【土木計画学研究・講演集　No.22(1)　1999年10月】

渋滞ネットワークにおける"容量パラドクス"の検出法*

Some Properties of "Capacity Paradox" in General Queuing Networks

赤松 隆**・長江剛志***・高橋 栄行***

by Takashi AKAMATSU, Takeshi NAGAE and Eikou TAKAHASHI

1．はじめに

交通ネットワークの局所的改善（道路の新設，容量増強等）は，ネットワーク全体の利用効率性をかえって低下させることがある．"Braess[4] / Smith[5]のパラドクス" としてよく知られたこの現象の特性は，従来，静的なネットワーク・フローを前提として解析されてきた．しかし，静的枠組では，現実の交通ネットワークの利用効率を考える上で最も影響の大きい渋滞現象を適切に考慮することができない．そのため，渋滞の生起している現実的なネットワークについては，"パラドクス" の基本的な特性－現実に頻繁に起こりうるのか，どのような状況で起こりやすいのか等－が未だ（理論・実証の両面とも）明らかにされていない．

本研究は，渋滞待ち行列を明示的に考慮した動的配分の枠組の下で，この "パラドクス" の特性を明らかにすることを目的とする．より具体的には，1起点・多終点の一般構造のネットワークにおいて動的な利用者均衡配分を仮定した上で，あるリンクの容量の変化が，"パラドクス" を起こすための必要十分条件を導く．次に，その結果をグラフ論的に解釈し，"パラドクス" の生起が（OD 需要によらず）不可避のネットワーク構造が存在しうることを示す．最後に，これらの結果を導く際に用いた "飽和ネットワーク"の仮定を緩めた場合の理論を示す．なお，本稿では，紙面の制約があるため，定理・命題の詳細な証明は省略する．

2．準備－動的均衡配分

本章では，次章以降の準備として，ネットワークの表現，記号の定義，および動的利用者均衡配分の基本的な性質を簡単にまとめておく．

* Keywords: Braess パラドクス，渋滞，容量，動的配分，グラフ理論
** 正会員 工博 豊橋技術科学大学知識情報工学系
(〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1)
*** 学生会員 豊橋技術科学大学知識情報工学専攻

2.1 ネットワークと記号の定義

本研究のモデルは，リンク集合L（要素数 L） ノード集合N（要素数 N），OD ノードペア集合Wから構成される1起点・多終点の交通ネットワーク上で定義される．ノードは1からNの通し番号で区別し，ノードiからjへ向かうリンクを (i, j)と表す．また，リンクを1からLの通し番号で区別する表現も適宜用いる．

ネットワークの構造は，(N-1)×L の既約接続行列$\mathbf{A}$（通常のノード・リンク接続行列の起点に対応する行を削除した行列）によって表現される．また，本稿では，行列 $\mathbf{A}$ を以下に定義する2つの行列$\mathbf{A}_-$ と$\mathbf{A}_+$ に分解した表現を用いる：$\mathbf{A}_-$はAの +1 要素を全て0 にして得られる行列，$\mathbf{A}_+$ は$\mathbf{A}$の -1 要素を全て0 にして得られる行列．

2.2 動的利用者均衡配分

本研究では，リンクの通過･渋滞の表現には，First-In-First-Out 原則と Point Queue 概念に基づいたモデルを採用する．そして，ネットワーク・フローは動的な利用者均衡 (DUE: Dynamic User Equilibrium) 配分によって表現されると仮定する．ここで，DUE 状態とは，どの時刻においても，どの利用者も自分だけが経路を変更しても自分の経験する所要時間を改善できない状態である[1),2)]．

従来の研究[2)]により，FIFO を満たすリンクモデルに基づいた1起点･多終点の DUE 配分は，出発時刻別に分解できることが知られている．そして，出発時刻s毎に分解されたDUE配分は，2種類の変数 (y_{ij}^s, τ_i^s) のみを用いて表現できる：τ_i^s は起点を時刻sに出発した利用者のノードiへの（均衡）最早到着時刻，y_{ij}^s は起点出発時刻sに関する（均衡）リンク交通流率である（i.e. $y_{ij}^s \equiv dF_{ij}(\tau_i^s)/ds$，ここで $F_{ij}(t)$ はリンク (i, j) に時刻 t までに流入する車の累積台数）．なお，起点を時刻s までに出発し終点がdの車の累積台数 $Q_{od}(s)$ （i.e. 起点出発時刻別 OD 需要）は分析対象の全てのs, Wについて与件とする．

3. 飽和ネットワークでの容量パラドクスの検出

本章では，次の２つの条件を満たした“飽和ネットワーク”を対象として，DUE 配分および容量パラドクスの解析を行う：(*a*)全てのリンクのフロー y(s)は正である，(*b*)全てのリンクで渋滞が発生している．条件(*b*)は，一見，非現実的な仮定であるが，これにより，DUE 配分下での容量パラドクスの本質的特性が明確化される．また，この条件を緩めることは比較的容易であり，その場合の解析は，第 4 章で示される．

3.1 飽和ネットワークでの動的均衡配分

本節では，飽和ネットワークにおける DUE 配分の定式化および解の性質を簡潔にまとめておく．

飽和ネットワークでは，全てのリンクが利用されているから，起点を時刻 s に出発する利用者の最短経路選択条件は以下のように表される．

$$\tau_j^s - \tau_i^s = c_{ij}^s \qquad \forall(i,j), \quad (3.1)$$

ここで， c_{ij}^s は起点出発時刻 s の利用者がリンク(i,j)通過に要する時間 i.e. $c_{ij}^s \equiv c_{ij}(\tau_i^s)$．方程式 (3.1) は任意の出発時刻 s について成立するから， s について微分をとって得られる以下の式：

$$\dot{\mathbf{c}}(s) + \mathbf{A}^T\,\dot{\boldsymbol{\tau}}(s) = 0 \qquad \forall s, \qquad (3.2)$$

も成立する．ここで $\dot{\mathbf{c}}(s)$ は要素 dc_{ij}^s/ds をもつ L次元列ベクトル，$\dot{\boldsymbol{\tau}}(s)$ は要素$d\tau_i^s/ds$ をもつ N-1 次元ベクトル．

一方， DUE 状態では，渋滞状態での dc_{ij}^s/ds は y_{ij}^s と τ_i^s の関数として表現できることが知られている[1),2)]：

$$\dot{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{y}(s) - \mathbf{A}_+^T\,\dot{\boldsymbol{\tau}}(s) \quad \forall s \qquad (3.3)$$

ここで $\mathbf{M}$ は a 番目対角要素にリンク a の容量 μ_a をもつ L×L 対角行列， y(s)は要素y_{ij}^s をもつ L 次元列ベクトル．

以上の条件に加え，動的なネットワーク・フローは，各リンクでの FIFO 条件と各ノードでのフロー保存条件を満たす必要がある．これらの条件は，出発時刻別に分解された DUE 配分の特性を利用すると，以下の条件に帰着することが知られている[1),2)]：

$$-\mathbf{A}\,\mathbf{y}(s) = \dot{\mathbf{Q}}(s) \qquad \forall s, \qquad (3.4)$$

ここで $\dot{\mathbf{Q}}(s)$ は要素 dQ_{od}/ds をもつ N-1次元ベクトル．

式 (3.3) を式 (3.2) に代入して整理すると

$$\mathbf{y}(s) = -\mathbf{M}\mathbf{A}_-^T\,\dot{\boldsymbol{\tau}}(s) \qquad \forall s. \qquad (3.5)$$

さらに，これと式 (3.4)を組合せれば， DUE 配分の解 $\dot{\boldsymbol{\tau}}(s)$ は，以下の方程式に支配されていることが判る：

$$\left(\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}_-^T\right)\dot{\boldsymbol{\tau}}(s) = \dot{\mathbf{Q}}(s) \qquad \forall s. \qquad (3.6)$$

方程式 (3.6) は，行列 $\mathbf{V} \equiv \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}_-^T$ の階数が N-1 ならば，DUE 配分の解が一意的に決まることを意味している．一方，この $\mathbf{V}$ の階数は，起点を参照ノードに設定すれば，常に N-1 となる[1)]．従って，飽和ネットワークにおける DUE 配分の解は，以下の式で与えられる：

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}(s) = \mathbf{V}^{-1}\,\dot{\mathbf{Q}}(s). \qquad (3.7)$$

なお，均衡リンクフローパターン y(s) は， 式(3.7) を式(3.5)に代入すれば容易に得られる．

3.2 容量パラドクス生起条件

本研究では，“容量パラドクス”を考察するために，起点出発時刻 $0 \sim T$ の全利用者が費やした所要時間の総和 TC をネットワーク利用効率性を測る指標とする：

$$TC \equiv \int_0^T \mathbf{y}(s)^T\,\mathbf{c}(s)\,ds = \int_0^T \dot{\mathbf{Q}}(s)^T\,(\boldsymbol{\tau}(s) - s\mathbf{1})\,ds.$$

そして，リンク a の容量 μ_aを増加(減少)させても TC が減少（増加）しない現象を“容量パラドクス”と呼ぶ．つまり，容量パラドクスが起こる ⇔ $\partial TC/\partial\mu_a \geq 0$ である．

$\partial TC/\partial\mu_a$ を明示的に求めてみよう． TC の定義から，

$$\frac{\partial TC}{\partial\mu_a} = -\int_0^T \dot{\mathbf{Q}}(s)^T\left(\int_0^s \frac{\partial\dot{\boldsymbol{\tau}}(t)}{\partial\mu_a}\,dt\right)ds. \qquad (3.8)$$

である．従って，$\partial TC/\partial\mu_a$ を導くためには，リンク a の容量に対する $\dot{\boldsymbol{\tau}}(s)$ の感度を知る必要がある．これは，２つのネットワーク容量パターン $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\mu}+\Delta\boldsymbol{\mu}$ の各々に対応する２つの均衡解を前節の (3.7)によって求め，その差の極限をとれば，以下のように得られる：

$$\frac{\partial\dot{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\mu})}{\partial\mu_a} = -\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu})\,\mathbf{A}\,\mathbf{I}_a\mathbf{A}_-^T\,\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu})\,\dot{\mathbf{Q}}(s) \qquad (3.9)$$

ここで $\partial\dot{\boldsymbol{\tau}}(s)/\partial\mu_a$ は要素 $\partial\dot{\tau}_i(s)/\partial\mu_a$ をもつ N-1 次元ベクトル，$\mathbf{I}_a$ は a 番目対角要素が 1 でその他要素は全て 0 の L×L 行列．この感度公式を式 (3.8) に代入すれば，容量パラドクス生起に関する以下の命題が得られる．

命題 1 飽和ネットワークのリンク (i,j)で容量パラドクスが生起するための必要十分条件は，

$$-\int_0^T \sum_k \dot{Q}_{ok}(s)\,(v_{kj}^{-1} - v_{ki}^{-1})\,(\tau_j(s) - \tau_j(0))\,ds \geq 0.$$

3.3 グラフ理論的解釈

以下では，命題１の結果をネットワーク構造と関連付けて理解することを試みる．グラフ理論では，従来から，線形システムの性質を適当なグラフの性質と関連付ける様々な方法が知られている．そこで，有向木を用いたグラフ論的方法 [6] を前節の DUE 条件式に適用すると，以下の補題が得られる．

補題 3.1 飽和ネットワークのノード i での均衡解 $\dot{\tau}_i(s)$ は，$S(i)$と $S(o)$に含まれる有向木上のリンク容量のみを用いて表現しうる：

$$\dot{\tau}_i(s) = \Big(\sum_{T \in S(i)} \prod_{(p,q)\in T} \mu_{pq}\Big) \Big/ \Big(\sum_{T \in S(o)} \prod_{(p,q)\in T} \mu_{pq}\Big) \quad (3.10)$$

ここで，$\Gamma(N,L)$ は各終点 d から起点 o へ向かうリンク（容量 dQ_{od}/ds）を $G(N,L)$に付加して得られるグラフ，$S(i)$はノード i を根とし $\Gamma(N,L)$を張る有向木の集合．

交通ネットワークにおいて意味のある均衡解の性質を導くには，有向木よりも経路の概念を用いた表現の方が有用である．そこで，上の補題における有向木に適当な分解をほどこすと，以下の補題が得られる．

補題 3.2 飽和ネットワークのノード i での均衡解 $\dot{\tau}_i(s)$ は，ノード i と終点間の経路上のリンク容量のみを用いて表現しうる：

$$\dot{\tau}_i(s) = \sum_{k\in N} \alpha_k \sum_{r\in P(i,k)} \prod_{(p,q)\in r} \alpha_{pq}\,, \quad (3.11)$$

ここで，$I(i)$はノード i に流入するリンクの集合，$P(i,k)$はノード i から k への経路の集合，

$$\alpha_k \equiv \dot{Q}_{ok}(s) \Big/ \sum_{(\ell,k)\in I(k)} \mu_{\ell k}\,,\quad \alpha_{pq} \equiv \mu_{pq} \Big/ \sum_{(m,p)\in I(p)} \mu_{mp}\,.$$

この補題と前節の命題１を組み合わせれば，容量パラドクス生起の判定に関する以下の命題が得られる．

命題２ 飽和ネットワークのリンク (i,j)で容量パラドクスが生起するための必要十分条件は，$P(i,k)$ と $P(k,i)$に含まれる経路上のリンク容量のみを用いた以下の条件式で与えられる：

$$\int_0^T (\dot{\lambda}_i(s) - \dot{\lambda}_j(s))(\tau_j(s) - \tau_j(0))\,ds \geq 0 \quad (3.12)$$

ここで $\quad \dot{\lambda}_i(s) \equiv \sum_{k\in N} \alpha_k \sum_{r\in P(k,i)} \prod_{(p,q)\in r} \hat{\alpha}_{pq}\,, \quad (3.13)$

$$\hat{\alpha}_{pq} \equiv \mu_{pq} \Big/ \sum_{(m,q)\in I(q)} \mu_{mq}\,.$$

3.4 容量パラドクスが不可避のネットワーク構造

命題２を応用すると，OD 需要パターン $\mathbf{Q}$，容量パターン $\mathbf{M}$ が不明の場合についても有用な知見が得られる：以下の命題に示されるように，ネットワークの*構造*のみから（i.e. $\mathbf{Q}, \mathbf{M}$ の如何によらず），容量パラドクス生起の有無が判定できる場合がある．

命題３a 次の条件を満たす飽和ネットワークのリンク (i,j)では，容量パラドクスは決して起こらない：(*a*) 各終点 d に対して，終点 d からノード i への経路が存在せず，(*b*) 少なくとも一つの終点 d に対して，終点 d からノード j への経路が存在する．

命題３b 次の条件を満たす飽和ネットワークのリンク (i,j)では，容量パラドクスが必ず起こる：(*a*) 各終点 d に対して，終点 d からノード j への経路は，ノード i を通る経路を除くと，存在せず，(*b*) 少なくとも一つの終点 d に対して，終点 d からノード i への経路が存在する．

図 1a, 1b は，各々，命題 3a, 3b の各条件を満たしたネットワークの簡単な例である（このような構造は，現実のネットワークでも散見されることに注意）．

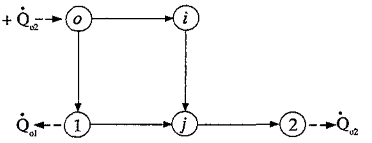

図１a. "パラドクス"が決して起こらないネットワーク

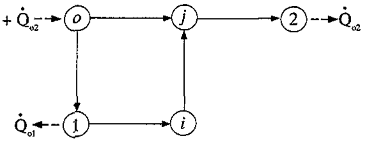

図１b. "パラドクス"が必ず起こるネットワーク

4．理論の拡張

本章では，前章の飽和ネットワークでの理論を拡張し，一部のリンクでのみ渋滞が起こっている場合について，容量パラドクス生起条件を導く．そのために，リンク集合 L を各リンクの状態に応じて，２つの部分集合 L_Q と L_F に分割する：リンク (i,j)に待ち行列が存在するなら $(i,j)\in L_Q$，そうでないなら $(i,j)\in L_F$．

また，この分割に対応し， $\mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{A}$ の各々を以下の様に２つの部分ブロックに分割する：

$$\mathbf{y}(s)=\begin{bmatrix}\mathbf{y}_Q(s)\\ \mathbf{y}_F(s)\end{bmatrix},\dot{\mathbf{c}}(s)=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{c}}_Q(s)\\ \dot{\mathbf{c}}_F(s)\end{bmatrix},\ \mathbf{A}=\lfloor \mathbf{A}_Q \mid \mathbf{A}_F \rfloor.$$

そして，以下の仮定のもとで DUE 配分の解とパラドクスの解析を行う： (a)全てのリンクのフロー $\mathbf{y}(s)$は正である，(b) 分析時間帯中を通じて，L_Q と L_F は与件であり変化しない．本稿では，この条件を満たしたネットワークを “非飽和ネットワーク” と呼ぶ．

4.1 非飽和ネットワークでの動的均衡配分

非飽和ネットワークと飽和ネットワークでのDUE配分の本質的な相違点は，リンクコスト変化率 $\dot{\mathbf{c}}$ とフローの関係式のみである：前者では，非渋滞リンクにおけるリンク所要時間の変化率は常に０である．従って，非飽和ネットワークでのDUE配分の定式化は，前章の式(3.2)と(3.4) を渋滞リンクと非渋滞リンクを明示的に区別した表現に書き換え，条件式 (3.3)を

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{c}}_Q(s)=\mathbf{M}_Q^{-1}\,\mathbf{y}_Q(s)-\mathbf{A}_{Q+}^T\,\dot{\boldsymbol{\tau}}(s)\\ \dot{\mathbf{c}}_F(s)=\mathbf{0}\end{cases} \tag{4.1}$$

と置き換えれば完了である．これらの条件式は，$\mathbf{y}_Q$ を消去すれば，以下の方程式にまとめられ，

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A}_Q\mathbf{M}_Q\mathbf{A}_{Q-}^T & -\mathbf{A}_F\\ \hline \mathbf{A}_F^T & \mathbf{0}\end{array}\right]\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\tau}}(s)\\ \mathbf{y}_F(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{Q}}(s)\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} \tag{4.2}$$

$\mathbf{y}_Q$ は，以下の関係式から求められる：

$$\mathbf{y}_Q(s)=-\mathbf{M}_Q\mathbf{A}_{Q-}^T\,\dot{\boldsymbol{\tau}}(s)\,. \tag{4.3}$$

非飽和ネットワークでの均衡条件式(4.2)の解は，$\mathbf{A}_Q\mathbf{M}_Q\mathbf{A}_{Q-}^T$ の階数が N-1 未満になる場合（例えば，あるノードに流入する全リンクが非渋滞の場合）には，一意に決められない．しかし，これは，非渋滞リンクのフロー $\mathbf{y}_F$ の非一意性を意味しているだけで，$\dot{\boldsymbol{\tau}}$ および渋滞リンクのフロー $\mathbf{y}_Q$ については，一般的に解の一意性を保証できる．

上記の事実は，DUE 状態にある非渋滞リンク (i, j) で成立する関係式 $\dot{\tau}_i=\dot{\tau}_j$ をネットワーク変換として表現することにより，構成的に証明できる．すなわち，$G(N, L)$の各非渋滞リンクの両端点を１つのノードに集約した “縮約ネットワーク” $G(N_R,L_R)$ を構成し，その上で DUE 配分を考える．$G(N_R,L_R)$は，$G(N,L)$の非渋滞リンクが全て削除されているから，飽和ネットワークであり，その上での DUE 配分の解は一意に決まる．さらに，$G(N,L)$上での解 $(\dot{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{y}_Q)$ と $G(N_R,L_R)$上での解 $(\dot{\boldsymbol{\tau}}_R, \mathbf{y}_R)$の間には１対 1 対応がある（証明は省略）．従って，縮約ネットワークの上で DUE 配分を行い，その解に簡単な対応操作を施すだけで，非飽和ネットワークでの解 $(\dot{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{y}_Q)$を一意的に求めることができるのである．

4.2 容量パラドクス生起条件

非飽和ネットワークの DUE 配分では，非渋滞リンクのフロー・パターン $\mathbf{y}_F$ が必ずしも一意に決まらない．しかし，このことは，容量パラドクスの判定には何も問題を引き起こさない．なぜなら，$\partial TC / \partial \mu_a$ は，非渋滞リンクのフローおよび容量とは無関係に値が定まるからである（言いかえると，非渋滞リンクでは，容量パラドクスは決して起こらない）．従って，前節で導入した縮約ネットワークに対して容量パラドクス生起の判定を行えば十分である．さらに，縮約ネットワークは，飽和ネットワークとなっているから，第３章で示された理論をそのまま適用できる．

5．おわりに

本稿では，動的ネットワーク・フローを前提とした上で “容量パラドクス”の生起を判定するための理論を示した．この理論を用いれば，高速道路ランプ制御のような実際的な問題を考察することも可能である．実際，本稿では紙面の制約により省略したが，我々は幾つかの例を検討した．その結果，高速道路のランプ制御がネットワーク利用者全体に対するパレート改善を導く場合が数多く存在することが明らかになった．その具体例については，講演会にて報告したい．

参考文献

1) Akamatsu, T., “A Dynamic Traffic Assignment Paradox”, to appear in *Trnsptn. Res. B* (1999).

2) 赤松隆・桑原雅夫, “渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分”, 土木学会論文集, **IV-23**, 21-30 (1994).

3) Bott, R. et al., “Matrices and Trees” in O. Morgenstern (ed.), *Economic Activity Analysis*, 391-400, John Wiley, 1954.

4) Braess, D., “Uber ein Paradoxen der Verkehrsplaning”, *Unternehmensforschung* **12,** 258-268 (1968).

5) Smith, M.J., “In a Road Network, Increasing Delay Locally Can Reduce Delay Globally”, *Trnsptn. Res.* **12**, 419-422 (1978).

6) Talbot, A., “Topological Analysis for Active Networks”, *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-**13**, 111-112 (1966).