

系統信号路線における衝撃波伝播現象の再現と $k-v$ 式に関する一考察*

Simulation of Shock Wave Propagation along Street with Coordinated
Signals and a Consideration on $k-v$ Relationships

久井 守**, 田村洋一***, 安江 進****

by Mamoru HISAI, Youichi TAMURA and Shin YASUE

1. はじめに

本研究では、系統信号路線の各交差点で発生する衝撃波の伝播現象を波動理論に基づいた数値計算によって再現する。衝撃波の伝播現象はコンピュータ画面の時間距離図上に再現し、時間の経過に従ってどのように変化するかを視覚化する。衝撃波の伝播現象を再現する過程で、交通密度の空間分布の時間的变化も同時に求めることができる。衝撃波はStephanopoulos らの数学モデルに基づいた数値計算によって画面上に再現するが、その数学モデルでは、 $k-v$ 式を仮定することが必要になる。この $k-v$ 式としては以前から多くの式が提案されているが、仮定する $k-v$ 式によっては衝撃波の伝播現象がかなり異なることとなるので、衝撃波の再現性と $k-v$ 式の関係についても若干の考察を行った。

交通流モデルを用いて過飽和時の系統制御を検討する場合には、波動モデルが重要な交通流モデルの一つと考えられる。本研究は、そのような過飽和時の系統制御を検討するモデルを構築することを最終目標とするものである。

2. 過去の研究と本研究の特徴

波動理論で系統信号路線の衝撃波伝播解析を行った多くの研究の中に、筆者らの研究がある^{1)~3)}。

その研究は次のようなものであった。

- ① $k-v$ 式としては Greenshields の 1 次式を仮定した。
- ② 衝撃波の軌跡を解析的に求めた。
- ③ 波動軌跡図は 1 リンクごとに求めてコンピュータ画面に表示した。

*キーワード：交通流，交通制御，波動理論

**正会員，工博，山口大学工学部知能情報システム工学科

〒755-8611 宇部市常盤台 2-16-1

TEL: 0836-35-9485, FAX: 0836-35-9485

***正会員，工博，山口大学工学部社会建設工学科

****学生会員，山口大学大学院理工学研究科

④隣接リンクに伝播する衝撃波は記憶しておいて引き継ぐ必要があった。

⑤対象路線は非飽和または過飽和のいずれであるかを判別してそれぞれ別個に計算した。

⑥交通量条件は一定とし最終の定常状態の波動軌跡図のみを求めた。

それに対して本研究の特徴は次のとおりである。

① $k-v$ 式としては任意に与えることができる。

② 衝撃波の軌跡は数値的に求める。

③ 波動軌跡図は対象路線全体を同時に求めてコンピュータ画面に表示する。

④隣接リンクに伝播し再度戻ってくるというような衝撃波を扱うことができる。

⑤対象路線に非飽和リンクと過飽和リンクが混在する場合も扱うことができる。

⑥交通量変化と信号時間の変更を扱うことができる。

3. Stephanopoulos らの数学モデル⁴⁾

Stephanopoulos らは衝撃波の数学モデルを導いた。そのためには、交通量と交通密度を時間と距離に関連づけることが必要であるとして、次の連続方程式から議論を展開している。

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

ここに、 x は距離、 t は時間である。また交通量 q 、交通密度 k および速度 v の間には、交通流の基本式 $q = kv$ が成り立つ。いま、速度は交通量のみの関数 $v = f(k)$ とすると、連続方程式は次のように変形される。

$$\left[f(k) + k \frac{df}{dk} \right] \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

ここで注意すべきことは、 $f(k)$ は任意の関数でよいということと、一般性をもたせるのに特別の仮定は必要ないということである。

いま、交通密度 k は x と t の関数とし、また x と t はそれぞれ媒介変数 s の関数と考えると、合成関数の導関数は次のようになる。

$$\frac{dk}{ds} = \frac{\partial k}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial k}{\partial t} \cdot \frac{dt}{ds}$$

ここで

$$\frac{dx}{ds} = f(k) + k \frac{df}{dk} \quad (9)$$

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad (10)$$

とおいて、これを上式に代入すると、式 (8) は次のようになる。

$$\frac{dk}{ds} = \left[f(k) + k \frac{df}{dk} \right] \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

式 (11) の意味は、式 (9) および式 (10) の解、すなわち次式で表される曲線上で交通密度は一定になるということである。

$$\frac{dx}{dt} = f(k) + k \frac{df}{dk} \equiv h(k) \quad (12)$$

この式 (12) は、式 (9) および式 (10) を

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

に代入することによって得られる。また式 (12) の右辺は $k-q$ 曲線の接線勾配 $h(k)$ に等しい。 $h(k)$ は密度 k の微小攪乱波の伝播速度であり

$$h(k) = \frac{dq}{dk} \quad (13)$$

と書くこともできる。式 (12) で表される曲線群は微分方程式の解法で「特性曲線」と呼ばれる。この曲線上では密度は一定であるからこれを等密度線と呼ぶこともできる。また等密度線上では $h(k)$ は一定、すなわち dx/dt は一定であるから、等密度線は「直線」となることがわかる。

時間距離図上の境界条件である時間軸上で交通密度 k が既知とすると、この密度に対応する $h(k)$ の勾配で時間軸から等密度線を多数引くことによって時間距離図上の交通密度分布が得られる。時間距離図上で2本の等密度線が交差する場合は、その交点において二つの密度が存在することになり、これは物理的に不可能である。したがってその交点は交通密度の不連続点であり、そこで衝撃波が発生したというように解釈するのが Stephanopoulos の数学モ

デルである。

4. 衝撃波の伝播軌跡の解法と計算例

Fig. 1 に境界条件である時間軸から発する等密度線を示す。青開始時 t_f で等密度線が放射状に発するのは、Fig. 2 に示すように、有効青時間の仮定を設けているからである。すなわち赤から青への信号の変わり目で交差点の交通量が瞬間的に飽和交通流率になる。いいかえれば交差点上流側では交通流率はジャム密度 k_j から飽和密度 k_c へ、下流側では右左折流入密度 k_2 から飽和密度 k_c への間の任意の密度をとり、したがってそれらの密度に対応した勾配 $h(k)$ の等密度線が存在するからである。

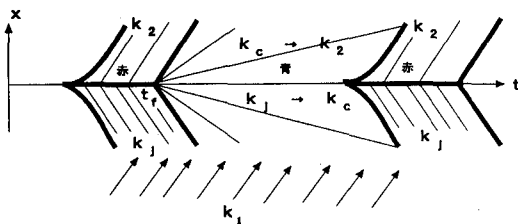


Fig. 1 境界から発する等密度線

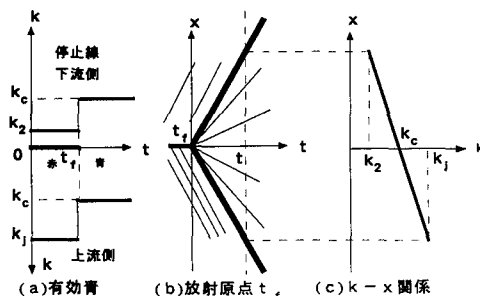


Fig. 2 等密度線の放射

本研究では、Stephanopoulos らの数学モデルに基づいて衝撃波の伝播軌跡を求めた。衝撃波のうち発進波については $k-q$ 曲線の密度 k_j における接線勾配から伝播速度を求めることができる。停止波その他の衝撃波は次のような数値的方法によって求めた。

まず対象路線最上流交差点への到着交通量 q_1 とそれに対応する交通密度 k_1 、および交差道路から右左折で流入する交通量 q_2 とそれに対応する交通密度 k_2 は計算条件として与える。また信号の変わり目で発生する衝撃波を用意しておく。

計算は時刻 $t = 0$ から始める。時刻 t における衝撃波の位置 x を表す点 (t, x) の上下流の交通密度 k_1 および k_2 を次式の等密度線から求める。

$$x = h(k)(t - t_f) + L \quad (14)$$

ここに t_f は等密度線の放射時刻(青開始時刻), L は放射位置(交差点位置)である。求めた k に対応する速度 v を $k-v$ 式から求める。その k と v を次の衝撃波の伝播速度の式に代入する。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k_1 v_1 - k_2 v_2}{k_1 - k_2} \quad (15)$$

k が explicit に求められない場合は, Newton 法で数値的に求める。また密度一定の領域ではその密度を用いる。式 (15) を数値的に解いて Δt 秒後の衝撃波の位置 x を求める。この計算手順を Δt 秒ごとにくり返す。このようにして求めた波動軌跡図の例を Fig. 3, Fig. 4 および Fig. 5 に示す。これらの図から $k-v$ 式の仮定が異なると波動軌跡図がかなり異なったものになることがわかる。Fig. 6 には Greenshields の式を仮定した場合の交通密度の時間空間分布の例を示す。

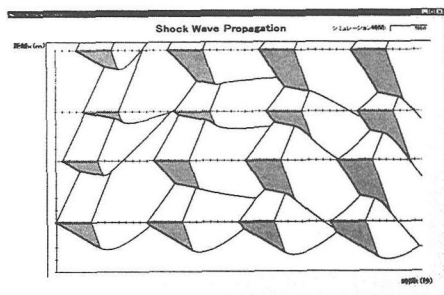


Fig. 3 Greenshields の式を仮定した波動軌跡図

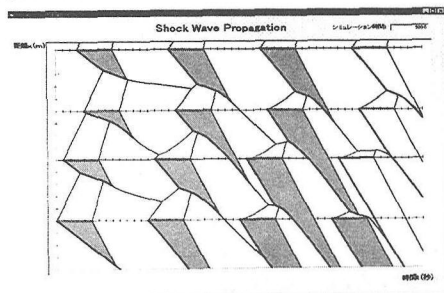


Fig. 4 Greenberg の式を仮定した波動軌跡図

5. $k-v$ 式の評価

前節では用いた $k-v$ 式によって波動軌跡図が

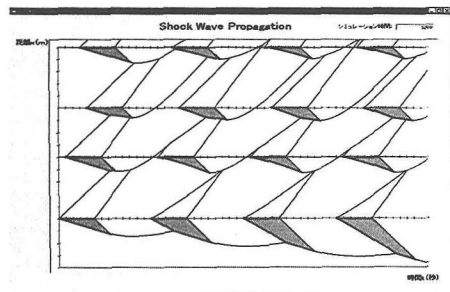


Fig. 5 Drew の式を仮定した場合の波動軌跡図

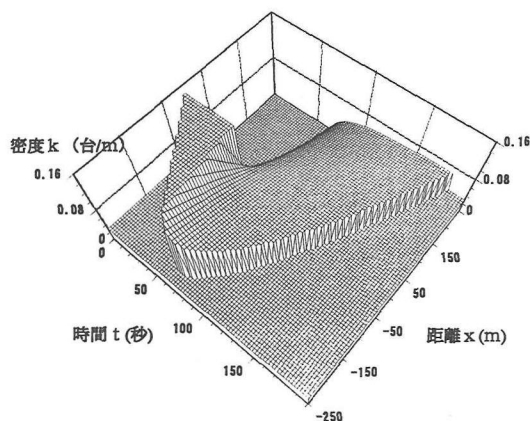


Fig. 6 交通密度の時間的・空間的变化

かなり異なったものになることがわかった。そこで次に示す $k-v$ 式についていくつかの観点から評価し、望ましい $k-v$ 式について検討する⁵⁾。

① Greenshields の式: $v = v_f \left(1 - \frac{k}{k_j}\right)$

② Greenberg の式: $v = v_c \log\left(\frac{k_j}{k}\right)$

③ Underwood の式: $v = v_f e^{-k/k_c}$

④ Drake の式: $v = v_f e^{-\frac{1}{2}(k/k_c)^2}$

⑤ Drew の式: $v = v_f \left[1 - \left(\frac{k}{k_j}\right)^{n+1/2}\right] \quad n > -1$

⑥ Munjal-Pipes の式: $v = v_f \left(1 - \frac{k}{k_j}\right)^n$

(1) 交通密度の距離的变化

青開始後の停止線前後の交通密度の距離的变化について考える。まず $k-v$ 式として Greenshields の式を仮定すると、式 (14) より $t_f = 0$, $L = 0$

の場合の等密度線は次式ようになる。

$$x = v_f \left(1 - \frac{2k}{k_j}\right)t$$

これを任意の時刻 t における距離 x と密度 k の関係に変形すると、Fig. 2(c) に示すように直線となり、また停止線における交通密度は $k_j/2$ となる。

$k-v$ 式として Greenberg の式を仮定すると、同様にして密度は距離の指数関数となり、また停止線における交通密度は k_j/e となる。

しかし、Underwood の式や Drake の式の場合は臨界密度の値によって密度は距離の 2 価関数となり、また Munjal-Pipes の式の場合も n の値によって 2 価関数となるので注意を要する。

(2) 発進波と停止波の速度差

赤信号で 2 回以上停止を強制されるような交通条件について、停止波と発進波の上流への伝播速度を数値例で比較すると、発進波の速度より停止波の速度の方が大きく、したがって発進波が停止波に追いつくことができなくなるという結果になる $k-v$ 式として Underwood の式および Drake の式がある。

(3) $k-q$ 曲線

$k-v$ 式を交通流の基本式 $q = kv$ に代入すると $k-q$ 曲線を求めることができる。この $k-q$ 曲線についてみると、 k_j で交通量が 0 にならない式がある。そのように 0 にならない $k-v$ 式は Underwood の式と Drake の式である。いずれも指数関数であり、発進波の伝播速度が遅くなるような式である。

(4) 発進波の伝播速度と飽和交通流率

発進波の伝播速度は k_j における $k-q$ 曲線の接線勾配で与えられる。また飽和交通流率は $k-q$ 曲線の最大値で与えられる。Fig. 7 のような三角型 $k-q$ 関係を用いれば、これら 2 つの値はかなり自由に設定することができるが、発進波と停止波の伝播速度が等しくなるという問題点がある。

そこで実際に交差点で発進波の伝播速度を調査した。調査は宇部市の国道 190 号江頭交差点、西割交差点および流川交差点で行った。調査は停止線から 90m 地点まで 30m 間隔でポイントを取り、青開始時点から各ポイントの待ち行列車両が発進するまでの時間を観測するという方法で行った。その結果、発進波の伝播速度は 18km/時から 24km/時の範囲で

あった。Greenshields の式を仮定した場合の伝播速度は自由速度に等しくなるということと比較するとかかなり小さい。また飽和交通流率の基本値は 2000pcu/青時であるが、この調査から得られたデータを総合的にみて、調査地点の条件下では飽和交通流率は 1600 台/青時付近にあるのではないかと判断される。

6 つの $k-v$ 式のうち、Drake および Drew 以外の式では発進波の伝播速度と飽和交通流率の両者を同時に満足する式はなさそうである。Drake の式については臨界密度の与え方、Drew の式では n の与え方が問題であり、なお検討の余地がある。

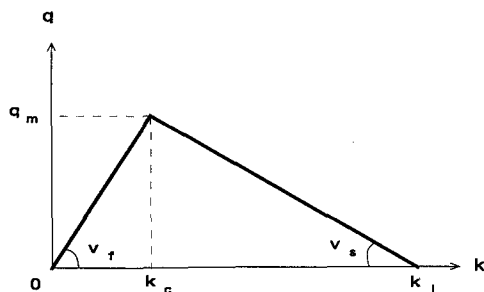


Fig. 7 三角型 $k-q$ 関係

6. むすび

本研究では波動理論によって系統信号路線の衝撃波の伝播軌跡を求めコンピュータ画面の時間距離図上に表示した。これによって波動現象の動的な変化を視覚化することができた。波動伝播軌跡を求めるのに $k-v$ 式が必要であるが、望ましい $k-v$ 式または $k-q$ 式についてはなお検討の余地がある。

本研究は文部省科学研究費補助金の助成を受けて行った研究成果の一部である。記して謝意を表したい。

参考文献

- 1) 久井守, 田村洋一: 複数リンクからなる系統信号システムの待ち行列と衝撃波の動的解析, 土木学会論文集, No.431, pp.87-96, 1991
- 2) 久井守, 佐々木聡: 波動理論による系統信号系の衝撃波伝播解析, 土木計画学研究・講演集, No.15 (1), pp.325-330, 1992
- 3) 久井守, 佐々木聡: 系統信号路線の衝撃波伝播解析, 第13回交通工学研究発表会論文集, pp.45-48, 1993
- 4) G.Stefanopoulos et al: Modelling and Analysis of Traffic Queue Dynamics at Signalized Intersections, Transpn. Res.-A, Vol.13A, No.5, pp.295-307, 1979
- 5) 河上省吾, 松井寛: 交通工学, 森北出版, p.95, 1987