

# 単一ボトルネックをもつ道路交通における最適勤務開始時刻分布

## Optimal Work Start Time Distribution for the Morning Commute

赤松 隆\*\*・前田 祐希\*\*\*・早崎 俊和\*\*\*

by Takashi AKAMATSU and Yuki MAEDA and Toshikazu HAYAZAKI

### 1. はじめに

通勤者の出発時刻選択行動を決定する大きな要因は、勤務開始時刻とボトルネックの混雑状況である。そのため、通勤者集団が経験する待ち時間や不効用の総和は、勤務開始時刻曲線の形状に大きく依存する。従って、以下のような問いを考察してみることは自然であり、また、交通需要管理施策を考える上でも有用な情報を与えるであろう：どのような勤務開始時刻曲線が設定されていれば、それに対応したフローパターンが社会的により望ましい状態となるのか？ 本研究は、この問いに答えることを最終的な目標とするものである。

従来、勤務開始時刻曲線とボトルネック条件を与件として、利用者の出発時刻（あるいは勤務地到着時刻）の分布を導く理論（あるいはそれを前提とした混雑料金理論）は、数多く研究されてきた（例えば、1）～6）。しかし、上記の問いに答える理論は、残念ながら従来ほとんど研究されていない。唯一の関連研究として小林等（1997）が挙げられる。しかし、これは鉄道を対象としており、道路交通等におけるボトルネック渋滞を対象とした場合とは全く性質が異なる問題である。

### 2. フロー・パターンを記述する均衡モデル

#### (1) 空間系に関する設定

本稿では、起点  $O$  から、単一のボトルネックを含む道路を通って、終点  $D$  へ勤務する  $Q$  人（一定）の通勤者を想定する。その道路の通過の様子は、図 1 に示すように、自由走行速度での移動とボトルネックにおける行列待ちとして表現される。従って、通勤者の起終点間移動の所要時間は、自由走行時間  $m$  と待ち時間  $T^{QD}$  の和である（また、ボトルネック流出と同時に勤

務地に到着することとなる）。

ボトルネックのサービスは、First-In-First-Out (FIFO) 原則に従い、最大流出率  $\mu$  であるとする。また、議論の展開を過度に複雑にしないために、待ち行列の物理的長さは無視した point-queue モデルによってボトルネックのサービスを記述する。すなわち、ボトルネックに待ち行列が存在する場合、ボトルネックに流入したフローは、流入順に、最大流出率  $\mu$  で流出する。一方、待ち行列が存在しない場合、流入フローは、流入率と同じ流率で、待ち時間無しに（瞬間的に）流出する。



図 1. 1 OD ペアモデル

#### (2) 時間系に関する設定

ボトルネックへの累積到着（流入）人数が  $q$  となる時刻を  $t_A(q)$ 、ボトルネックからの累積出発（流出）人数が  $q$  となる時刻を  $t_D(q)$  と書く。このボトルネックでは、FIFO 原則より、 $q$  番目に到着する利用者（通勤者）は  $q$  番目に出発する。従って、この  $q$  番目利用者の待ち時間  $T^{QD}(q)$  は、

$$T^{QD}(q) = t_D(q) - t_A(q) \quad (1)$$

と表される。

本稿では、全ての利用者は、各々、ある勤務開始時刻  $\hat{t}_w$  が与えられていると仮定する。これを表すために、ボトルネックを  $q$  番目に出発する利用者の勤務開始時刻を  $\hat{t}_w(q)$  と書く。本稿では、この勤務開始時刻曲線  $\hat{t}_w(q)$  は S 字型曲線であると仮定する：

$$\frac{dt_D(q)}{dq} - \frac{d\hat{t}_w(q)}{dq} \geq 0 \quad \forall q \quad (2)$$

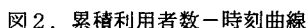
利用者の勤務開始時刻と勤務地到着時刻は、必ずし

\* Keywords：通勤，勤務開始時刻，動的均衡，TDM

\*\* 正会員 工博 豊橋技術科学大学 知能情報工学系  
(〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)

\*\*\*学生会員 豊橋技術科学大学大学院 知能情報工学専攻

わち、均衡状態では、利用者は勤務開始時刻順にボトルネックに流入する。従って、 $q$  番目の勤務開始時刻を  $t_w(q)$  とおけば、ボトルネックの FIFO 原則と FIFW 原則により、均衡状態における時間  $T^{SD}(q)$  は時刻  $t_w(q)$  と時刻  $t_0(q)$  の差として扱えることがわかる。



### 3. 均衡解

まず，ボトルネックに待ち行列が始まる時刻  $t_0$  より前にボトルネックを通過する利用者を考えよう．このような利用者の待ち行列時間  $T^{QD}$  はゼロである．そのため，その利用者の不効用最小化行動は Schedule Delay 最小化行動と等価となり，

が成立する。次に、待ち行列がなくなる時刻  $t_f$  以後にボトルネックを通過する利用者を見ると、その待ち行列時間  $T^{QD}$  はゼロである。従って、この利用者の不効用最小化行動もまた Schedule Delay 最小化と等価になり、 $t > t_f$  となる時刻  $t$  でも式(5)が成立する。

$$UC(q) = T^{QD}(q) + p(T^{SD}(t_D, \hat{t}_W, q)) + m \quad (3)$$
$$\frac{dt_D^{-1}(t)}{dt} = \mu \quad t_0 < t < t_f \quad (6)$$

さらに、時刻  $t_f$  と時刻  $t_0$  の間には

$$t_D^{-1}(t_f) - t_D^{-1}(t_0) = \mu(t_f - t_0) \quad (7)$$

が成立するから,  $t_0 = t_0(0)$  とすると,

$$t_f = \frac{Q}{\mu} + t_0 \quad (8)$$

となり、ボトルネック出発時刻曲線：

$$t_D(q) = \frac{q}{u} + t_D(0) \quad \forall q \quad (9)$$

### (2)待ち時間とボトルネック到着時刻

$$T^{QD}(q) + p(t_W(q) - t_D(q)) \leq T^{QD}(q') + p(t_W(q') - t_D(q')) \quad \forall q \neq q' \quad (10)$$

— 890 —

$q' \rightarrow q$  の極限をとると、待ち時間の変化率に関する以下の関係式が得られる：

$$\frac{dT^{QD}(q)}{dq} = \frac{1}{\mu} \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} \quad (11)$$

ところで、ボトルネック到着時刻  $t_A(q)$  は、出発時刻  $t_D(q)$  と待ち時間  $T^{QD}(q)$  との差であるから、

$$\frac{dt_A(q)}{dq} = \frac{dt_D(q)}{dq} - \frac{dT^{QD}(q)}{dq} \quad (12)$$

が成立する。これに式(9), (11)を代入して、

$$\frac{dt_A(q)}{dq} = \frac{1}{\mu} \left\{ 1 - \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} \right\} \quad (13)$$

を得る。

均衡状態における待ち時間およびボトルネック到着時刻曲線は、微分方程式(11), (13)を解くことによって得られる。その具体例として、ペナルティ関数を以下のような2次関数とした場合を考えてみよう：

$$p(T^{SD}(q)) = a \{t_W(q) - t_D(q)\}^2 \quad \forall q \quad (14)$$

$$\text{ただし, } \begin{cases} t_W(q) - t_D(q) > 0 & a = a_E \\ t_W(q) - t_D(q) < 0 & a = a_L \end{cases}$$

このとき、式(11), (13)は、各々、

$$\frac{dT^{QD}(q)}{dq} = \frac{2a}{\mu} \{t_W(q) - t_D(q)\} \quad (15)$$

$$\frac{dt_A(q)}{dq} = \frac{1}{\mu} \{1 - 2a \{t_W(q) - t_D(q)\}\} \quad (16)$$

となる。これと、 $q=0$  における境界条件から、以下の均衡解（待ち時間および到着時刻曲線）が得られる：

$$T^{QD}(q) = \frac{2a}{\mu} \int_0^q \{t_W(x) - t_D(x)\} dx + T^{QD}(0) \quad (17)$$

$$t_A(q) = \frac{1}{\mu} \int_0^q \{1 - 2a \{t_W(x) - t_D(x)\}\} dx + t_0 \quad (18)$$

#### 4. 勤務開始時刻曲線の最適化

3節で導いた関係式から明らかなように、均衡状態における利用者の待ち時間や総不効用は勤務開始時刻曲線の形状に大きく依存している。そこで、本節では、どのような勤務開始時刻曲線が設定されていれば、それに対応した均衡状態が社会的により望ましい状態と

なるかを考える。より具体的には、勤務開始時刻曲線を制御変数（関数）、利用者均衡状態での関係式（3節参照）を制約条件とし、利用者全体の総不効用を最小化する最適制御問題を考察する。

##### (1) 定式化

上で枠組みを述べた総不効用最小化問題は、以下のように定式化される：

$$\min_{t_w(q)} \int_0^Q UC(t_w(q), T^{QD}(q), q) dq \quad (19)$$

subject to

$$\frac{dT^{QD}(q)}{dq} = F(q) \quad \forall q \quad (20)$$

$$G(q) \geq 0 \quad \forall q \quad (21)$$

$$T^{QD}(0) = 0, \quad T^{QD}(Q) = 0 \quad (22)$$

$$B_0 = t_w(0), \quad B_f = t_w(Q) \quad (23)$$

$$F(q) = \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} \frac{1}{\mu}, \quad G(q) = (1/\mu) - \frac{dt_w(q)}{dq}$$

ただし、ここでは、1) 勤務開始時刻曲線はS字型、2) 総利用者数  $Q$  は与件、3) 最初と最後の利用者は待ち時間を負わない、4) 最初と最後の利用者の勤務開始時刻（各々、 $B_0$  および  $B_f$ ）は与件；と仮定されている。

なお、この問題は、未知変数（関数）に関して凸な許容領域と狭義凸な目的関数を持つ最適制御問題であるので、その解は一意に決まることが保証される。

##### (2) 最適条件

最適化問題のLagrangianを

$$L = \int_0^Q \left\{ UC(q) - \pi(q) \left\{ F(q) - \frac{dT^{QD}(q)}{dq} \right\} - \lambda(q) G(q) \right\} dq \quad (24)$$

ここで、 $\pi, \lambda$  は制約式に対応したLagrange乗数

と定義し、Hamiltonianを

$$H(q) = UC(q) - \pi(q) F(q) \quad (25)$$

としたとき、ポントリャーギンの最大値原理より以下のような最適条件を得る：

$$H_{t_w} - \lambda(q) G_{t_w} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{d\pi(q)}{dq} = H_{T^{QD}} - \lambda(q) G_{T^{QD}} \quad (27)$$

$$\frac{dT^{QD}(q)}{dq} = -H_{\pi} \quad (28)$$

$$\lambda(q) G(q) = 0, \quad \lambda(q) \geq 0, \quad G(q) \geq 0 \quad (29)$$

### (3)最適解の導出

以下では、ペナルティ関数を2次関数とした場合について最適解の導出をする。最適条件式(26)~(29)より、最適勤務開始時刻は以下のように求まる。

・勤務地到着が Early arrival となる利用者：

$$t_w^*(q) = t_0 + (Q_a/\mu) \quad (30)$$

・勤務地到着が Late arrival となる利用者：

$$t_w^*(q) = t_0 + (Q_b/\mu) \quad (31)$$

最適勤務開始時刻式(30) (31)と制約式(23)より、最初と最後のボトルネック到着（出発）時刻：

$$t_0 = B_0 - (Q_a/\mu) \quad (32)$$

$$t_f = B_f + (Q - Q_b)/\mu \quad (33)$$

が得られる。最適勤務開始時刻と制約式より、勤務地到着が Just arrival となる累積利用者数  $Q_a, Q_b$  を導出する。最適勤務開始時刻式(30) (31)より勤務地到着が Just arrival となる利用者数は、

$$Q_b - Q_a = \mu(B_f - B_0) \quad (34)$$

と表せる。式(34)と最後の利用者の待ち時間より、以下の関係式が導出できる：

$$a_E \{Q_b - \mu(B_f - B_0)\}^2 - a_L \{Q - Q_b\}^2 = 0 \quad (35)$$

式(35)より、 $Q_a, Q_b$  は以下のように導出できる。

$$Q_a = \frac{Q - (B_f - B_0)\mu}{\sqrt{a_E} + \sqrt{a_L}} \sqrt{a_L} \quad (36)$$

$$Q_b = \frac{Q\sqrt{a_L} + (B_f - B_0)\mu\sqrt{a_E}}{\sqrt{a_E} + \sqrt{a_L}} \quad (37)$$

求められた最適曲線を図示すると、図3のようになる。

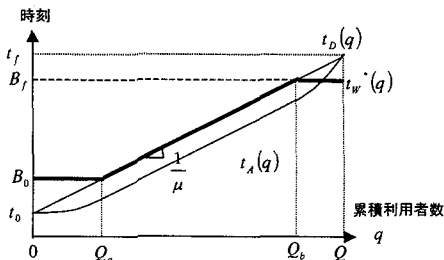


図3. 最適勤務開始時刻曲線

なお、以上では、ペナルティ関数が2次関数の場合の解析結果を示したが、より一般的な場合についても、図3と類似した結果が得られる。

### (4)待ち時間最小化と総不効用最小化

以上では、利用者全体の総不効用を最小化する勤務開始時刻の導出を行ったが、より実務的な観点からは、観測が容易な総待ち時間を目的関数として考えることも意味があるだろう。本稿では紙面に制約があるため、解析結果のみ示せば、その最適勤務開始時刻曲線は総不効用最小化問題と全く同一となる。また、この結果から、総 Schedule Delay 時間最小化問題も全く同一の結果となることがわかる。

### 5. おわりに

本稿では、簡単のため、利用者の異質性等を無視した最も単純な場合の議論のみを示した。現実的な問題に対するより実際の含意を得るには、例えば、以下に挙げる様な点に関してモデルの拡張が必要である：

- 1) 異質な複数層の利用者の考慮（勤務開始時刻指定の可否、選択行動の異質性等）、
- 2) 各時刻の持つ固有の効用あるいは時刻の集積効果（特定の時刻に勤務地に人が集積することによる正の経済効果）の考慮、
- 3) 複数のボトルネック／複数の起終点／ネットワーク等のより複雑な空間的構造の考慮。これらの場合についての幾つかの解析結果は、講演時に発表する予定である。

### 参考文献

- 1) W.S.Vickrey, "Congestion Theory and Transport Investment" *American Economic Review* 59, pp.251-261, 1969.
- 2) C.Hendrickson and G.Kocur, "Schedule Delay and Departure Time Decisions in a Deterministic Model", *Transportation Science* 15, pp.62-77, 1981.
- 3) M.J.Smith, "The Existence of a Time-Dependent Equilibrium Distribution of Arrivals at a Single Bottleneck", *Transportation Science* 18, pp.385-394, 1984.
- 4) C.F.Daganzo, "The Uniqueness of a Time-dependent Equilibrium Distribution of Arrivals at a Single Bottleneck", *Transportation Science* 19, pp.29-37, February 1985.
- 5) 赤松隆, "交通流の予測・誘導・制御と動的なネットワーク配分理論", *土木計画学研究・論文集* 13, pp. 23-48, 1996.
- 6) R.Arnett, Andre de Palma and R.Lindsey, "Structured Model of Peak-Period Congestion" *American Economic Review* 83, pp.161-179, 1993.
- 7) 小林潔司, 奥村誠, 永野光三, "鉄道通勤交通における出発時刻分布に関する研究", *土木計画学研究・論文集* 14, pp.895-906, 1997.