施すべきか。実施する場合、投資水準をどの程度実施すべきか」、あるいは「更新投資を将来に見送るべきか」を決定する問題として定式化できる。

a) **更新投資を行う場合**

時刻tに更新投資を行った場合、施設の機能水準はzから$z+\xi$にジャンプする。更新投資後に、将来時点にわたって最適インパルス制御が実施されるとしよう。この時、更新投資がもたらす総期待費用は$f(z,\xi)+\Phi(z+\xi)$と表せる。したがって、時刻tに更新投資を実施した場合、最適な投資水準ξ^*は

$$\xi^* = \arg\inf_\xi\{f(z,\xi)+\Phi(z+\xi)\} \quad (6)$$

となる。また、最適値関数の最適性の原理より、一般的に

$$\Phi(z)-\inf_\xi\{f(z,\xi)+\Phi(z+\xi)\}\leq 0 \quad (7)$$

が成立する。最適更新投資が実施される場合にのみ式(7)が等号で成立する。

b) **更新投資を行わない場合**

時刻tにおいて更新投資を見送り、微小区間$[t,t+dt]$の間、更新投資を行わなかったと考えよう。この場合に得られる時刻tで評価した総期待費用$\Phi^\circ(z)$は

$$\Phi^\circ(z) = E\Big[\int_t^{t+dt} c(z(u))\beta\exp\{-\alpha(u-t)\}du + \exp(-\alpha dt)\Phi(z(t+dt))\Big] \quad (8)$$

で表される。最適値関数$\Phi^\circ(z)$が時刻tにおける総期待費用の最小値を表していることより

$$\Phi(z)\leq\Phi^\circ(z) \quad (9)$$

が成立する。時刻tにおいて更新投資を行わないことが最適である場合には、式(9)が等号で成立する。

(2) 準変分不等式

不等式(7),(9)のいずれか一方のみが常に等号で成立する戦略が最適更新投資戦略となる。このような更新投資戦略の最適条件を準変分不等式を用いて定式化しよう。式(8)の右辺をdtに関してTaylor展開し伊藤の公式を用いると、式(9)は次式で表される。

$$\Phi(z)\leq c(z)\beta dt+\exp(-\alpha dt)\Big[\Phi(z)-\{\rho\beta+\delta\}\times z(t)\frac{d\Phi}{dz}dt+\frac{1}{2}(\rho^2\sigma^2+\gamma^2)z^2\frac{d^2\Phi}{dz^2}\Big]+o(dt) \quad (10)$$

両辺をdtで割り、$\lim_{dt\to 0}$の極限をとると式(10)は

$$\Psi\Phi+c(z)\beta\geq 0 \quad (11)$$

となる。ここで、Ψは微分演算子であり、

$$\Psi=-(\rho\beta+\delta)z\frac{d}{dz}+\frac{1}{2}(\rho^2\sigma^2+\gamma^2)z^2\frac{d^2}{dz^2}-\alpha \quad (12)$$

と定義される。したがって、更新投資戦略の最適性条件は準変分不等式

$$\min\{\Psi\Phi+c(z)\beta, \Xi\Phi-\Phi\}=0 \quad (13)$$

により定義できる。ここに、

$$\Xi\Phi=\inf_\xi\{f(z,\xi)+\Phi(z+\xi)\} \quad (14)$$

である。最適更新戦略は準変分不等式(13)を満足するような最適値関数Φを求める問題に帰着する。

最適更新ルールを考えよう。現在の施設の機能水準が$\hat{z}$にあることが観察されたとして、「更新投資を行うべきか否か。実施する場合どの程度の水準か」を決定するルールを考える。そのために継続集合$\mathcal{C}$

$$\mathcal{C}=\{z|\Phi(z)<\inf_\xi\{f(z,\xi)+\Phi(z+\xi)\}\} \quad (15)$$

を定義する。これを用いて更新ルールは

$$\Im=\begin{cases}\xi^*\text{の水準の更新投資を実施する} & \hat{z}\notin\mathcal{C}\\ \text{更新投資を見送る} & \hat{z}\in\mathcal{C}\end{cases}$$

で決定される。

5. 準変分不等式の解法

(1) 求解の方針

機能水準zが継続集合Cの内部にある場合、準変分不等式(13)において、

$$\Psi\Phi(z) + c(z)\beta = 0 \tag{16}$$

が成立する。式(16)は独立変数をzとする2階の非斉次常微分方程式と考えることができる。式(16)の解を$\Phi^*(z)$と表そう。継続集合Cの境界∂Cにおいて

$$\Phi^*(z^*) = \Xi\Phi^*(z^*) \tag{17}$$

が成立する。更新投資後の機能水準$z^*+\xi^*$をZ^*と表す。最適値関数のSmooth-pastingの条件[9]より、

$$\frac{d\Phi(z^*)}{dz} = \frac{\partial f(z^*,\xi^*)}{\partial z} - \frac{\partial f(z^*,\xi^*)}{\partial \xi} \tag{18}$$

$$\frac{d\Phi(Z^*)}{dz} = -\frac{\partial f(z^*,\xi^*)}{\partial \xi} \tag{19}$$

が成立しなければならない。すなわち、常微分方程式(16)を境界条件(17),(18),(19)の下で解くことにより、最適値関数$\Phi(z)$が求まれば境界条件(17)を満足するような(z^*, Z^*)を求めることにより、更新投資ルール$\Im$を容易に導出できる。

(2) (z^*, Z^*)の導出

利用者費用関数と更新費用関数を

$$c(z) = a_1 z^{a_2}, \quad a_1 > 0, a_2 < 0 \tag{20}$$

$$f(z,\xi) = b_1\xi^{b_2} + \kappa, \quad b_1 > 0, b_2 < 0, \kappa > 0 \tag{21}$$

と特定化する。微分方程式(16)の一般解は

$$\Phi(z) = A_1 z^{\eta_1} + A_2 z^{\eta_2} + K z^{a_2}, \quad A_2 = 0 \tag{22}$$

と表すことができる。ここで、A_2は未知のパラメータである。また、$\eta_1 < 0, \eta_2 > 1$は方程式

$$\frac{1}{2}(\rho^2\sigma^2 + \gamma^2)\eta(\eta-1) - (\rho\beta+\delta)\eta - \alpha = 0 \tag{23}$$

の2実根である。また、Kは

$$K = \frac{\beta a_1}{\alpha + (\rho\beta+\delta)a_2 - \frac{1}{2}(\rho^2\sigma^2+\gamma^2)a_2(a_2-1)}$$

である。よって、境界条件(17),(18),(19)よりz^*, Z^*, A_1は連立非線形方程式

$$A_1(z^*)^{\eta_1} + K(z^*)^{a_2} = A_1(Z^*)^{\eta_1} + K(Z^*)^{a_2} + b_1(Z^*-z^*)^{b_2} + \kappa \tag{24}$$

$$A_1\eta_1(z^*)^{\eta_1-1} + Ka_2(z^*)^{a_2-1} = -b_1b_2(Z^*-z^*)^{b_2-1} \tag{25}$$

$$A_1\eta_1(Z^*)^{\eta_1-1} + Ka_2(Z^*)^{a_2-1} = -b_1b_2(Z^*-z^*)^{b_2-1} \tag{26}$$

の解である。

以上の解の導出により、それぞれの環境下での最適な更新ルール$\Im$を求めることができる。土木施設の置かれている環境は多様に異なり、その環境により(z^*, Z^*)が決定される。施設の劣化メカニズム(2a)を一定と考えよう。この時、更新投資のタイミングと規模(z^*, Z^*)は需要の変動過程を規定する確定的需要の水準βとその時々の需要の分散σに依存して決定される。需要のパラメータ(β,σ)と(z^*, Z^*)の関係が予め計算されていれば、施設が置かれている需要状態のデータと施設の劣化水準に関する観測情報に基づいて容易に更新投資のタイミングと規模を知ることが可能となる。例えば、ある施設の水準zと需要の状態(β,σ)の観測情報が得られたと考えよう。水準zがz^*に到達している場合、機能水準をZ^*まで回復するように更新投資を行う必要がある。一方、水準zがz^*より大きければ更新投資を見送ることとなる。

6. おわりに

本研究では、社会資本の更新に関して、施設需要の不確実性と機能水準の不確実性を前提とした場合の最適更新ルールの導出を行った。今後の課題としては、ケーススタディを通した実証的な分析と機能水準の低下が施設需要に影響を及ぼす場合についての検討が挙げられる。

参考文献

1) 例えば、Heyman, D.P. and Sobel M.J.(eds.): *Stochastic Models*, Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 2, North-Holland, 1990.
2) 深井俊英:道路施設の補修と取替の判定に関するシステム的考察, 土木計画学研究講演集,No.5,pp.27-32,1982.
3) 内田弘, 召田紀雄:地方道における長期補修計画の立案, 土木学会論文集,No.597,pp.21-31,1998.
4) 三和雅史:軌道保守施策の長期的最適化法, 土木計画学研究講演集,No.21(2),pp.357-360,1998.
5) 堤昌文, 樗木武:道路の維持管理に関する計画学的考察, 土木計画学研究講演集,No.18(2),pp.405-408,1995.
6) 黒田勝彦, 内田敬:土木構造物の補修・更新モデル, 土木計画学研究講演集,No.11,pp.117-124,1988
7) Sulem, A: Quasi-Variational Inequalities and Impulse Control Problems, in: Sheshinski, E. and Weiss Y., (eds.): *Optimal Pricing, Inflation, and the Cost of Price Adjustment*, The MIT Press, 1993.
8) Bensoussan, A. and Lions, J.L.: *Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles*, Dunod, 1982.
9) Dixit, A: *The Art of Smooth Pasting*, Harwood academic pulishers, 1993