【土木計画学研究・講演集　No.21 (2)　1998年11月】

カタストロフ・リスクと防災投資の経済評価*

THE CATASTROPHE RISK AND ECONOMIC VALUATION OF DISASTER PREVENTION INVESTMENT *

小林潔司**・横松宗太***
by Kiyoshi KOBAYASHI** and Muneta YOKOMATSU***

1. はじめに

不確実性下における経済便益評価指標に関しては膨大な理論的・実証的な研究蓄積があり、１つの成熟した研究分野であるといっても過言ではない。不確実性下での便益指標に関する研究系譜に関しては、すでに上田[1]、多々納[2]等が詳細に検討しており、ここで改めて言及する必要はないだろう。しかし、これまでに提案された便益指標は、１）危険事象の独立な到着、２）危険事象の頻繁な生起を通じて、市場でリスクが分散されることを想定していた。大規模災害が生起する確率は極めて稀少であるが、一度生起すれば多くの（すべてではない）個人が同時に被災する危険性がある。このような稀少頻度、同時到着という集合リスクを対象とした経済便益指標に関しては、ほとんど研究が蓄積されていない。本研究では、巨大性・集合性を持つような災害リスク（以下、カタストロフ・リスクと呼ぶ）に着目し、防災投資によるカタストロフ・リスクの軽減効果を測定するための新しい方法論を提案する。

2. 社会的最適なリスク配分

(1) モデル化の前提

対象地域にはタイプの異なる家計が居住している。同じタイプの家計は同一の富を保有し同一の災害リスクに直面していると仮定する。家計の選好はタイプを問わず同一である。カタストロフ・リスクは家計の富の損失をもたらす。カタストロフ・リスクは、各タイプごとの災害被害の生起を表す集合リスクと災害の中で各タイプの中で特定の個人が被災する確率を表す個人リスクによって表すこととする。防災投資は集合リスクの生起確率に影響を及ぼす。カタストロフ・リスクに対する保険市場は対象国（地域）内で閉鎖していると仮定する。この仮定は便宜的なものであり、家計のタイプの中に外国の住民を加えることにより緩めることができる。国際保険市場を考慮した場合、便益の一部が国外に流出することとなる。災害が生じても物価水準に影響を及ぼさない。本研究では防災投資によるカタストロフ・リスクの軽減効果の経済便益を計測するための分析枠組みを開発することに主眼をおいている。議論の見通しをよくするため、保険市場のみを分析対象としてとりあげ、財市場は考慮しないこととする。

(2) 個人的リスクと集合リスク

タイプ$h=1,\cdots,H$の家計数をN_hと表そう。対象地域全体では$N=\sum_h N_h$の家計が存在する。各家計は災害リスクに直面している。簡単化のために、災害リスクを、１）平常、２）被災という２種類の状況によって表現し、それぞれの状況を状態変数

$$\begin{cases} s=0 & \text{被災しなかった時} \\ s=1 & \text{被災した時} \end{cases} \tag{1}$$

で表そう。さらに、家計が被る被害を

$$S_h^s = \begin{cases} 0 & s_h=0\text{の時} \\ L_h & s_h=1\text{の時} \end{cases} \tag{2}$$

と表す。いま、各タイプの家計が直面している集合リスクの状態を災害が生起した時に被災する家計数ベクトル$t=(t_1,\cdots,t_H)$で記述しよう。集合リスクtが生起する確率を$\pi(t)$と表す。さらに、集合リスク事象tが生起し、N_hの家計の中からt_h家計が被災した時に、その中で着目している家計が実際に被災する条件付き確率を$\pi_h(1|t)$で表そう。ここで、状態変数sで記述される災害リスクを個人リスク、tで記述さ

*キーワーズ：公共事業評価法、財源・制度論・防災計画
**正員　工博　京都大学大学院工学研究科土木工学専攻
（〒606-8501 京都市左京区吉田本町　TEL・FAX 075-753-5071）
***学生員　京都大学大学院工学研究科土木工学専攻
（〒606-8501 京都市左京区吉田本町　TEL・FAX 075-753-5073）

れるリスクを集合リスクと呼ぶこととする。言い換えれば、ここでは災害リスクを集合リスクと個人的リスクという2段階の「くじ」で構成される「くじ」として表現している。第1段階のくじではN_hの個人の中から無作為に被災する個人の数t_hが選択される(集合リスクが確定する)。第2段階の「くじ」では、現実に被災するt_h個の家計が選ばれることになる。いま、タイプhの家計が個人リスクsと集合リスクtの状況(s,t)に直面する同時生起確率を$\pi_h(s,t) > 0$で表そう。ただし、$\sum_{s,t}\pi_h(s,t) = 1$が成立する。この時、集合リスクtが生じた時、タイプhのある個人が被災する確率は

$$\pi_h(1|t) = \frac{\pi_h(1,t)}{\sum_{s=0,1}\pi_h(s,t)} \tag{3}$$

と表せる。集合状態tが生じた時、被害が生じる家計数は$\pi_h(s|t)N_h$と表せる。条件付き確率$\pi_h(s|t)N_h$の定義より$t = \pi_h(s|t)N_h$が正確に成立する。状態(s,t)が生じた時のタイプhの富を$e_h(s) = W_h - S_h^s$と表そう。W_hはタイプhの家計の事前の富である。状態sが生じた時の個人の被害額は社会全体でどれだけの家計が被害を被ったかとは無関係であると考え、個人リスクの状態sが生じた場合の当該家計の富$e_h(s)$は集合リスクの状態tの如何に関わらず一定の値をとると考える。家計の期待効用関数u_hをリスクを再配分した後の状況依存的富$x_h(s,t)$の関数として

$$u_h(\boldsymbol{x}_h) = \sum_{s,t}\pi_h(s,t)v_h(x_h(s,t)) \tag{4}$$

と表そう。ただし、$\boldsymbol{x}_h = \{x_h(s,t)\}$は状況依存的富ベクトルである。さらに、間接関数$v_h : R \to R$は$dv_h(x_h)/dx_h > 0$, $d^2v_h(x_h)/dx_h^2 \leq 0$を満足する。災害が生じる事前の時点においては、誰が実際に被害を被るかは不確実であり、災害が起こった事後において$\pi_h(s,t)N_h$の家計が被害$s = 1$を被ると考える。

(3) 規範的最適解

タイプhに属する家計はすべて対称的であると仮定する。事前における社会全体での最適リスク配分問題を考える。社会全体での最適リスク配分問題(SO)を以下のように定式化する。

$$\max_{\boldsymbol{x}_h}\sum_h \mu_h N_h u_h(\boldsymbol{x}_h) \tag{5}$$

subject to

$$\sum_h N_h \sum_s \pi_h(s|t)(x_h(s,t) - e_h(s)) = 0 \quad \text{for all } t \tag{6}$$

制約条件式は集合的状況tのそれぞれに対して定義されている。問題SOは集合リスクが生じた事後の時点で社会全体の富を社会的厚生関数を最大にするような配分問題を表している。制約条件(6)のラグランジュ乗数を$p(t)$とすれば1階の最適条件は

$$\pi_h(s,t)\frac{dv_h(x_h(s,t))}{dx_h(s,t)} = \lambda_h\pi_h(s|t)p(t) \quad \text{for all } h,s,t \tag{7}$$

ここに、$\lambda_h = 1/\mu_h$はタイプhの家計に対する重みμ_hの逆数である。各タイプに属するすべての家計が同一の集合リスクに直面することにより

$$\pi(t) = \sum_s \pi_h(s,t) \text{ for all } h,t \tag{8}$$

が成立する。$\pi_h(s,t) = \pi_h(s|t)\pi_h(t)$が成立することに着目すれば、1階の最適化条件は

$$\pi(t)\frac{dv_h(x_h(s,t))}{dx_h(s,t)} = \lambda_h p(t) \text{ for all } h,s,t \tag{9}$$

と表される。ラグランジュ乗数$p(t)$は社会的厚生水準単位で評価した集合リスクtの潜在価格を表している。最適化条件(9)が成立するためには任意のt,hに関して富の限界効用$dv_h(x_h(s,t))/dx_h(s,t)$が個人リスクsに関わらず一定値$\lambda_h p(t)/\pi(t)$となる必要がある。すなわち、集合リスクの状態tのそれぞれに対して、同タイプの家計の間で富が一定となるような状態を達成することにより、社会的に効率的なリスク配分となる。すなわち、任意のt,hに対して

$$x_h(0,t) = x_h(1,t) = \hat{x}_h(t) \tag{10}$$

が成立する。集合リスクtが生起した下で個人が被るリスクが完全に保険でカバーできる時、災害リスクのパレート最適な配分が達成される。

3. 保険システムによる分権的リスク配分

(1) 相互保険契約

現実には災害が生じた事後において、各タイプの家計が自発的に富を交換するような誘因を持たず、first-bestな集合リスクの配分を達成するためには何らかの制度的なシステムの導入が必要となる。本研究では災害リスクのfirst-bestな配分が可能であるような災害保険を考案する。この保険は、集合リスクに対応したArrow型証券と集合リスクの各状態の下で定義された相互保険を組み合わせた金融デリバティブとして定義される。

各タイプの家計が互いにリスクに対して相互保険

契約を結ぶ場合を考えよう。タイプhの相互保険Ω_hを、状態tのそれぞれに対して保険金$m_h(t)$と保険料$\mu_h(t)$の組み合わせの集合

$$\Omega_h = (\boldsymbol{m}_h, \boldsymbol{\mu}_h) \tag{11}$$

により定義する。ただし、$\boldsymbol{m}_h = \{m_h(1), \cdots, m_h(t), \cdots, m_h(T)\}$, $\boldsymbol{\mu}_h = \{\mu_h(1), \cdots, \mu_h(t), \cdots, \mu_h(T)\}$である。すなわち、各家計は状態$t$の集合リスクが生起した場合に$\mu_h(t)$を拠金する。相互保険の加入者の中で、被災した家計には保険金$m_h(t)$が支払われる。被災しなかった家計には保険金は支払われない。タイプhの家計が状況がこのような相互保険契約を締結した場合、状況(s,t)が生起した時の家計の富は

$$\hat{e}_h(s,t) = \begin{cases} e(1) + m_h(t) - \mu_h(t) & s = 1 \\ e(0) - \mu_h(t) & s = 0 \end{cases} \tag{12}$$

と表される。集合リスクtが生起した場合を考える。支払われる保険金の総額は

$$\sum_h \pi_h(1|t) N_h m_h(t) \tag{13}$$

となる。一方、保険収入は

$$\sum_h N_h \mu_h(t) \tag{14}$$

と表される。保険会社の状況依存的利潤は

$$\Pi(t) = \sum_h N_h\{\pi_h(1|t) m_h(t) - \mu_h(t)\} \tag{15}$$

と表される。完全競争的に集合リスクtの生起に応じて収支がとれていることより、次式が成立する。

$$\mu_h(t) = \pi_h(1|t) m_h(t) \tag{16}$$

(2) 状況依存的証券

相互保険は集合リスクが生起した下で個別リスクを分散するために有用な手段であるが、集合リスクを担保することは不可能である。そこで、家計は相互保険と同時に集合リスクの状態の数と対応したT種類のArrow証券の売買が可能であるとする。アロー証券とは、集合リスクtが生起した時に1を支払ってくれるが、それ以外の場合には支払いがないような証券を意味する。Arrow証券1単位当たりの事前の価格を$p(t)$としよう。証券の価格は市場において内生的に決定される。いま、個人hのArrow証券保有ベクトルを$\boldsymbol{a}_h = (a_h(1), \cdots, a_h(t), \cdots, a_h(T))$と表そう。家計がArrow証券を売却している場合には、集合リスクtが生じた場合には$a_h(t)$支払う必要がある。Arrow証券の束$\boldsymbol{a}_h$の価格は次式で表される。

$$y_h = \sum_t p(t) a_h(t)$$

状況(s,t)が生起した時の当該家計の富は、

$$x_h(1,t) = e_h(1) + \pi_h(0|t) m_h(t) + a_h(t) - y_h$$
$$x_h(0,t) = e_h(0) - \pi_h(1|t) m_h(t) + a_h(t) - y_h$$

と表される。なお、上式を導出する際に$\pi_h(0|t) = 1 - \pi_h(1|t)$を利用している。上式より、集合リスク$t$に対するArrow証券の購入量は次式で表される。

$$a_h(t) = \sum_s \pi(s|t)\{x_h(s,t) - e_h(s)\} + y_h \tag{17}$$

(3) 分権的市場解

相互保険の保険料が式(16)で表されることに着目しよう。Arrow証券の価格$p(t)$を与件としよう。この時、家計の行動は

$$\max_{\boldsymbol{m}_h, \boldsymbol{a}_h, \boldsymbol{x}_h} \sum_{s,t} \pi_h(s,t) v(x_h(s,t)) \tag{18}$$

subject to

$$\sum_t p(t) a_h(t) = y_h \tag{19}$$
$$x_h(0,t) = e_h(0) - \pi_h(1|t) m_h(t) + a_h(t) - y_h \tag{20}$$
$$x_h(1,t) = e_h(1) + \pi_h(0|t) m_h(t) + a_h(t) - y_h \tag{21}$$

for all t

と記述できる。制約条件(19),(20),(21)のラグランジュ乗数をそれぞれ$\lambda_h, \lambda_h(0,t), \lambda_h(1,t)$と表そう。この問題の1階の最適化条件は

$$\pi_h(s,t) \frac{dv(x_h(s,t))}{dx_h(s,t)} = \lambda_h(s,t) \tag{22}$$
$$\pi_h(1|t) \lambda_h(0,1) = \pi_h(0|t) \lambda_h(1,t) \tag{23}$$
$$\lambda_h p(t) = \lambda_h(0,t) + \lambda_h(1,t) \tag{24}$$
$$\lambda_h = \sum_s \sum_t \lambda_h(s,t) \tag{25}$$

for all s, t

となる。この時、式(23),(24)より

$$\lambda_h(0,t) = \pi_h(0|t) p(t) \lambda_h \tag{26}$$
$$\lambda_h(1,t) = \pi_h(1|t) p(t) \lambda_h \tag{27}$$

を得る。したがって、式(22)より次式を得る。

$$\pi(t) \frac{dv(x_h(s,t))}{dx_h(s,t)} = \lambda_h p(t) \tag{28}$$

Arrow証券の価格は、各状況依存的な証券市場が清算される水準に決定される。証券市場の均衡条件は

$$\sum_h N_h a_h(t) = \sum_h \sum_{t'} N_h p(t') a_h(t') \quad \text{for all } t \tag{29}$$

と表せる。式(24)より証券価格は規格化条件

$$\sum_t p(t) = 1 \tag{30}$$

を満足しなければならない。分権的市場における個人行動の最適化条件(28)は、社会的最適化問題における最適化条件(9)と同一になる。すなわち、相互保険と状況依存型証券を組み合わせたような災害保険

を導入することにより、個人の効用最大化行動を通じて社会的に最適なリスクの配分が達成できることとなる。ここに、以下の命題が成立する。

命題　Malinvaud=Arrow証券$(m_h, a_h)(h = 1,\cdots,H)$が事前に売買されるような証券市場を通じて、カタストロフ・リスクのfirst-bestな配分を分権的に達成することが可能である。

パレート最適な資源配分を達成するような災害保険は、Malinvaud=Arrow証券の組み合わせとして定義できる。家計hに対して、保険料c_hを

$$c_h = \sum_t \{p^*(t)a_h^*(t) + \pi_h(1|t)m_h^*(t)\} \quad (31)$$

と表す。第1項はAllow証券で構成される部分であり、集合リスクに対する保険料を表す。第2項は相互保険に該当する保険料であり、各タイプごとに異なる内容となる。一方、リスク事象(s,t)の生起のそれぞれに対して保険金$R(s,t)$

$$R(s,t) = \begin{cases} m_h^*(t) + a_h^*(t) + b_h^*(t) & s = 0 \\ a_h^*(t) + b_h^*(t) & s = 1 \end{cases} \quad (32)$$

を支払う。ただし、$b_h^*(t) = \sum_{t'=t} \pi_h(1|t')m_h^*(t')$である。このような保険を市場で売買することにより、災害リスクのfirst-bestな配分が可能となる。

4. 防災投資の経済便益評価

防災投資は、集合リスクの生起確率を低減させることにより、経済全体で生じる厚生損失を減少させる効果がある。いま、災害リスクtの生起確率を防災投資zの関数として$\pi(t:z)$と表現しよう。防災投資によりz_0がz_1に変化し、それと対応して災害リスクの生起確率が$\pi(t:z_0)$から$\pi(t:z_1)$に変化したとしよう。一方、ある集合リスクtが生起した場合、それが誰に配分されるかを表す個人リスク$\pi_h(s|t)$は変化しないと考える。$\pi_h(s,t:z) = \pi_h(s|t)\pi(t:z)$が成立する。この場合、防災投資による災害リスクの軽減効果は$d\pi_h(s,t:z)/dz = \pi_h(s|t)(d\pi(t:z)/dz)$と表せる。さらに、防災投資により、富の配分パターン、Arrow証券の価格がそれぞれ$\boldsymbol{x}_h^{*0}, \boldsymbol{p}_0^*$から$\boldsymbol{x}_h^{*1}, \boldsymbol{p}_1^*$に変化したと考える。非状況依存的補償変分は

$$\begin{aligned} &E[v(x_h^{*1}(s,t) - OP) : \pi_h^1(s,t)] \\ &= E[v(x_h^{*0}(s,t)) : \pi_h^0(s,t)] \end{aligned} \quad (33)$$

を満足するOPとして定義できる。ここに、記号$E[\cdot : \pi_h^i(s,t)]$は確率$\pi_h^i(s,t)$に関する期待値操作を表している。プロジェクトがsmallであると考え、上式の左辺を$\boldsymbol{x}_h^1, \boldsymbol{\pi}_h^1$の近傍で全微分をとることにより

$$\sum_{s,t} \frac{\partial \pi_h^1(s,t)}{\partial z} v(x_h^{*1})dz + \sum_{s,t} \pi_h^1(s,t)\{\frac{\partial v(x_h^{*1})}{\partial x_h} \cdot [(1-p(t))da_h(t) - a_h(t)dp(t) - dOP]\} = 0 \quad (34)$$

を得る。均衡条件式(29)の両辺を全微分した関係式

$$da_h(t) = p(t)da_h(t) + dp(t)a_h(t) \quad (35)$$

を式(34)に代入すると、非状況依存的補償変分は

$$dOP = \frac{\sum_{s,t} d\pi_h^1(s,t)v(x_h^1(s,t))}{\sum_{s,t} \pi_h^1(s,t)\frac{dv(x_h^1(s,t))}{dx_h^1(s,t)}} \quad (36)$$

$$= \frac{\sum_{s,t} d\pi_h^1(s,t)v(x_h^1(s,t))}{\lambda_h} \quad (37)$$

となる。ここで、上式の展開において最適化条件(22),(25)を用いている。λ_hはArrow証券の束に関する潜在価格である。集合リスクtの下で生起する個人リスクは相互保険により完全にカバーされ式(10)が成立する。したがって、集合リスクtの下で確保できる富を$\hat{x}_h(t)$とすれば次式を得る。

$$dOP = \frac{\sum_{s,t} d\pi_h^1(s,t)v(\hat{x}_h^1(t))}{\lambda_h} \quad (38)$$

5. おわりに

本研究では、災害は複数の家計が同時に被災するような集合リスクであることを指摘するとともに、社会的に最適なリスクの配分方法について分析した。その際、個人的なリスクを相互に分散する相互保険と集合なリスクを分散する状況依存的証券を組み合わせた保険システムを導入することにより、社会的に最適な災害リスク配分を分権的に達成することが可能であることを示した。さらに、このような災害リスクの分散市場を対象として防災投資による災害リスクの軽減便益を計測する方法を提案した。なお、講演時に数値計算結果を発表する。

参考文献

1) 上田孝行: 防災投資の便益評価-不確実性と不均衡の概念を念頭において、土木計画学研究・論文集、No. 14, pp.17-34, 1997.
2) 多々納裕一: 不確実性下のプロジェクト評価：課題と展望、土木計画学研究・講演集, No.20(2), pp. 19-30, 1997.
3) Arrow, K.J. and Lind, R. C.: Uncertainty and the evaluations of public investments, *American Economic Review*, Vol. 53, pp. 941-973, 1970.
4) Malinvaud, E.: The allocation of individual risks in large markets, *Journal of Economic Theory*, Vol. 4, pp. 312-328, 1972.