【土木計画学研究・講演集 No.20(2) 1997年11月】

変分不等式アプローチによる多地域一般均衡モデルの構築と解析*

Variational Inequality Approach to Multi-Regional Computable General Equilibrium Models

赤松 隆**・半田正樹***

by Takashi AKAMATSU and Masaki HANDA

1. はじめに

広域的な経済波及効果を持つ社会基盤整備プロジェクトの（地域・主体別）経済便益評価を行なうためには，経済現象の空間的広がりを考慮したモデルが必要である．従来，空間的な経済システムを扱うモデルとして，空間的価格均衡モデル，地域間産業連関モデル，立地均衡モデル，交通ネットワーク均衡モデル等の研究がなされてきた．しかし，これらは，いずれも部分均衡モデルである．

一方，経済システム全体を統一的に扱った一般均衡理論に整合的で，かつ各種政策の便益評価等に利用可能なCGE(Computable General Equilibrium)モデルを構築するという一連の研究（例えば1),2),3)）がある．しかし，そこでは空間は完全に捨象されている．

最近になって，複数の地域間の相互作用を考慮したCGE モデルがいくつか提案されている（例えば，1),4),5)）．しかし，それらの研究は，a)かなり限定的な状況のみを扱っている，b)モデルの特性に関する数理的解析が不明確，あるいは，c) 均衡解への収束が保証されたアルゴリズムが提案されていない等の多くの課題が残されているようである．

このような従来の研究の問題点に鑑み，本研究は多地域一般均衡モデルの表現・特性解析・解法開発等をsystematicに行なう枠組を示す．より具体的には，変分不等式の理論を用いて，それを実現する．

本論文の構成は以下の通りである．まず，第2節では，本研究で扱う多地域CGEモデルの基本的枠組を示す．第3節で，その定式化を示した後，第4節で，その等価変分不等式の導出及び解の特性の解析法を示す．第5節では，一般的な解析法の応用例として，生産関数等を実用的な形式に特定化すれば，このモデルが凸計画問題に帰着することを示す．

* Keywords:多地域一般均衡，変分不等式 空間的価格均衡

** 正会員 工博 豊橋技術科学大学 知識情報工学系
(〒441豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1
E-mail:akamatsu@tutkie.tut.ac.jp)

*** 正会員 Professional Programmer

2. モデルの枠組み

本稿では，空間をN個の要素を持つノード集合NとL個の要素を持つ有向リンク集合Lからなるネットワーク$G(N,L)$によって離散的に表現する．ノードは地域を表し，地域間での財の移動はリンク上のフローとして表される．

本稿のモデルでは，消費者，企業，輸送販売業者，地主の行動が明示的に記述される．全ての主体は市場で決定される価格を与件として行動する．消費者の行動は効用最大化，企業/輸送販売業者/地主の行動は利潤最大化原則により記述される．企業は，M種類の産業の何れかに属し，N個の地域の何れかに立地する．各産業は1種類の財のみを生産する．消費者は各地域のいずれかに居住し，その居住地域の企業に労働力を提供する．輸送販売業者は，財を生産地で購入し他地域へ輸送した後，消費者に販売する．土地は全て各地域別の地主によって所有され，地主は消費者・企業に土地を賃貸する．各産業rに属する企業の総数H^r，消費者総数Gは与件とする．

各地域には，M種の財，労働力および土地の市場が存在し，価格は市場で（各地域・各市場ごとに）1つの価格が決定される．ただし，財市場には，生産地市場と消費地市場があり，各々，生産地価格と消費地価格が決定される．各市場での需要・供給主体の関係は図1のようにまとめられる．

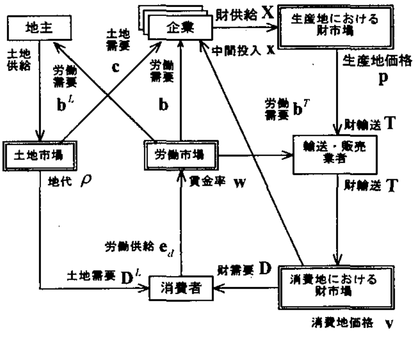

図1 本稿のモデルにおける主体の関係と各種市場

3. 定式化

本節では，各経済主体の行動モデルおよび市場均衡条件を順に定式化する．

3.1 消費者(地域別)

消費者は，価格を与件として，効用を最大化するような労働供給量，土地・財の消費パターンおよび居住地域の選択を行なう．まず，財の消費・労働供給量の選択については，もし消費者が地域d に居住するなら，以下の問題によって表現される：

$$\phi_d = \max_{\mathbf{D}_d, D_d^L, e_d} \{u(\mathbf{D}_d, D_d^L, e_d) | w_d e_d = \sum_r v_d^r D_d^r + \rho_d D_d^L\} \quad (1)$$

ここで $u(\mathbf{D}_d, D_d^L, e_d)$は消費者の効用関数，$e_d$は労働量，$w_d$は賃金率，$D_d^L$は土地需要量，$\rho_d$ は地代，D_d^r は財r の需要量，v_d^r は財r の消費地価格である．この問題の解は価格変数 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{r})$の関数であり，地域$d$の（消費者１人当りの）財・土地の需要関数および労働供給関数となる．それらは，Royの恒等式より，以下のように表現される：

$$D_d^r = -\beta_d \frac{\partial \phi_d}{\partial v_d^r} \quad \forall d,r, \quad D_d^L = -\beta_d \frac{\partial \phi_d}{\partial \rho_d} \quad \forall d$$
$$e_d = -\beta_d \frac{\partial \phi_d}{\partial w_d} \quad \forall d \qquad (2)$$

ここで$\beta_d = 1 \Big/ \dfrac{\partial \phi_d}{\partial Y_d}$，$Y_d$は消費者の所得（$= w_d e_d$）．

消費者は，全地域での間接効用$\{\phi_d\}$を比較し，その値が最大となる地域を選択する．ただし，本稿では，消費者の異質性を考慮するために，確率的な間接効用$\tilde{\phi}_d = \phi_d + \tilde{\varepsilon}_d$が最大となる居住地が選択されると考える．ここで，ランダム項$\tilde{\varepsilon}_d$が I.I.D. Gumbel分布に従うとすれば，ランダム効用理論により，居住地dを選択する消費者数は，

$$q_d = G \frac{\exp[\theta \phi_d(\mathbf{v}_d, \rho_d, w_d)]}{\sum_d \exp[\theta \phi_d(\mathbf{v}_d, \rho_d, w_d)]} \qquad (3)$$

で与えられる．ここで，θは居住地選択の分散パラメータ，Gは消費者の総数（所与）である．

3.2 企業(地域・産業別)

産業r に属する企業は，生産関数$L(\mathbf{x}_d^r, b_d^r, c_d^r)$，生産地価格 p_d^rおよび$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{r})$を与件として，利潤を最大化するような生産量・中間要素投入パターンおよび立地地域の選択を行なう．生産量・中間要素投入パターンの選択については，もし企業が地域d に立地するなら，以下の問題によって表現される：

$$\Pi_d^r = \max_{X_d^r, \mathbf{x}_d^r, b_d^r, c_d^r} \left\{ p_d^r X_d^r - \sum_s v_d^s x_d^{sr} - w_d b_d^r - \rho_d c_d^r \;\middle|\; X_d^r = L(\mathbf{x}_d^r, b_d^r, c_d^r) \right\} \quad (4)$$

ここで，$X_d^r, \mathbf{x}_d^r, b_d^r, c_d^r$は，各々，地域$d$における産業$r$の生産量，中間投入財の需要量ベクトル，労働需要量，土地需要量である．この問題の解は価格変数 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{r})$の関数であり，地域$d$の（１企業当りの）財の供給関数および労働・土地の需要関数となる．それらは，Hotellingの補題より，以下のように表現される：

$$X_d^r = \frac{\partial \Pi_d^r}{\partial p_d^r} \quad \forall d,r, \quad x_d^{sr} = \frac{\partial \Pi_d^r}{\partial v_d^r} \quad \forall d,r,s$$
$$c_d^r = \frac{\partial \Pi_d^r}{\partial \rho_d} \quad \forall d,r, \quad b_d^r = \frac{\partial \Pi_d^r}{\partial w_d} \quad \forall d,r \qquad (5)$$

産業r に属する企業は，全地域での利潤$\{\Pi_d^r\}$を比較し，その値が最大となる地域を選択する．ただし，本稿では，企業の異質性を考慮するために，確率的な利潤$\tilde{\Pi}_d^r = \Pi_d^r + \tilde{\varepsilon}_d^r$が最大となる地域が選択されると考える．ここで，$\tilde{\varepsilon}_d$が I.I.D. Gumbel分布に従うとすれば，地域dを選択する産業rの企業数は

$$z_d^r = H^r \frac{\exp[\zeta^r \Pi_d^r(p_d^r, \mathbf{v}_d, \rho_d, w_d)]}{\sum_d \exp[\zeta^r \Pi_d^r(p_d^r, \mathbf{v}_d, \rho_d, w_d)]} \qquad (6)$$

で与えられる．ここで ζ^rは立地選択の分散パラメータ，H^rは産業rに属する企業の総数(所与)である．

3.3 地主(地域別)

各地域の地主は地代ρ_d，賃金率w_dを与件として利潤を最大化するような土地供給量・労働投入量を選択する．これは以下のように表される：

$$\Pi_d^L = \max_{S_d, b_d^L} \{\rho_d S_d - w_d b_d^L | S_d = L^L(b_d^L)\} \qquad (7)$$

ここで，S_dは土地供給量，$L^L(b_d^L)$は土地生産関数，b_d^Lは労働需要量である．従って，土地供給関数・労働需要関数は，Hotellingの補題より，

$$S_d = \frac{\partial \Pi_d^L}{\partial \rho_d} \quad \forall d, \quad b_d^L = \frac{\partial \Pi_d^L}{\partial w_d} \quad \forall d \qquad (8)$$

で与えられる．

3.4 輸送販売業者

輸送販売業者は，各地域での生産地・消費地価格を与件として，利潤を最大化するような輸出地を選択する．3.1, 3.2 と同様に業者の異質性を考慮すると，地域oより財rを輸出する輸送販売業者の地域dへの輸出量は

$$T_{od}^r = z_o^r X_o^r \frac{\exp\left[\sigma_o^r\left(v_d^r - p_o^r - w_o \tilde{b}_{od}^r\right)\right]}{\sum_d \exp\left[\sigma_o^r\left(v_d^r - p_o^r - w_o \tilde{b}_{od}^r\right)\right]} \qquad (9)$$

で与えられる．ここで，σ_o^rは輸出地選択の分散パラメータ，$\tilde{b}_{od}^r$は財1単位を地域oからdへ輸送するのに必要な労働力である．

3.5 市場均衡条件

各種市場での市場清算条件（需給均衡 or 無裁定条件）は，以下の通りである：

a) 生産地財市場（財rの生産地oにおける価格p_o^r）

$$\begin{cases} p_o^r \cdot \left\{ z_o^r X_o^r - \sum_d T_{od}^r \right\} = 0 \\ z_o^r X_o^r - \sum_d T_{od}^r \geq 0, \ p_o^r \geq 0 \end{cases} \quad \forall o,r \qquad (10)$$

b) 消費地財市場（財rの消費地dにおける価格v_d^r）

$$\begin{cases} v_d^r \cdot \left\{ \sum_o T_{od}^r - \sum_s z_d^s X_d^{rs} - q_d D_d^r \right\} = 0 \\ \sum_o T_{od}^r - \sum_s z_d^s X_d^{rs} - q_d D_d^r \geq 0, \ v_d^r \geq 0 \end{cases} \quad \forall d,r \qquad (11)$$

c) 土地市場（地代ρ_d）

$$\begin{cases} \rho_d \cdot \left\{ S_d - \sum_r z_d^r c_d^r - q_d D_d^L \right\} = 0 \\ S_d - \sum_r z_d^r c_d^r - q_d D_d^L \geq 0, \ \rho_d \geq 0 \end{cases} \quad \forall d \qquad (12)$$

d) 労働市場（賃金率w_d）

$$\begin{cases} w_d \cdot \left\{ q_d e_d - \sum_r z_d^r b_d^r - b_d^L - \sum_{o,r} \tilde{b}_{do}^r T_{do}^r \right\} = 0 \\ q_d e_d - \sum_r z_d^r b_d^r - b_d^L - \sum_{o,r} \tilde{b}_{do}^r T_{do}^r \geq 0, \ w_d \geq 0 \end{cases} \quad \forall d \qquad (13)$$

以上の条件(1)～(13)を同時に満たした状態を，以下では多地一般均衡,[MRCGE],と呼ぶ．

4. 等価な変分不等式問題と解の特性

4.1 等価な変分不等式問題

[MRCGE]は，そのままでは，非線型の連立等式・不等式系であり，正確な解析や収束の保証されたアルゴリズムの開発は難しい．そこで，変分不等式問題(VIP: *Variational Inequality Problems*)への変換を考える．まず，式(3)は，形式的に，以下の様な相補性条件として表現しても等価である：

$$\begin{cases} q_d \cdot \left\{ \Omega - \phi_d + (\ln q_d)/\theta \right\} = 0 \\ \Omega - \phi_d + (\ln q_d)/\theta \geq 0, \ q_d \geq 0 \end{cases} \quad \forall d \qquad (3a)$$

$$\begin{cases} \Omega \cdot \left\{ G - \sum_d q_d \right\} = 0 \\ G - \sum_d q_d \geq 0 \end{cases} \qquad (3b)$$

（Ωは変数であるが，解析的に解けば，期待最大効用関数となる）．全く同様に，式(6),(9)も相補性条件として表現される．結局，全ての均衡条件(1)-(13)は相補性条件として表現される．そして，相補性問題はVIPの特殊ケースであるので，[MRCGE]はVIPとして表現できることが判る．すなわち，

$$\mathbf{Y} = \left[\mathbf{p},\ \mathbf{v},\ \boldsymbol{\rho},\ \mathbf{w},\ \Omega,\ \Psi,\ \mathbf{T},\ \mathbf{q},\ \mathbf{z}\right]^T$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \cdot \mathbf{X} - E_1 \cdot \mathbf{T} \\ E_2 \cdot \mathbf{T} - \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \\ \mathbf{S} - E_3 \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}^L \\ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e} - E_3 \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}^L - \mathbf{B} \cdot \mathbf{T} \\ G - E_4^T \cdot \mathbf{q} \\ \mathbf{H} - E_5^T \cdot \mathbf{z} \\ E_2^T \cdot \mathbf{v} - E_1^T \cdot \mathbf{p} - \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{w} + \Lambda \\ E_4 \cdot \Omega - \phi + \Theta \\ E_5 \cdot \Psi - \Pi + \Xi \end{bmatrix} \qquad (14)$$

と定義すると，[MRCGE]は以下の様な変分不等式問題[VIP-MRCGE]：

Find $\mathbf{Y}^* \in \mathbf{K} = \mathrm{R}_+^{\mathrm{N}^2 M + 3NM + 4N + 1}$ *such that*

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}^*) \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^*) \geq 0 \quad \forall \mathbf{Y} \in \mathbf{K} \qquad (15)$$

と等価である．ここで，**Z, Q** は各々，z_d^r, q_dを対角要素とする対角行列．Z_1はNM×(NM^2)行列で，その$(dr,d'r's)$要素はd=d *and* r=r'の場合のみ1(他は0)．Bは N×(N^{2}M)行列で，その$(d,od'r)$要素はd=d'の場合のみ$\tilde{b}_{od}^r$．E_1, E_2はN^2×(N^{2}M)行列で，その$(od,o'd'r')$要素は各々，d=d'の場合のみ1，o=o'の場合のみ1．E_3はM×(MN)行列で，その(r,dr')要素はd=d'の場合のみ1．$\Theta(\mathbf{q}), \Xi(\mathbf{z}), \Lambda(\mathbf{T})$ は各々，$(\ln q_d)/\theta$, $(\ln z_d^r)/\zeta^r$, $(\ln T_{od}^r)/\sigma_o^r$ を要素とする関数ベクトルである．

4.2 解の存在と一意性

標準的なVIPの理論を適用すれば，[VIP-MRCGE]の解の存在および一意性を解析することができる．ここでは，紙面の制約から，一意性に関する結果のみ述べると，供給量の自己価格効果が交差価格効果の総和以上であり，需要量の自己価格効果が交差価格効果の総和以上であるならば，均衡生産地価格$\mathbf{p}$，均衡消費地価格$\mathbf{v}$，均衡地代ρ，均衡賃金率$\mathbf{w}$，均衡効用Ω，均衡利潤Ψは一意に決まる．しかし，輸送量$\mathbf{T}$，居住パターン$\mathbf{q}$，立地パターン$\mathbf{z}$の一意性は必ずしも保証されない．

4.3 解の安定性

一般に，凸集合KからKへの写像**F**によって定義されたVIP(K,**F**)は，K上にベクトル場 –**F**を考えたときの場の安定点を求める問題と解釈できる．従って，

状態$\mathbf{Y}$ がその点に働く力 $-\mathbf{F}(\mathbf{Y})$の方向へ変化すると考えるのは自然である．ただし，その様な状態変化による点 $\mathbf{Y}-\alpha\mathbf{F}(\mathbf{Y})$は必ずしも許容領域$K$上にあるとは限らない．そこで， $\mathbf{Y}-\alpha\mathbf{F}(\mathbf{Y})$を$K$上へ射影した方向へ状態が変化してゆくような調整プロセス：

$$\dot{\mathbf{Y}}(t)=\mathbf{H}\big(\mathbf{Y}(t)\big)-\mathbf{Y}(t) \tag{16}$$

を考えてみよう．ここで，

$$\mathbf{H}(\mathbf{Y})\equiv \mathrm{Proj}_{\mathrm{K,Q}}\big(\mathbf{Y}-Q^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{Y})\big) \tag{17}$$

Qは適当な正定値行列， $\mathrm{Proj}_{\mathrm{K,Q}}(\cdot)$はKへの射影演算．

この調整プロセスは， $\mathbf{F}$が単調ならLyapunov安定的であることが保証される．これは，次の関数：

$$\begin{aligned}G_Q(\mathbf{Y})&=\max_{\mathbf{Z}\in\Omega}.\mathbf{F}(\mathbf{Y})\cdot(\mathbf{Y}-\mathbf{Z})-\frac{1}{2}(\mathbf{Y}-\mathbf{Z})\cdot Q(\mathbf{Y}-\mathbf{Z})\\&=\mathbf{F}(\mathbf{Y})\cdot\big(\mathbf{Y}-\mathbf{H}(\mathbf{Y})\big)-\frac{1}{2}\big(\mathbf{H}(\mathbf{Y})-\mathbf{Y}\big)\cdot Q\big(\mathbf{H}(\mathbf{Y})-\mathbf{Y}\big)\end{aligned}$$

が$\mathbf{F}$の単調性条件下ではLyapunov関数となることから証明できる（証明は紙面の制約から省略）．なお，この関数は，従来，一般的なVIPの計算アルゴリズム研究においてFukushima(1992)によって提案されたmerit関数と全く同一である．このことからも明らかなように，この調整プロセスとLyapunov関数は[VIP-MRCGE]に対する大域収束的な数値計算法の開発に応用することも可能である．

5. 関数等を特定化したモデルの解析例

第4節までで示したモデルは，生産関数・効用関数等を特定化すれば，大規模問題でも計算可能なより扱いやすい問題に変換できる．そのような特殊化の具体例として，企業/地主の生産関数はLeontief型，消費者の効用関数は準線形とし，立地選択は無いとした場合を考えてみよう．この場合，以下に示されるように，[VIP-MRCGE]は，Price変数，あるいはQuantity変数のみを未知変数とする凸計画問題に帰着可能である．なお，立地選択を導入する場合には等価な凸計画問題を構成することはできない．しかし，Price変数のみ，あるいはQuantity変数のみを未知変数とするVIP を構成することは可能である（紙面の制約によりその解析は省略する）．

5.1 Price変数表示の等価最適化問題

[VIP-MRCGE]の写像は，本節の仮定の下では，積分可能であるので，以下の凸計画問題に帰着する：

$$\min_{\mathbf{p},\mathbf{v},\rho,\mathbf{w}}.\sum_d \beta_d q_d \phi_d\big(\mathbf{v}_d,\rho_d,w_d\big) \tag{18}$$

$$\textit{subject to}\quad E_1^T\cdot\mathbf{p}+\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{w}-E_2^T\cdot\mathbf{v}\geq 0 \tag{19}$$

$$\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{v}+\mathbf{A}_1^W\cdot\mathbf{w}+\mathbf{A}_1^L\cdot\rho-\mathbf{p}\geq 0 \tag{20}$$

$$\mathbf{A}_2\cdot\mathbf{w}-\rho\geq 0 \tag{21}$$

$$\mathbf{p}\geq 0,\ \mathbf{v}\geq 0,\ \rho\geq 0,\ \mathbf{w}\geq 0 \tag{22}$$

ここで， $\beta_d=1\Big/\dfrac{\partial\phi_d}{\partial Y_d}$， Y_dは消費者の所得$(=w_d e_d)$，$\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2$はLeontief係数行列である．制約条件式(19),(20)(21)は，各々，輸送業者の輸出地選択条件，企業の利潤ゼロ条件，地主の利潤ゼロ条件を意味している．目的関数は効用の総和を利潤換算したものと解釈される．

5.2 Quantity変数表示の等価最適化問題

5.1 の凸計画問題の双対問題を考えれば，[VIP-MRCGE]は，quantity変数を明示的未知変数とする以下の凸計画問題としても表現できることがわかる：

$$\begin{aligned}\max_{\mathbf{X},\mathbf{D},\mathbf{D}^L,\mathbf{e},\mathbf{S},\mathbf{T}}.&\sum_{d,r} q_d\int_0^{D_d^r} D_{d,r}^{-1}(\omega)d\omega+\sum_d q_d\int_0^{D_d^L} D_{d,L}^{-1}(\omega)d\omega\\&-\sum_d q_d\int_0^{e_d} e_d^{-1}(\omega)d\omega\end{aligned} \tag{23}$$

$$\textit{subject to}\quad \mathbf{Z}\cdot\mathbf{X}=E_1\cdot\mathbf{T} \tag{24}$$

$$E_2\cdot\mathbf{T}=\mathbf{Z}_1\cdot\mathbf{X}-\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D} \tag{25}$$

$$\mathbf{S}=E_3\cdot\mathbf{Z}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}^L \tag{26}$$

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}=E_3\cdot\mathbf{Z}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}^L+\mathbf{B}\cdot\mathbf{T} \tag{27}$$

$$\mathbf{X}\geq 0,\ \mathbf{D}\geq 0,\ \mathbf{D}^L\geq 0,\ \mathbf{e}\geq 0,\ \mathbf{S}\geq 0,\ \mathbf{T}\geq 0 \tag{28}$$

ここで$D_{d,r}^{-1}\big(D_d^r\big)$は財$r$の逆需要関数， $D_{d,L}^{-1}\big(D_d^L\big)$は土地の逆需要関数， $e_d^{-1}\big(e_d\big)$は労働の逆供給関数である．制約条件式(24),(25),(26),(27)は，各々，生産地における財の需給均衡，消費地における財の需給均衡，土地の需給均衡，労働の需給均衡条件を意味している．また，最適状態での目的関数は社会的余剰となる．

参考文献

1) Shoven, J.B. and J.Whalley, “Applied General Equilibrium Models of Taxation and International Trade: An Introduction and Survey”, *Journal of Economic Literature* **22**, pp.1007-1051, 1984.
2) Shoven, J.B., J.Whalley, 応用一般均衡分析，東洋経済新報社, 1993.
3) 宮田譲 他, “地域経済の一般均衡モデル”, 土木計画学研究・講演集 13, pp.45-52, 1990.
4) 奥田隆明, “確率論に基づく多地域一般均衡モデル”, 地域学研究 24(1), pp.117-131, 1994.
5) 宮城俊彦, 本部賢一, “応用一般均衡分析を基礎にした地域間交易モデルに関する研究”, 土木学会論文集 530/IV-30, pp.31-40, 1996.
6) Fukushima, M., “Equivalent Differentiable Optimization Problems and Descent Methods for Asymmetric Variational Inequality Problems”, *Mathematical Programming* **53**, pp.99-110, 1992.
7) 半田正樹, 変分不等式アプローチによる多地域一般均衡モデル, 豊橋技科大・修士論文 (指導教官：赤松隆), 1997.