【土木計画学研究・講演集　No.20(2)　1997年11月】

視点に着目したファジィＡＨＰの提案

A Proposal of a Fuzzy AHP Focusing on Viewpoints

中西昌武**・木下栄蔵***
by Masatake NAKANISHI and Eizo KINOSHITA

1. はじめに

ファジィＡＨＰについては、J.J.Buckley (1985) による一対比較値のファジィ拡張等があるが、本研究はファジィ拡張ではなく「ＡＨＰそのものがすでに構造的にファジィ的である」点に着目した新しい手法を提案する。また、この手法を併用することで従来のＡＨＰ手法を機能強化することができる。

2. オリジナルＡＨＰにおける重み計算方法

Saaty(1980) はＡＨＰのモデルを作るに当たり、次のような評価の理想状態（完全に整合性がとれている）を想定した。

n 個の評価項目C1, C2, ..., Cnの本来の重みがw_1, w_2, ... w_nであるとき、C1とC2の一対比較値a_{ij}は、

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \tag{1}$$

となる。すべての評価項目の比較結果は一対比較行列$A = [a_{ij}]$で示される。

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \tag{2}$$

これに重みベクトル$W = [w_1 \quad w_2 \quad \ldots \quad w_n]^T$を右からかけると$AW = nW$となることから、評価が理想状態にあるときはＡの最大固有値の固有ベクトルとして重みベクトルを求めることが出来る（固有値n）。

このような計算方法は、現実の一対評価が理想にほぼ近い状態にあるときのみ適用が許される。この意味でSaaty のC.I.(Consistency Index)は、固有ベクトルの適用可否の判断基準と理解することもできる。

しかし現実の評価の中には、循環関係など推移関係以外の評価をよしとする場合もある。筆者は以前、そのような価値体系を抽出するための方法を示したが、本稿では、別の観点からこの問題を取り上げる。

3. 視点に着目したファジィＡＨＰ

一対比較のプロセスを子細に観察すると次のようなステップがある。なお Ci : Ci = 1 : 1 である。

(1)はじめにC_1に視点をおき、C1:C2, C1:C3, ... C1:Cn を順次一対比較する。

(2)つぎにC_2に視点をおき、同様の比較を行うが、C2:C1についてはすでにC1:C2の比較結果a_{12}が得られているので$a_{21} = 1/a_{12}$とし、C2:C3 から開始する。

(3)以下、C3, ... , Cn まで視点を移しながら評価を続ける。

ステップ(2)の$a_{21} = 1/a_{12}$だが、結果が不満な場合は見直す。Saatyは対角成分の逆数関係を要求しているので見直しはこれに従わなければならない。ここではこのことを「対角逆数ルール」と呼ぶことにする。

しかし心理学でしばしば指摘されている通り、視点を変えると同じ観察対象でも評価が変わることがある。対角逆数ルールの理想状態以外の評価への適用は、このような原始データを壊してしまう可能性がある。

そこで次のような状態を理想状態とする評価モデルをあらたに提案する。

「一対比較評価は、視点ごとに独立して行う。視点ごとに得られた原始データは必ずしも対角成分が逆数関係にある必要はない。」

このモデルは、評価結果の視点間の調整を要請しないが、評価者自身による自発的調整をさまたげるものではない。ここでの一対比較行列は複数の視点からの複眼的イメージとなる。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

---

* キーワード　ＡＨＰ、計画基礎論、計画手法論
** 正会員 名古屋経済大学　講師　経済学部
（〒484　愛知県犬山市内久保61-1
TEL / FAX 0566-27-0559）
*** 正会員　工博　名城大学　教授　都市情報学部
（〒509-02 岐阜県可児市虹ケ丘4-3-3
TEL 0574-69-0143　FAX 0574-69-0155）

このA$_1$, A$_2$, ..., A$_n$ をどのように合成するかで、評価結果は異なってくる。Saatyの固有ベクトルによる解法は、合成方法の一つに過ぎない。

視点ごとにA$_1$, A$_2$, ..., A$_n$ が異なるとは、評価対象の重みがファジィ測度であることを意味する。そこでこのモデルを「視点ファジィＡＨＰ」と呼ぶことにする。

4. 視点ファジィＡＨＰの方法

視点ごとの重みをw_i、重みの帰属度をm_iで表せば、評価対象の重みは$(w_{i1(m_1)}, w_{i2(m_2)}, \ldots\ldots, w_{in(m_n)})$のファジィ分布で表すことが出来る。ただし帰属度は評価の合成にのみ用いるので、ここではモデルを簡単にするために同じ視点についての重みの帰属度は同じであるとする。以下、さまざまな条件における視点ファジィＡＨＰの適用を考える。

4-1. 完全に整合性のとれた一対比較行列の場合

表－１は、完全に整合性（完全な推移関係であり、C.I.=0）のとれた一対比較行列である。

表－１　完全整合時の一対比較行列

対象↓ \ 視点→	C1	C2	C3	固有ﾍﾞｸﾄﾙ
C1	1	2	4	0.5714
C2	0.5000	1	2	0.2857
C3	0.2500	0.5000	1	0.1429

評価は視点ごとに独立して行われているので、表－１は、視点C1, C2, C3ごとの対象C1, C2, C3に対する評価の合成であると考えられる。それぞれの視点ごとの評価は、行ごとの評価値の合計が１になるように正規化して求める（表－２）。その結果、完全に整合性のとれた一対比較行列の場合、視点ごとの評価対象の重みはすべて固有ベクトルと一致する。

表－２　完全整合時の視点ごとの重み

対象↓ \ 視点→	C1	C2	C3
C1	0.5714	0.5714	0.5714
C2	0.2857	0.2857	0.2857
C3	0.1429	0.1429	0.1429

4-2. 不整合な一対比較行列の場合

次に、対角逆数ルールは遵守しているが、不整合が発生している場合を検討する。

表－３　不整合時の一対比較行列

対象↓ \ 視点→	C1	C2	C3	固有ﾍﾞｸﾄﾙ
C1	1	7	2	0.6444
C2	0.1429	1	4	0.2219
C3	0.5000	0.2500	1	0.1333

表－３は、推移関係に歪みが生じている。C.I.は、0.275と0.1より大きく、ストレス三角形の回転角も165.7度と大きいが、ここでは意思決定者独自の価値判断が反映しているものとする。この場合の視点ごとの評価対象の重みは表－４のように、それぞれの視点で大きく異なる。

表－４　不整合時の視点ごとの重み

対象↓ \ 視点→	C1	C2	C3
C1	0.6087	0.8485	0.2857
C2	0.0870	0.1212	0.5714
C3	0.3043	0.0303	0.1429

これは、C1評価においてC2:C3、C2評価においてC1:C3、C3評価においてC1:C2が、それぞれの視点の管轄外とされた結果を反映している。実際、循環関係が生成される場合、評価者は視点に直接関係する評価対象のみを念頭において評価していることが多い。

ここで一対比較行列の固有ベクトルWがそれぞれの視点の重み、

$$A_1 = [0.6087 \quad 0.8485 \quad 0.2857]^T \tag{4}$$

$$A_2 = [0.8485 \quad 0.1212 \quad 0.0303]^T \tag{5}$$

$$A_3 = [0.2857 \quad 0.5714 \quad 0.1429]^T \tag{6}$$

のファジィ合成結果であるとすると、各視点の帰属度m_iは、

$$M = [m_i] = [A_1 \quad A_2 \quad A_3]^{-1} W \tag{7}$$

の帰属度ベクトルで求めることができる。計算の結果、帰属度は、

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2768 \\ 0.4786 \\ 0.2447 \end{bmatrix} \tag{8}$$

となる。表－３の固有ベクトルによる計算が、視点C2を重視していることがこれでわかる。もしそれぞれの視点を均等に重視していたら、C1, C2, C3の

評価値の重みのファジィ合成結果は、

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5650 \\ 0.2638 \\ 0.1712 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

となっていたはずである。

4-3. 対角成分が逆数関係にならない場合

次に、対角成分が逆数関係にならない場合を検討する。

BuckleyのファジィＡＨＰは、評価結果のあいまいさを評価結果のファジィ拡張でモデル化したがファジィ拡張は一般に入力負荷を増大させるので出来れば避けたい。評価のあいまいさの多くが視点間の不一致や対角逆数の破れなどに現れると考えれば、これらのあいまいさは視点ファジィＡＨＰのモデルで十分対応可能である。

表－5　対角逆数にならない場合の一対比較行列

対象↓ ＼ 視点→	C1	C2	C3	固有ベクトル
C1	1	3	6	0.6171
C2	0.7000	1	0.6000	0.1964
C3	0.2000	2	1	0.1865

表－6　対角逆数にならない場合の視点ごとの重み

視点→	C1	C2	C3
C1	0.6667	0.3488	0.7692
C2	0.2222	0.2442	0.0769
C3	0.1111	0.4070	0.1538

評価表－５は対角逆数ではないが、一対比較行列の最大固有値は3.7684と、第２固有値0.9480に比べ寄与率は十分に高い結果となっている。

評価値の重みは視点ごとに異なる。各視点のファジィ合成のための帰属度は、

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5644 \\ 0.2243 \\ 0.2113 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

となり、固有ベクトルが視点C1を重視していることが分かる。もし各視点を均等に重視していれば、各視点の帰属度はすべて１／３となり、評価結果は

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5949 \\ 0.1811 \\ 0.2240 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

のように合成されるので、C2とC3の順位が逆転していたことになる。

5. ストレス低減による視点間調整の可能性

異なる視点の評価結果をどのように総合するかについては、幾つかのシナリオが可能である。ここでは、意思決定者個人の中に複数の意見が存在する場合に、各視点の評価同士を集団意思決定ストレスを援用して最小ストレスで合算する方法を紹介する。

視点ごとの評価の違いを視点ごとの見解の違いとして捉えれば、見解の食い違いの度合いを一種の集団意思決定ストレスとして指標化することが出来る。

中西・木下(1996)は、集団意思決定ストレス(Ｓ)を以下のように定義した。

i ：評価者(i＝1,..n)

j ：評価要素 (j＝1,...m)

Xij：評価者iによる評価要素jの評価結果

Gi：評価者iの格付けウェイト(合計を１とする)

Ej ：評価要素jの集団評価

$$\sum_{i=1}^{n} Gi = 1 \qquad (12)$$

$$E_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Gi \cdot Xij) \qquad (13)$$

$$S = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(Gi \cdot Xij - Ej)^2 \qquad (14)$$

原始データXijの値は、これ以上分解してはならない見解＝情報単位として扱う（評価者の評価の保存）。したがって調整可能なデータは、評価を総合するために設定された格づけウェイトGiだけとなる。集団意思決定ストレスＳが最小になるGi配分は、(12)を制約式とし(14)を最小とするGiの配分Gi*をラグランジュ法によって解く。ｎ＊ｎ行列の最大意思決定ストレスは、$(n-1)/n^3$となる。最大意思決定ストレスで意思決定ストレスを正規化した値をストレス度（D）とよぶ。

ここでは、個人内の視点間のストレスを対象とするので「視点間ストレス」と呼ぶことにする。上で得た格付けウェイトを帰属度とするファジィ合成を行えば、視点間ストレスを最小とする個人意見の形

成が可能となる。

表－１のように、完全に整合性が保証された一対比較行列の場合は、視点間ストレスは０となる。

表－３のように、対角逆数ルールは保持しているが、不整合が発生している場合はどうか。

固有ベクトルで重みを求めた場合の視点間ストレス度は24.8%（ストレス値0.01835）である。視点間ストレスを最小化するよう調整すると、ストレス度7.5%（ストレス値0.00554）まで落とすことが可能である。その場合の各視点の帰属度（格付けウェイト）は、

$$M=\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.3308 \\ 0.3773 \\ 0.2919 \end{bmatrix} \tag{15}$$

となる。ファジィ合成された評価対象の重みは、

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}=AM=\begin{bmatrix} 0.5767 \\ 0.1881 \\ 0.2352 \end{bmatrix} \tag{16}$$

となるため、いっそうC2とC3の順位逆転を促す結果となった。

6. おわりに

6-1. 視点ファジィＡＨＰと従来のＡＨＰとの関係

完全に整合する一対比較行列の場合、視点ファジィＡＨＰのすべての視点についての重みが一致し、その値は一対比較行列の固有ベクトル（従来のＡＨＰにおける重みベクトル）とも一致する。

整合性がとれていない一対比較行列の場合、視点ファジィＡＨＰの視点ごとの重みは対角逆数ルールのいかんを問わず一致しない。また視点ごとの重みを単純に合算しても一対比較行列の固有ベクトルと一致しない。

6-2. 視点ファジィＡＨＰの適用可能性

一対比較行列が視点ごとの評価のファジィ合成であるという前提に立つと、行列の固有ベクトルは、視点重視分布の反映であると見なしうる。その結果、固有ベクトル法では各視点が必ずしも均等に重視されていないことがわかったが、どのような視点間調整による結果かが明確でなく、また視点間ストレスも最適化されていない。

視点ファジィＡＨＰは、固有ベクトルによる重み計算を実施する場合の視点重視分布を解析し、またストレス度が最適となる視点重視案を提案できる。

視点ファジィＡＨＰは、対角成分が逆数でない場合にも適用できる。このことによって、意思決定者が評価に迷うときのペア比較のあいまいさを柔軟に許容するとともに、視点間ストレス度のフィードバックによって評価品質を常にウォッチすることが可能となる。

参考文献

1)Saaty, T. L. :*The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill,1980.

2)Buckley, J.J.: Fuzzy Hierarchical Analysis, *Fuzzy Sets and Systems*, 17, pp.233-247,1985.

3)中西昌武・木下栄蔵：階層分析法ＡＨＰにおける意思決定ストレスのモデル化に関する研究，土木計画学研究・論文集，No.13，1996年8月.

4)中西昌武・木下栄蔵：集団意思決定ストレス・シナリオのＡＨＰへの適用，土木計画学研究・講演集No.18，1996年.