【土木計画学研究・講演集　No.22(1)　1999年10月】

ダイナミカルシステム論による鉄道時差出勤パターンの分析*
Dynamical System Analysis of Railway Commuting Pattern with Staggered Work Hours

吉村　充功[†]・奥村　誠[‡]
By Mitsunori YOSHIMURA and Makoto OKUMURA

1.　はじめに

都市交通問題の解決手段として時差出勤が着目されているが，現状ではこの制度が十分浸透しているとは言えない．これは企業側にとって，時差出勤を導入することは，関連企業との労働時間帯にずれを生じさせることであり，業務活動において効率を低下させるおそれが生じると考えられていることによる．そこで前稿[1)]では，時差出勤施策による鉄道混雑の緩和効果と業務活動の効率の低下の影響のトレードオフを考慮した上で，企業が時差出勤への参加を決定するとした場合の時差出勤施策の実現可能性を分析した．

その結果，2分割始業時刻下では企業の行動パターンを次の3種類に分類することができた．1) 安定均衡解が1つだけ存在し，時差出勤が自動的に進む，2)2つの一斉始業のみが安定均衡解になる，3) 安定均衡解が一斉始業の2つを含め3つ存在し，ある割合の企業の始業時刻を強制的に早めさせることでいずれは自動的に時差出勤が進む．

しかしながら，前稿の中で扱ったこれらのパターンの場合分けは，特定の人口・始業時刻の時差などのもとで数値計算されたものであり，これらのパラメータが変化した場合に，パターンがどのように変化するかは分からない．したがって，本稿ではダイナミカルシステム(力学系)の理論[2) 3)]を参考に，各種のパラメータを変化させた場合に均衡解の個数，安定性がどのように変化するかを分析する．

*Key words：TDM，始業時刻選択，交通行動分析
[†]学生員，広島大学大学院 工学研究科
[‡]正会員，工博，広島大学助教授 工学部建設系 (〒739-8527 東広島市鏡山 1-4-1, TEL&FAX 0824-24-7827)

2.　モデルの定式化とパラメータの考察

本稿で用いるモデルは前稿に準ずるため，ここではモデルの概略を説明するにとどめる．詳細は参考文献[1)]を参照のこと．

(1)　通勤者の効用と鉄道企業の費用

都市内に存在する企業は，2つの時刻のどちらかを始業時刻として選択する．始業時刻が同じ企業は同一の賃金水準 w_k を提示する．通勤者は，始業時刻と賃金水準をもとに，どちらのタイプの企業で従業するかを選択する．

始業時刻 S_k の企業に勤務する通勤者を記号 $k = a, b(> a)$ で表す．出社時刻が t_g，退社時刻が t_r の通勤者の自宅出発時刻は $t_g - \omega$，帰宅時刻は $t_r + \omega$ となるが，その効用関数を次式のように定義する。

$$PW_k(w_k, t_g, t_r) = w_k - R + U_k(t_g) + V_k(t_r) \quad (1)$$
$$U_k(t_g) = -(s(t_g))^\eta - c\{S_b - (t_g - \omega)\} \quad (2)$$
$$V_k(t_r) = -(s(t_r))^\eta - e\{(t_r + \omega) - (S_a + H)\} \quad (3)$$

R は一日あたりの鉄道運賃であり乗車時刻によらず一定である．$U_k(t_g)$ は出勤時の，$V_k(t_r)$ は帰宅時の部分効用を表す．$s(t_g)$ は時刻 t_g に都心に到着する列車の，$s(t_r)$ は時刻 t_r に都心を出発する列車の混雑度で，正数であり $s = 1$ は定員輸送を意味する．$c > 0$ (円／分) は自宅出発時刻の早さに関する，$e > 0$ (円／分) は帰宅時刻の遅さに関するスケジュール費用の勾配である．H (分) は労働時間を表し，始業時刻によらず一定である．

鉄道企業の運行費用は，時点ごとの輸送力 $\alpha(t)$ の増加関数である瞬間的な費用を積み上げたものであると仮定する．出勤時間帯の輸送費用は次のように

なる．

$$TC_g = \int_0^{S_b} \zeta_0(\alpha(t))^{\xi} dt \tag{4}$$

ここで，$\xi > 1$ は費用関数の弾力値であり，ζ_0 は正の定数である．同様にして帰宅時間帯の輸送費用 TC_r も計算できる．

(2) 企業の生産関数と賃金水準

始業時刻が S_k の企業をまとめて1つの集計的企業と考え，各時刻における都市内の従業者数を取り入れた瞬間的生産関数を用いて時間的集積の経済性を表現する．

$$AK_k^{1-\beta} N_k^{\beta} N(t)^{\alpha} \tag{5}$$

ここで K_k は資本，N_k は始業時刻が S_k である従業者数，$N(t)$ はその瞬間に都市で業務を行っている従業者数，$\alpha > 0$ は時間的集積の経済性パラメータ，$0 < \beta < 1$ は労働の限界生産性パラメータ，$A > 0$ は技術水準パラメータである．一日の生産量 $f_k(N_k)$ は，この式を始業時刻から終業時刻まで積分したものとなる．

$$f_k(N_k) = AK_k^{1-\beta} N_k^{\beta} \int_{S_k}^{S_k+H} N(t)^{\alpha} dt \tag{6}$$

生産物の価格は1に基準化されているものとする．企業は資本レント ν と賃金率 w_k を与件として費用を最小化するよう資本量 K_k と従業者数 N_k を決定する．これより，2つのタイプの企業の賃金水準は始業時刻が早い従業者の割合 r を用いて，以下のように表される．

$$w_a = w_0 \left(1 - (1 - r^{\alpha}) \frac{\tau}{H}\right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{7}$$

$$w_b = w_0 \left(1 - (1 - (1 - r)^{\alpha}) \frac{\tau}{H}\right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{8}$$

ただし，$\tau = S_b - S_a$ は始業時刻の時差，$w_0 = \beta A^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{1-\beta}{\nu}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} N^{\frac{\alpha}{\beta}} H^{\frac{1}{\beta}}$ は一斉始業時の賃金水準で，一定値を取る．N は総従業者数である．

(3) 市場均衡と時差出勤の容易さ

まず，すべての従業者が遅い始業時刻 S_b を選択している状態を考え，r の割合の従業者が早い始業時刻 S_a に移ると想定しよう．

表 1: パラメータと時差出勤の容易さの関係

パラメータ	容易になる方向
α, ω_0, τ	大 → 小
$\beta, H, N, c, \eta, \theta, \zeta_0$	小 → 大
ν	関係なし

各従業者は r の割合に応じた厚生水準 PW_i を比較し，$PW_i > PW_k, i \neq k$ となる始業時刻 S_i を選択する．そのため，最終的にはどちらを選択しても厚生水準が変わらない均衡状態に落ち着く．

r が小さいと混雑率が低くなるため，始業時刻が S_a の従業者の出勤，帰宅時の部分効用 $U_a(r), V_a(r)$ は大きくなる．しかし，賃金水準 $w_a(r)$ は時間的集積の経済性の仮定より，r が小さいと低くなる．そのため，r の変化に対して，賃金水準の変化量が小さく，出勤，帰宅時の部分効用の変化量が大きい場合には時差出勤の導入が容易になる．

このことから，各パラメータの値が変化したとき，時差出勤の導入が容易になるかどうかを推測することができる．その結果，表1のようになる．しかし，実際の均衡解の数がどのようになるかは分からない．

3. ダイナミカルシステム分析の考え方

本稿で使用するモデルでは従業者である家計の通勤行動や企業の始業時刻決定行動において効用最大化原理に従うとしている．そのため，その均衡条件は最大値の条件を表す微分方程式系で表現される．

微分方程式系においてパラメータが均衡解の個数に与える影響は，ダイナミカルシステム (力学系) という分野で研究が進んでいる [2) 3)]．ダイナミカルシステムでは，一旦その点に落ち着くとそこから移動しない点を均衡点 (不動点) と呼ぶ．均衡点は，涌きだし点，吸収点，鞍点，リミットサイクルなどに分類される．

システムにパラメータ が含まれるとき，その変化によって均衡点の個数や種類 (位相) が変化し，システムの性質が変化することがある．その変化の仕方を研究したのがダイナミカルシステムの分岐理論で

ある．均衡点の中で個数や安定性が変化する点を分岐点 (特異点) という．また，このように分岐点を境に，定性的様子が変化するとき,「分岐」が起こるという．分岐の形態には，サドルノード分岐，熊手型分岐，ホップ分岐などがある．

本稿でも，パラメータの変化による均衡解の個数を判定するために次のダイナミカルシステムを考える．

$$\dot{r}(t) = PW_a(r,\mu) - PW_b(r,\mu) \equiv g(r,\mu) \qquad (9)$$

ただし，パラメータ集合は

$$\mu = \mu(\alpha, \beta, \nu, w_0, H, \tau, c, e, \eta, \theta, \zeta_0). \qquad (10)$$

式 (9) において，$g(r^*(\mu),\mu) = 0$ となる $r^*(\mu)$ が均衡解となるのは明らかである．

さらに，ダイナミカルシステムでは均衡解の安定性を求めることができる．つまり，パラメータが μ のとき r が均衡解 r^* に収束する (これを安定と呼ぶ) のか，発散する (不安定と呼ぶ) のかが判別できる．g の r^* でのヤコビ行列の固有値が安定性を与える．固有値 $\lambda(\mu)$ は $\lambda(\mu) = g_r \equiv \partial g/\partial r$ で与えられ，パラメータ μ の変化に対し，$\lambda(\mu) < 0$ なら安定，$\lambda(\mu) > 0$ なら不安定である．$\lambda(\mu) = 0$ のときは安定性の交替がおこり，分岐が発生する．

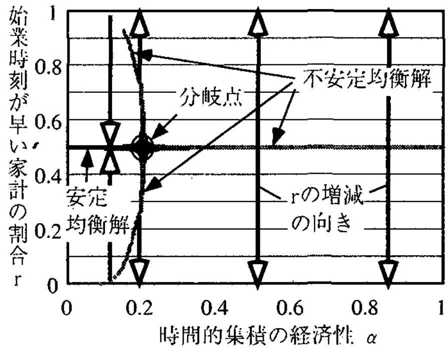
これらの均衡解 r^* を (μ, r) 軸の空間にプロットすることで位相の変化を表すことができる．これを分岐図と呼ぶ．

以下の分析では，簡単のためにパラメータ集合 μ のうち，1 つのみをパラメータとし，その他のパラメータを固定し定数として扱う．さらに，出勤時と帰宅時のスケジュールコストを同一で c と設定する．そのため，出勤時と帰宅時の混雑率のパターンの対称性が保証される．

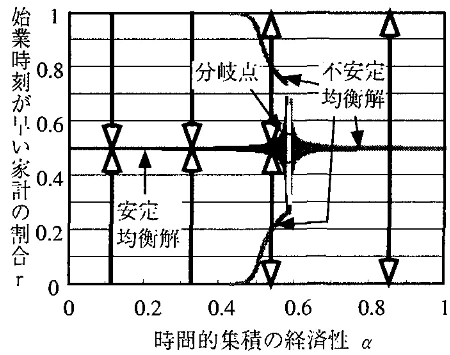
4. 分析結果

2. で時差出勤が容易となるパラメータの変化の方向は考察できたが，実際の均衡解の数や安定性がどのようになるかが示された訳ではない．そのため，分岐図によりこれらの形状を分析する．

時間的集積の経済性の大きさを表す α と労働力の限界生産性の大きさを表す β は企業の産業類型によって異なる．そのため，企業の時差出勤の導入インセンティブはこれら 2 つの値によって大きく異なる．そこで，ここでは α, β が時差出勤の実現可能性に与える影響を分岐図を用いて示す．



a) $\beta = 0.4$の分岐図

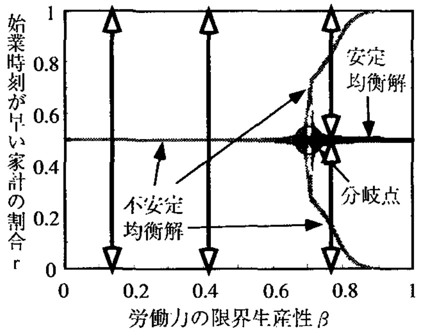


b) $\beta = 0.9$の分岐図

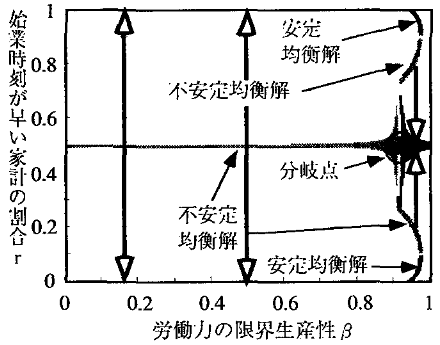
図 1: 時間的集積の経済性 α の分岐図

(1) 時間的集積の経済性を表す α をパラメータ

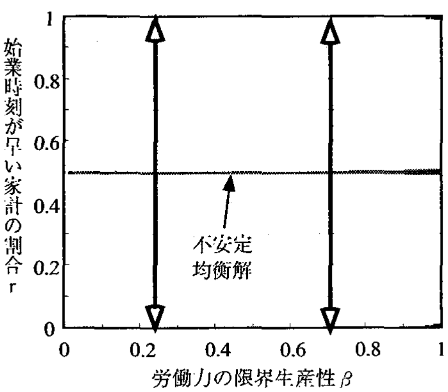
α をパラメータとして $\dot{r} = g(r, \alpha)$ の数値計算を行い，分岐図を求めた．図 1 はそれぞれ，a) $\beta = 0.4$, b) $\beta = 0.9$ として数値計算を行った分岐図である．分岐図はどちらも熊手型となる．α の値が 0 から 1 まで変化すると均衡解 r^* の数と安定性が変化し，どちらの場合も時差出勤が自動的に進む (均衡点が 1 つ，$0 < r^* < 1$)，時差出勤が進む可能性がある (均衡点が 3 つ，$r^* = 0, 1, 0 < r^* < 1$)，一斉始業 (均衡点が 2 つ，$r^* = 0, 1$) の順に現れる．そのため，α の値が小さい方が時差出勤が導入されやすいことが分かる．さらに，a) と b) を比較すると β の値が大き



a) $\alpha = 0.4$の分岐図



b) $\alpha = 0.6$の分岐図



c) $\alpha = 0.9$の分岐図

図 2: 労働力の限界生産性 β の分岐図

くなるほどグラフが右にシフトするため，β が大きいほど時差出勤が導入されやすいことが分かる．

(2) 労働力の限界生産性 β をパラメータ

次に労働力の限界生産性を表す β をパラメータとして，$\dot{r} = g(r, \beta)$ の数値計算を行い，分岐図を求めた．$\alpha = 0.4$ (図 2a) の場合は β の値を 0 から 1 まで変化させると，一斉始業 (均衡点が 2 つ，$r^* = 0, 1$)，時差出勤が進む可能性がある (均衡点が 3 つ，$r^* = 0, 1, 0 < r^* < 1$)，時差出勤が自動的に進む (均衡点が 1 つ，$0 < r^* < 1$) の順に現れる．α を大きくして求めた分岐図ではグラフ全体は右にシフトする．しかし，熊手の向きに変化が起こり r が 3 個以上の複数の均衡解を持つ状態が存在する (図 2b)．$\alpha = 0.9$ としたときの分岐図は不安定均衡解だけが残り，β の値によらずいかなる場合も時差出勤が進まない (図 2c)．

以上のことから β が大きいほど時差出勤が進む可能性がある．ただし，α の値が大きすぎると，β が大きくても時差出勤が進まないことがある．

(3) その他のパラメータ

その他のパラメータについても同様に分岐図を求めることができるが，ここでは紙面の都合上省略する．これらは基本的に 2. の表 1 の関係に従い，図 1 もしくは図 2 の形状を示す．

5. おわりに

本稿ではダイナミカルシステム分析を用いて，鉄道通勤による 2 始業時刻下での均衡解の個数と安定性についての検討を行い，これらの形状の変化を明らかにした．しかしながら，数値計算を用いていることから均衡解の位置に誤差が生じている可能性がある．また，複数のパラメータを同時に動かした場合の検討を行っていく必要がある．

参考文献

1) 永野光三・奥村誠・小林潔司：鉄道時差出勤の導入インセンティブに関する分析，土木計画学研究・講演集，No.21(2),pp.885-888,1998

2) Pierre N. V. Tu ; DYNAMICAL SYSTEMS : AN INTRODUCTION WITH APPLICATIONS IN ECONOMICS AND BIOLOGY, Springer-Verlag Berlin.Heidelberg, 1994.(永田良 他 訳：経済分析とダイナミカルシステム，文化書房博文社，1997)

3) 大和瀬達二：経済学におけるダイナミカルシステムの理論，税務経理協会，1987