# 不確実性下の便益定義に関する考察*1

A Note on Benefit Measure Under Uncertainty

高木 朗義*2，上田 孝行*3，長谷川 俊英*4，森杉 壽芳*5

Akiyoshi Takagi, Taka Ueda, Toshihide Hasegawa, Hisa Morisugi

## 1．はじめに

防災投資の評価に対する社会的要請の高まりを背景として，不確実性(リスク)の存在下での便益計測に関する研究の必要性が非常に大きくなっている．筆者らはそのために不確実性を有する空間経済システムでの立地選択行動と整合した便益定義についていくつかの提案を既に行っている（高木 1)，上田 2)，高木・森杉他 3)など参照）．しかし，その際には，新たな定義のベースとなる既往のいくつかの代表的な便益概念の内，Fair Bet Price の概念については十分に活用していなかった．現在，Fair Bet Price の概念について検討を進め，空間経済システムへの適用を念頭に新たな便益定義へと拡張すべく取り組んでいる．その過程において，筆者らは Fair Bet の概念を EV(等価的偏差)に基づいて展開したため，既往研究（Johansson4)，Graham5)など）のような CV(補償的偏差)の枠組みで展開した場合と異なるいくつかの性質を図解により明らかにすることができた．

Fair Bet の概念を EV と CV のいずれで展開するかにより便益の性質が異なるとことは，言うまでもなく，プロジェクト評価において重要な意味をもつ．そこで，本稿はそれらの違いについて図解により直観的に明らかにすることを試みる．

## 2．便益定義のための基本モデル

(1)基本条件

①確率的に生起する状態 $i$ を考え，それぞれの生起確率を $\phi_i$ とし，次式のように仮定する．

$$\mathbf{I} = \{1, \cdots i, \cdots I\} \tag{1.1}$$

$$\phi = (\phi_1, \cdots \phi_i, \cdots \phi_I) \tag{1.2}$$

②それぞれの状態で個人が得る効用 $V_i$ は，所得 $Y_i$，それ以外の要因を表す変数 $Q_i$ の関数 $V_i = V(Y_i, Q_i)$ で表わす．

$$V = (V_1, \cdots V_i, \cdots V_I) \tag{1.3}$$

$$Y = (Y_1, \cdots Y_i, \cdots Y_I) \tag{1.4}$$

$$Q = (Q_1, \cdots Q_i, \cdots Q_I) \tag{1.5}$$

③生起確率で重み付けた期待効用を次のように表わす．

$$EU = F(Y, Q) = \sum_{i \in \mathbf{I}} \phi_i V(Q_i, Y_i) \tag{2}$$

④プロジェクト無と有をそれぞれ添字 $a, b$ で表わす．ただし，$\phi^a = \phi^b = \phi$ とし，生起確率は変化しないと考える．

(2)基本的な図解

状態を $i$=1,2 の２つに限定し，所得，効用水準，期待効用水準の関係を図解する．図１がそれである．第１象限は各状態の所得の組合せを表す．第２象限と第４象限はプロジェクト有無の各状態の所得と効用水準の関係を表す．第３象限はプロジェクト有無の期待効用水準の関係を表す．

今，プロジェクト無の状態別所得の組合せ $(Y_1^a, Y_2^a)$ が与えられると第１象限において点 $A$ が決定される．この点 $A$ により，第２象限と第４象限の効用関数

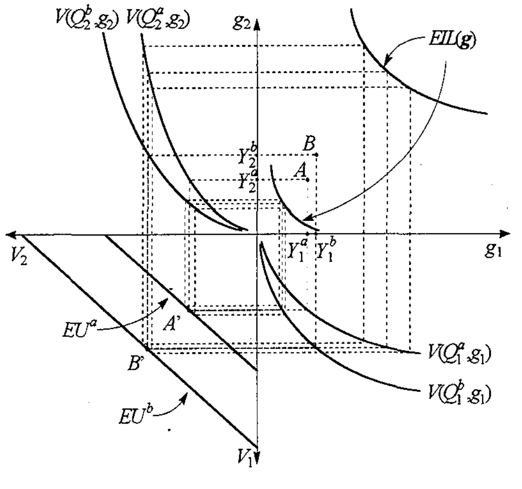


図１　所得，効用水準，期待効用水準の関係

---

*1 キーワード：整備効果計測法

*2 正会員　工博　中日本建設コンサルタント㈱
（名古屋市中区錦 1-8-6, TEL052-232-6035, FAX052-221-7833）
*3 正会員　工博　岐阜大学工学部土木工学科
（岐阜市柳戸 1-1, TEL058-293-2447, FAX058-230-1248）
*4 正会員　工修　㈱東海総合研究所
（名古屋市中区錦 3-20-27, TEL052-203-5322,FAX052-201-1387）
*5 正会員　工博　アジア工科大学

$V\left(Q_i^a, g_i\right)$ に基づいて期待効用水準 $EU^a$ が決定される．この期待効用水準に等しい期待効用水準の軌跡を描くと，第3象限の直線 $EU^a$ となる．同様に期待効用水準 $EU^b$ に等しい期待効用水準の軌跡を $EU^a$ の外側に描くことができる（$\because EU^b > EU^a$）．次に，このプロジェクト有の等期待効用水準の直線上の任意の点を選び，$EU^b$ と同じ期待効用水準を実現する所得の組み合わせを第2象限と第4象限の $V\left(Q_i^a, g_i\right)$ を利用して求めると，第1象限でその点が決定される．その点の集合は，所得で表した無差別曲線(Equivalent Income Locus)となり，プロジェクト無の状態において有の期待効用水準と同じ期待効用水準を実現する所得の組み合わせの軌跡であり，次式のように表される．

$$EIL(g, Q^a, EU^b) = \{(g_1, \cdots g_i, \cdots g_I) \mid F(g, Q^a) = \sum_{i \in \mathbf{I}} \phi_i V(g_i, Q_i^a) = \sum_{i \in \mathbf{I}} \phi_i V(Y_i^b, Q_i^b) = EU^b, g > 0\} \quad (3)$$

ここで，$EIL(\cdot)$ について以下の性質が成り立つ．

$V_i = V(Y_i, Q_i)$ は $Y_i$ に対して凹関数である．

$\Rightarrow$ $F(g, Q^a)$ は $g$ に対する凹関数である．

$\Rightarrow$ $F(g, Q^a)$ は $g$ に対する準凹関数である．

$\Rightarrow$ $EIL(\cdot)$ は凸集合である．

一方，プロジェクト無の等期待効用水準の直線上の任意の点を選び，$EU^a$ と同じ期待効用水準を実現する所得の組み合わせを第2象限と第4象限の $V\left(Q_i^b, g_i\right)$ を利用して求めると，第1象限でその点が決定される．その点の集合は，所得で表した無差別曲線 $EIL\left(g\right)$ となり，プロジェクト有の状態において無の期待効用水準と同じ期待効用水準を実現する所得の組み合わせの軌跡となる．

## 3．EVで展開した不確実性下の便益定義

(1)各便益定義（高木[1]，上田[2]など参照）

① State-Contingent EV(以下，略してSCEV)

$$V(Y_i^a + EV_i, Q_i^a) = V(Y_i^b, Q_i^b) \quad (4.1)$$

これから以下の性質が成り立つ．

$$\Rightarrow \quad \phi_i V(Y_i^a + EV_i, Q_i^a) = \phi_i V(Y_i^b, Q_i^b) \quad (4.2)$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in \mathbf{I}} \phi_i V(Y_i^a + EV_i, Q_i^a) = \sum_{i \in \mathbf{I}} \phi_i V(Y_i^b, Q_i^b) \quad (4.3)$$

$$\Rightarrow \quad Y^a + EV \in EIL(g, Q^a, EU^b) \subset \mathbf{R}_+^I \quad (4.4)$$

ここで，$EV = (EV_1, \cdots EV_i, \cdots EV_I) \in \mathbf{R}_+^I$ (4.5)

ゆえに，$Y^a + EV$ は $EIL(g, Q^a, EU^b)$ 上にある．

② Non-Contingent EV(以下，略してNCEV)

$$\sum_{i \in \mathbf{I}} \phi_i V(Y_i^a + NCEV, Q_i^a) = \sum_{i \in \mathbf{I}} \phi_i V(Y_i^b, Q_i^b) \quad (5.1)$$

$$\Rightarrow Y^a + NCEV \cdot e_{\mathbf{I}} \in EIL(g, Q^a, EU^b) \subset \mathbf{R}_+^I \quad (5.2)$$

ここで，$e_{\mathbf{I}} = (1, \cdots 1, \cdots 1) \in \mathbf{R}_+^I$ (5.3)

ゆえに，$Y^a + NCEV \cdot e_{\mathbf{I}}$ も $EIL(g, Q^a, EU^b)$ 上にある．

③ Expected EV(以下，略してEEV)

$$EEV = \phi \cdot EV = \sum_{i \in \mathbf{I}} \phi_i EV_i \quad (6)$$

④ Fair Bet EV(以下，略してFBEV)

$$FBEV = \min_{ev_i} \sum_{i \in \mathbf{I}} \phi_i ev_i \quad (7.1)$$

$$\text{s.t. } Y^a + ev \in EIL(g, Q^a, EU^b) \quad (7.2)$$

ここで，$ev = (ev_1, \cdots ev_i, \cdots ev_I) \in \mathbf{R}^I$ (7.3)

$$ev^* = (ev_1^*, \cdots ev_i^*, \cdots ev_I^*) = \arg\min_{ev_i} \{\sum_{i \in \mathbf{I}} \phi_i ev_i \mid Y^a + ev \in EIL(g, Q^a, EU^b)\} \quad (7.4)$$

図1に基づいて，プロジェクト有と同じ期待効用を得るのに必要であると考える補償額の組み合わせを図に描く．それは点 $A$ からの追加的所得であるので，無差別曲線のそれぞれ各点から点 $A$ の所得の組み合わせを引いた点の集合であり，単純に第1象限の $EIL\left(g\right)$ を点 $A$ の所得の組み合わせの分だけ平行移動したものに他ならない．それが図2である．この曲線は，プロジェクト実施による効用の上昇をあきらめるのに必要な補償額であるので，補償可能曲線と呼ぶことにする．補償可能曲線は，既に示したように $EIL(\cdot)$ が凸集合であるため，原点に対して凸になる．この図に上記の便益定義を描くと図中におけるような位置となる．

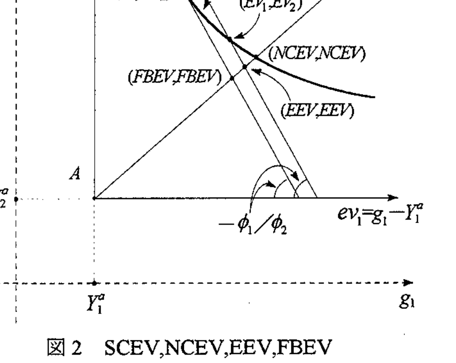


図2　SCEV,NCEV,EEV,FBEV

(2)各便益定義の大小関係

各便益定義について，以下の関係が成り立つ．

I-1)　$FBEV \le NCEV$　(8.1)

I-2)　$FBEV \le EEV$　(8.2)

I-3)　$EEV\left(\begin{smallmatrix}\ge\\=\\<\end{smallmatrix}\right)NCEV$　(8.3)

I-1)，I-2)は図2及び定義から明らかである．一方，I-3)は図2では $EEV \le NCEV$ であるが，図3，4のように直線の傾き $-\phi_1/\phi_2$ の小さい場合や NCEV より右側にある場合，すなわち $\phi_1 < \phi_2$ または $EV_1 > EV_2$ となる場合には $EEV \ge NCEV$ となる．

今，状態1を平常時，状態2を災害時として防災プロジェクトを考えると，災害の発生確率は非常に小さいので $\phi_1 >> \phi_2$ となる。また，多くの場合，災害時の便益の方が平常時の便益より大きいので，$EV_1 < EV_2$ となる。ゆえに，防災プロジェクトでは多くの場合 $EEV \le NCEV$ となると考えられる。

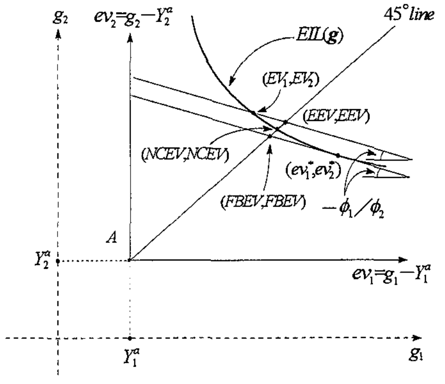


図3　EEV と NCEV の大小関係(その1)

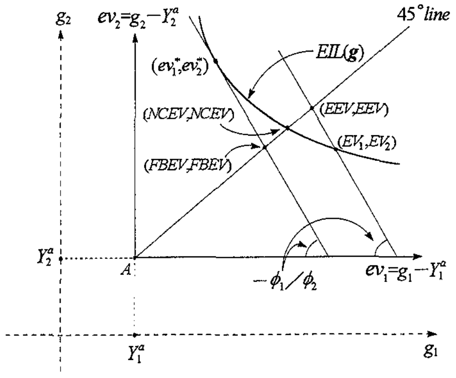


図4　EEV と NCEV の大小関係(その2)

(3)各便益定義の序列保持

各便益定義を用いてプロジェクトの順位付けを行うには，期待効用での順序と便益の順序が同じになる必要がある．3つのプロジェクト $a, b, c$ を例にすると次の関係が成り立つ．

P-1) $\sum_{i\in I}\phi_i V(Q_i^c, Y_i^c) \ge \sum_{i\in I}\phi_i V(Q_i^b, Y_i^b) \ge \sum_{i\in I}\phi_i V(Q_i^a, Y_i^a)$

$$\Leftrightarrow \quad NCEV^{a\to c} \ge NCEV^{a\to b} \qquad (9.1)$$

P-2) $\sum_{i\in I}\phi_i V(Q_i^c, Y_i^c) \ge \sum_{i\in I}\phi_i V(Q_i^b, Y_i^b) \ge \sum_{i\in I}\phi_i V(Q_i^a, Y_i^a)$

$$\Leftrightarrow \quad FBEV^{a\to c} \ge FBEV^{a\to b} \qquad (9.2)$$

P-3) $\sum_{i\in I}\phi_i V(Q_i^c, Y_i^c) \ge \sum_{i\in I}\phi_i V(Q_i^b, Y_i^b) \ge \sum_{i\in I}\phi_i V(Q_i^a, Y_i^a)$

$$\not\Leftrightarrow \quad EEV^{a\to c} \ge EEV^{a\to b} \qquad (9.3)$$

P-1)，P-2)は FBEV を支出関数として，また，期待効用関数を通常の効用関数として考えることによって標準的なミクロ経済学理論で証明できる．

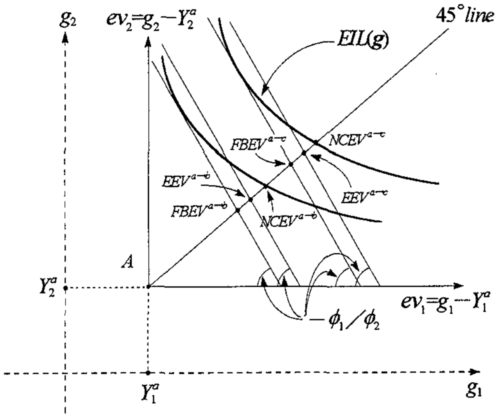


図5　各便益定義の序列

(4)Option Value

I-3)より，従来からの定義である Option Value の符号は，条件によって正負をとることとなる．

$$OV = NCEV - EEV\left(\begin{smallmatrix}\ge\\=\\<\end{smallmatrix}\right)0 \qquad (10)$$

しかし，I-1)，I-2)から FBEV での Option Value という新しい定義を示すことできる．

$$FBOVNCEV = NCEV - FBEV \ge 0 \qquad (11.1)$$

$$FBOVEV = EEV - FBEV \ge 0 \qquad (11.2)$$

この2つの定義の違いは，個人が置かれている状態がわかっているかどうかである．すなわち，NCEV は $a$，$b$ どちらの場合もどの状態かわからない場合の補償額である．FBEV は $b$ ではどの状態かわからないが，$a$ ではどの状態かわかっている場合の補償額である．し

たがって，FBOVNCEV は $a$ での個人が置かれている状態についての情報の差を反映したプレミアムである．一方，EEV は $a$, $b$ どちらの場合もどの状態かわかっている場合の補償額である．したがって，FBOVEV は $b$ での個人が置かれている状態についての情報の差を反映したプレミアムである．

## 4．CV で展開した不確実性下の便益定義

(1)便益の定義

① State-Contingent CV（以下，略して SCCV）

$$V(Y_i^b - CV_i, Q_i^b) = V(Y_i^a, Q_i^a) \tag{12}$$

② Non-Contingent CV（以下，略して NCCV）

$$\sum_{i \in \mathbf{I}} \phi_i V(Y_i^b - NCCV, Q_i^b) = \sum_{i \in \mathbf{I}} \phi_i V(Y_i^a, Q_i^a) \tag{13}$$

③ Expected CV

$$ECV = \phi \cdot CV = \sum_{i \in \mathbf{I}} \phi_i CV_i \tag{14}$$

④ Fair Bet CV

$$FBCV = \max_{cv_i} \sum_{i \in \mathbf{I}} \phi_i cv_i \tag{15.1}$$

$$\text{s.t. } Y^b - cv \in EIL(g, Q^b, EU^a) \tag{15.2}$$

ここで，$cv = (cv_1, \cdots cv_i, \cdots cv_I) \in \mathbf{R}^I$. (15.3)

$$cv^* = (cv_1^*, \cdots cv_i^*, \cdots cv_I^*) = \arg\max_{cv_i} \{\sum_{i \in \mathbf{I}} \phi_i cv_i \mid Y^a + ev \in EIL(g, Q^b, EU^a)\} \tag{15.4}$$

CV は効用変化後に支払ってもよいと考える支払額であり，その組み合わせを図に描くと，それは点 $B$ の各所得と無差別曲線との差の集合として表される．それを 180 度回転させたものが図 6 であり，この曲線を支払い意志曲線と呼ぶ．補償可能曲線と違い，原点に対して凹となる．

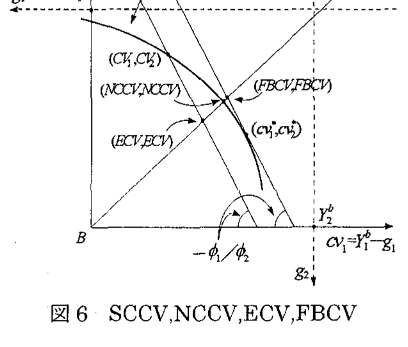


図 6　SCCV,NCCV,ECV,FBCV

(2)各便益定義の大小関係

各便益定義について，以下の関係が成り立つ．

I-4)　$FBCV \geq NCCV$　(16.1)

I-5)　$FBCV \geq ECV$　(16.2)

I-6)　$ECV\left(\begin{smallmatrix}\geq\\=\\\leq\end{smallmatrix}\right)NCCV$　(16.3)

I-4)，I-5)は図 6 及び定義から明らかである．一方，I-6)は図 6 では $ECV \leq NCCV$ であるが，直線の傾きが小さい場合や NCCV と FBCV の間にある場合には $ECV \geq NCCV$ となる．

(3)各便益定義の序列保持

不確実性下で CV を用いる場合，一般的に期待効用水準の序列は保持されない．今，期待効用水準の大小関係を次式のように仮定すると，

$$\sum_{i \in \mathbf{I}} \phi_i V(Q_i^c, Y_i^c) \geq \sum_{i \in \mathbf{I}} \phi_i V(Q_i^b, Y_i^b) \geq \sum_{i \in \mathbf{I}} \phi_i V(Q_i^a, Y_i^a) \tag{17}$$

プロジェクト $a \to c$, $a \to b$ に対する CV を定義するには，$EIL(g, Q^c, EU^a)$，$EIL(g, Q^b, EU^a)$ を用いる必要がある．EV を定義する場合に用いた $EIL(g, Q^a, EU^b)$ と $EIL(g, Q^a EU^c)$ は通常のミクロ経済学理論における効用関数と同様に，互いに交差しない等期待効用曲線である．ゆえに，FBEV と NECV は期待効用水準の序列を保持する．言い換えれば，それらは期待効用の単調変換であるということである．これに対して，$EIL(g, Q^c, EU^a)$, $EIL(g, Q^b, EU^a)$ は一般的に互いに交差する可能性がある．これは期待効用水準 $EU^a$ と同じ水準でない基準で定義されているからである．したがって，FBCV と NCCV は期待効用の単調変換であると言えず，序列を保持できない．

## 5．おわりに

筆者らはロジットモデルで立地選択行動を表した場合に拡張した便益定義も提案している[1),2),3)]．その時の各種便益の定義についても本稿と同様の検討を行っているが，それについては講演時に示す．

### 【参考文献】


1)高木朗義：防災投資の便益評価手法に関する研究，岐阜大学博士論文，1996.

2)上田孝行：防災投資の便益評価－不確実性と不均衡の概念を念頭に置いて－，土木計画学研究・講演集 19(2)，pp. 17-34，1996.

3)高木朗義，森杉壽芳，上田孝行，西川幸雄，佐藤尚：立地均衡モデルを用いた治水投資の便益評価手法に関する研究，土木計画学研究・論文集 No.13，pp.339-348，1996.

4)P.-O. Johansson : Cost-benefit analysis of environmental change, Cambridge University Press, pp.133-155, 1993.

5)Graham,D.A. : Public Expenditure Under Uncertainty, American Economic Review, Vol.82, No.4, pp. 822-846, 1992.