【土木計画学研究・講演集 No.20(2) 1997年11月】

待ち行列進展と時間帯別OD需要を内生化した準動的交通均衡配分*

Semi-dynamic Traffic Assignment with Queue Evolution and Elastic OD Demand

赤松 隆**・牧野幸雄***・高橋栄行***

By Takashi AKAMATSU, Yukio MAKINO and Eikou Takahashi

1. はじめに

渋滞した道路網において交通流を予測することは，交通計画に関わる多くの技術者・研究者にとって長らく悩みの種であった．従来の静的交通均衡配分は，ある程度までの混雑は考慮できるが，渋滞状態を扱うことはできない．その最大の理由は，静的配分がフロー変数のみによって状態表現を行っていることにある．渋滞状態におけるリンク通過所要時間は存在台数に大きく依存するから，フロー変数のみによってリンク通過所要時間を決定する従来の静的配分では渋滞現象の適切な扱いは困難である．

この問題に対して，従来，いくつかの流れの研究がなされている．まず，第一の流れは，静的な均衡配分モデルをベースに，リンクコスト関数を修正するか[1]，あるいは明示的な容量制約を組み込むもの[2]である．第二の流れは，時間帯別均衡配分の研究[3)~6)]である．これは，時間帯間で道路網を通過しきれない残留OD交通量の影響を明示的に考慮したものである．第三の流れは，時々刻々のネットワーク交通流を明示的に表現した動的均衡配分の研究[7]である．

しかし，従来のいずれのモデルも，a)渋滞待ち行列進展の適切な表現，b)利用者の時間帯・経路選択行動の統一的記述，c)計算の実行可能性・効率性という要請を同時に満たすものではない．そこで，本研究は，上記 a)～c)の条件を満たした配分モデルとその計算法の開発を目標とする．これを実現するために，以下の4つの方針を採用する：(1)動的配分と静的配分の長所を取り入れた時間帯別配分の枠組で考える．すなわち，時間帯内では静的配分と同様に定常状態を仮定し，時間帯間では動的配分と同様に状態変化を考慮する．(2)待ち行列の進展を考慮するために，動的配分のリンク状態方程式と同様の条件を時間帯間で導入する．(3)利用者の時間帯・経路選択行動と均衡条件を明示的に導入し，時間帯別OD交通量を内生化する．(4)そのモデルを変分不等式の枠組で統一的に定式化・解析する．これによって収束の保証された効率的計算法の開発が実現できる．

2. 定式化

2.1 ネットワーク

道路網は，ノード集合Nおよび有向リンク集合Lからなるネットワーク$G(N,L)$として表現される．各ノードおよび各リンクは整数の連番で区別される．ODペアは起点・終点ノードのペアで表し，その集合をWと書く．また，ODペアodの経路の集合をK_{od}，全経路の集合をKと書く．あるリンクがある経路に含まれるか否かは，リンク・経路接続行列$\Delta=[\delta^{od}_{r,a}]$によって表現される（$\delta^{od}_{r,a}$はリンク$a$がODペア$od$の経路$r$上にあれば1，そうでなければ0）．

2.2 時間帯に関する仮定

本研究では，時間の流れを，ある一定の長さ T をもつ"時間帯"ごとに離散的に分割して考える．各時間帯は時刻の進行順に，0,1,2,...,M の整数連番で区別される．状態の変化は時間帯の間でのみ起こり，時間帯内では定常状態にあると仮定する．また，各時間帯の長さ T は，任意のODペア間の交通所要時間よりも大きいと仮定する．

2.3 リンクでの待ち行列進展の表現

各リンクは 非渋滞領域での走行による出口までの移動を表す“走行リンク”と，リンク下流端で生じる渋滞待ち行列を表す“待ち行列リンク”という2種類のサブ・リンクから構成されていると考える．また，(2)で仮定したように，時間帯内では（定常状態であるので）リンクa の待ち行列および流入・流出率は一定である．リンクa の時間帯 m における待ち行列台数を $X^{(m)}_a$，流入率(台数)を $x^{(m)}_a$ と書く．

待ち行列リンクでの待ち行列は，物理的な長さを無

---

* Keywords: 配分交通，渋滞．時間帯選択,変分不等式

** 正会員 工博 豊橋技術科学大学知識情報工学系
(〒441豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1
E-mail: akamatsu@tutkie.tut.ac.jp)

*** 学生会員 豊橋技術科学大学知識情報工学専攻

視した “point queue (vertical queue)” モデルで考える．また，待ち行列リンク a のサービス率には，その道路の物理的特性から決まる所与の上限があり，１時間帯当りの最大流出率(台数)を μ_a と書く．このモデルでは，待ち行列が存在せず，かつ流入率が μ_a を超えない状態では，流入フローは流入時と同一の流率で直ちに出てゆく．しかし，そうでない場合には，流出率は最大流出率となる．ただし，待ち行列長等の状態変化は時間帯間でのみ起こると考えているので，状態方程式は

$$\begin{cases} X_a^{(m)} = X_a^{(m-1)} + x_a^{(m)} - \mu_a & if\ X_a^{(m)} > 0 \\ X_a^{(m-1)} + x_a^{(m)} \le \mu_a & if\ X_a^{(m)} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

となる．また，時間帯 m にリンク a に流入した車の渋滞待ち時間は，

$$e_a^{(m)} = e_a(X_a^{(m)}) = X_a^{(m)} / \mu_a \tag{2}$$

で与えられる．以上の関係は図1のように表される．

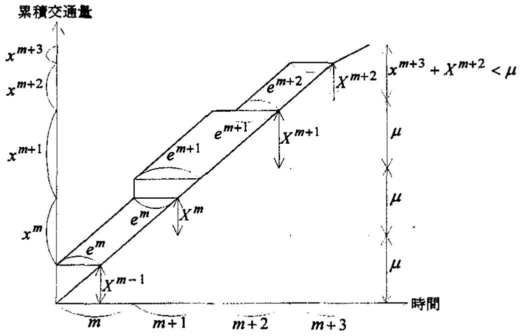

図1 時間帯間での待ち行列の進展

走行リンクでは，時間帯 m におけるリンク旅行時間は，通常の静的配分と同様のリンクコスト関数 $t_a^{(m)} = t_a(x_a^{(m)})$ で与えられると考える．従って，時間帯 m にリンク a に流入した車がリンクを通過するのに要する時間は $t_a(x_a^{(m)}) + e_a(X_a^{(m)})$ で与えられる．

2.4 利用者の経路選択均衡条件とフロー保存条件

利用者は，ＯＤペア od の r 番目経路を時間帯 m に通過するのに要する経路所要時間：

$$\begin{aligned} C_r^{od,(m)} &= \sum_a (t_a^{(m)} + e_a^{(m)})\, \delta_{r,a}^{od} \\ &= \sum_a \{t_a(x_a^{(m)}) + e_a(X_a^{(m)})\}\, \delta_{r,a}^{od} \end{aligned} \tag{3}$$

をもとに経路・時間帯の選択を行うと仮定する．より具体的には，時間帯選択を上位，経路選択を下位の階層とする Nested Logit Model に基づいた確率的均衡原則によって記述されると仮定する．すなわち，時間帯 m の経路rの交通量は，

$$f_r^{od(m)} = q_{od}^{(m)} \frac{\exp\left[-\theta C_r^{od}\left(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{X}^{(m)}\right)\right]}{\sum_r \exp\left[-\theta C_r^{od}\left(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{X}^{(m)}\right)\right]} \tag{4}$$

で与えられ，時間帯 m のＯＤペア od の交通量は，

$$q_{od}^{(m)} = Q_{od} \frac{\exp\left[-\eta\left(S_{od}^{(m)} - V_{od}^{(m)}\right)\right]}{\sum_n \exp\left[-\eta\left(S_{od}^{(m)} - V_{od}^{(m)}\right)\right]} \tag{5}$$

で与えられると仮定する．ここで，Q_{od} はＯＤペア od の全時間帯の総交通量（所与の定数），$V_{od}^{(m)}$ は時間帯 m とＯＤペア od に固有の効用（所与の定数），$S_{od}^{(m)}$ はＯＤペア od の時間帯 m の期待最小費用：

$$S_{od}^{(m)} = -\frac{1}{\theta} \ln \sum_r \exp\left[-\theta C_r^{od}\left(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{X}^{(m)}\right)\right], \tag{6}$$

θ, η は各々，経路，時間帯選択の分散パラメータ．なお，時間帯 m のリンク a の流入交通量は経路交通量と以下の関係にある．

$$x_a^{(m)} = \sum_a f_r^{od,(m)} \delta_{r,a}^{od} \tag{7}$$

以降では，式(1)-(7)を同時に満たした状態を需要変動型の時間帯別均衡配分[UEQ/ED] と呼ぶ．

3. 変分不等式問題としての表現

[UEQ/ED]は，もし時間帯別ＯＤ需要$\{\mathbf{q}^{(m)}\}$が与件と考えられるなら，問題を時間帯ごとに分解して時間の進行順に解いてゆくことができる．そして，その分解された各時間帯別配分問題と等価な不等式問題(VIP: *Variational Inequality Problems*)，さらには，等価な凸計画問題を導出することも可能である（紙面の制約により，その具体的提示は省略）．しかし，$\mathbf{q}^{(m)}$を式(5) によって内生的に決定するためには，全ての時間帯を同時に連立して解析しなければならない．なぜなら，各時間帯の $\mathbf{q}^{(m)}$を決定するには，全時間帯での均衡コスト$\{\mathbf{S}^{(m)}\}$が同時に必要となるからである（一方で，$\mathbf{q}^{(m)}$が決っていなければ，各時間帯の $\mathbf{x}^{(m)}$，$\mathbf{X}^{(m)}$，ひいては$\mathbf{S}^{(m)}$も決定できない）．

さて，全時間帯を同時に連立した等式・不等式系(1)～(7) は，そのままではモデル特性の解析・アルゴリズムの開発等が難しい．しかし，(1)～(7)は全て相補性形式として表現可能，すなわち，[UEQ/ED]は

標準形の相補性問題となっていることに注意しよう（待ち行列の進展条件式(1)およびフロー保存条件式(4b)も相補性条件として表現できる）．このことを用いると，その相補性問題と等価な VIP を容易に構成できる．ここでは紙面の制約もあるため，その記述は省略し，その VIP をさらに変換して得られる（より解析しやすい）二種類の等価 VIP のみを示す．なお，以下の記述では，時間帯を表す添字の無いベクトルは，原則として，各時間帯ごとの変数ベクトルを 1 列にまとめて並べた列ベクトルを意味する（eg. $\mathbf{x}=(\mathbf{x}^{(1)},..,\mathbf{x}^{(m)},..,\mathbf{x}^{(M)})^T$）．

3.1 Quantity変数を未知変数とするVIP

まず，以下の様に定義される許容領域Ω_{P}：

$$\left\{(\mathbf{q},\mathbf{f},\mathbf{x},\mathbf{X})\left|\begin{array}{l}\mathbf{E}_1\mathbf{q}=\mathbf{Q},\mathbf{E}_2\mathbf{f}=\mathbf{q},\mathbf{q}\geq\mathbf{0},\mathbf{f}\geq\mathbf{0},\mathbf{x}=\Delta_1\mathbf{f},\\ \mu-\mathbf{X}^{(m-1)}+\mathbf{X}^{(m)}-\mathbf{x}^{(m)}\geq\mathbf{0}\forall m,\ \mathbf{X}\geq\mathbf{0}\end{array}\right.\right\}$$

を考えよう．ここで，$\mathbf{E}_1$は対角要素に$|W|$個のM次元横ベクトル $\mathbf{1}$=[1,....,1] をもつブロック対角行列，$\mathbf{E}_2$は対角要素にM個の行列$\mathbf{E}$をもつブロック対角行列，Δ_1は対角要素にM個の行列Δを持つブロック対角行列，$\mathbf{E}$ は対角要素に$|W|$個の$|K_{od}|$次元横ベクトル $\mathbf{1}$=[1,....,1] を持つブロック対角行列．この許容領域を用いると，[UEQ/ED] は(q,f,x,X)を明示的な未知変数とする以下のVIPとして表現できる（証明は紙面の制約により省略）：

[VIP/ED-Primal]　*Find* $(\mathbf{q}^*,\mathbf{f}^*,\mathbf{x}^*,\mathbf{X}^*)\in\Omega_{\mathrm{P}}$ *such that*

$$\sum_m \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(m)*})\cdot\left(\mathbf{x}^{(m)}-\mathbf{x}^{(m)*}\right)+\frac{1}{\theta}\sum_m \ln\mathbf{f}^{(m)*}\cdot\left(\mathbf{f}^{(m)}-\mathbf{f}^{(m)*}\right)$$
$$+\sum_m \mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{X}^{(m)*}-\mathbf{X}^{(m+1)*}\right)\cdot\left(\mathbf{X}^{(m)}-\mathbf{X}^{(m)*}\right)$$
$$+\sum_m\left(\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\theta}\right)\ln\mathbf{q}^{(m)*}-\mathbf{V}^{(m)}\right)\cdot\left(\mathbf{q}^{(m)}-\mathbf{q}^{(m)*}\right)\geq 0$$
$$\forall(\mathbf{q},\mathbf{f},\mathbf{x},\mathbf{X})\in\Omega_{\mathrm{P}}\quad (8)$$

ここで，$\mathbf{M}$ は対角要素にμ_aを持つ$|L|\times|L|$対角行列である．式(8)左辺の第1・2項は各時間帯別の静的確率均衡配分に対応した項である．第3項は待ち行列遅延に関する項である．かりに時間帯別ＯＤ需要を与件としたモデルを考えるなら，この項は各時間帯mでの$\mathbf{X}^{(m)}$による影響を独立に考えられる形式に分解される．しかし，[VIP/ED-Primal] では，全時間帯の変数を同時に考えねばならないため，各時間帯mにおいて，隣接時間帯の相互干渉効果（$\mathbf{X}^{(m)}-\mathbf{X}^{(m+1)}$）を同時に考慮しなければならないというやや複雑な形式となっている．第4項は時間帯選択に関する項であり，その中の対数項は時間帯選択を確率的に考えたための付加項である．

このVIP は，残念ながら，等価な最適化問題に帰着させることはできない．なぜなら，式(18)左辺第3項 $\{\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{X}^{(m)}-\mathbf{X}^{(m+1)})\}$ が積分不可能（Jacobianが非対称）だからである．

3.2 Price変数を未知変数とするVIP

次に，以下の様に定義される許容領域 Ω_{D}：

$$\{(\mathbf{t},\mathbf{e},\mathbf{S},\mathbf{T})|\ \mathbf{e}\geq\mathbf{0},$$
$$S_{od}^{(m)}\leq-\frac{1}{\theta}\ln\sum_r\exp[-\theta\sum_a(e_a^{(m)}+t_a^{(m)})\,\delta_{r,a}^{od}]\ \forall m,\forall od,$$
$$T_{od}\geq\frac{1}{\eta}\ln\sum_m\exp[\eta\,(V_{od}^{(m)}-S_{od}^{(m)})]\,\}\qquad\forall od$$

を考えてみよう．この許容領域を用いると，[UEQ/ED] は(t, e, S, T)を未知変数とする以下のVIPとして表現できる（証明は紙面の制約により省略）：

[VIP/ED-Dual]　*Find* $(\mathbf{t}^*,\mathbf{e}^*,\mathbf{S}^*,\mathbf{T}^*)\in\Omega_{\mathrm{D}}$ *such that*

$$\sum_m\mathbf{x}(\mathbf{t}^{(m)*})\cdot\left(\mathbf{t}^{(m)}-\mathbf{t}^{(m)*}\right)+\mathbf{Q}\cdot\left(\mathbf{T}-\mathbf{T}^*\right)$$
$$+\sum_m\left(\mu-\mathbf{M}(\mathbf{e}^{(m-1)*}-\mathbf{e}^{(m)*})\right)\cdot\left(\mathbf{e}^{(m)}-\mathbf{e}^{(m)*}\right)\geq 0$$
$$\forall(\mathbf{t},\mathbf{e},\mathbf{S},\mathbf{T})\in\Omega_{\mathrm{D}}\quad (9)$$

ここで $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ はリンクコスト関数の逆関数ベクトル．なお，[VIP/ED-Primal]の場合と同様，このVIP は，等価な最適化問題に帰着させることはできない．

4. 均衡解の存在と一意性

4.1 解の存在

変分不等式問題に対する標準的な解の存在定理を [VIP/ED-Primal] に適用すれば，[UEQ/ED] の均衡解の存在を検討することができる．ここでは，紙面に制約があるため，結果のみ簡単に述べる．各時間帯の待ち行列長 $\mathbf{X}^{(m)}$に関する上限が無い場合には，均衡解の存在を保証することは難しい（存在しないことを保証しているのではない．この場合の詳細な解析は今後の課題である）．しかし，各時間帯の待ち行列長が単位時間帯当りの最大リンク流出台数よりも大きくならないと仮定すれば（i.e. ３つ以上の時間帯にまたがってリンクに滞留する車は無いと仮定すれば），均衡解の存在が保証される．

4.2 解の一意性

[UEQ/ED] の均衡解は，[VIP/ED-Primal] の写像 $\mathbf{F(Y)} = [\{\mathbf{t}(\mathbf{x}^{(m)})\}, \{\ln \mathbf{f}^{(m)} / \theta\}, \{\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{X}^{(m)} - \mathbf{X}^{(m+1)})\}, \{\ln \mathbf{q}^{(m)}) / \eta - \mathbf{V}^{(m)}\}]$ が $\mathbf{Y}=(\mathbf{q},\mathbf{f},\mathbf{x},\mathbf{X})$ に関して Ω_P 上で狭義単調，すなわち，

$$(\mathbf{F}(\mathbf{Y}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{Y}_2)) \cdot (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2) > 0 \quad \forall \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2 \in \Omega_\mathrm{P}, \mathbf{Y}_1 \neq \mathbf{Y}_2 \tag{10}$$

であれば一意に決まる．ここで，上記の$\mathbf{F(Y)}$の４種類のブロック要素写像は，それぞれ，**x, f, X, q** のみの関数である．従って，各ブロック要素写像が対応する各変数に関して狭義単調であることが言えれば，均衡解の一意性が保証される．まず，$\{\mathbf{t}(\mathbf{x}^{(m)})\}$ については，本研究のモデルではリンクコスト写像がリンク毎に独立に分解可能で，リンク交通量に関して単調増加であると仮定しているので，明らかに**x** に関して狭義単調である．また，$\{\ln \mathbf{f}^{(m)} / \theta\}$, $\{\ln \mathbf{q}^{(m)} / \eta - \mathbf{V}^{(m)}\}$]は，対数関数の単調性から，それぞれ **f, q** に関して明らかに狭義単調である．最後に，$\{\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{X}^{(m)} - \mathbf{X}^{(m+1)})\}$ については $R_+^{|L| \times \mathrm{M}}$ 上では単調であるとは言えない．しかし，**X**の許容領域をΩ_P内に限定すれば，狭義単調であることが証明される（紙面の制約により正確な証明は省略する．直感的な理解を助けるため，$|L|$=1, M=2 の場合の $\{\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{X}^{(m)} - \mathbf{X}^{(m+1)})\}$ によるベクトル場を図2 に示しておく）．以上より，$\mathbf{F(Y)}$はΩ_P上で狭義単調であり，[UEQ/ED] の均衡解は一意に決ることがわかる．

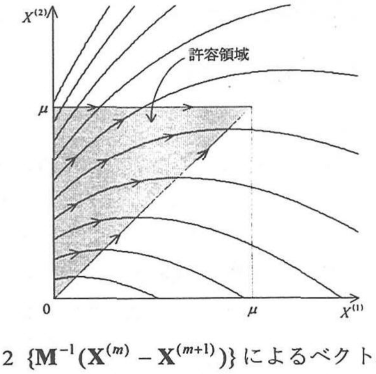

図２ $\{\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{X}^{(m)} - \mathbf{X}^{(m+1)})\}$ によるベクトル場

５．おわりに

本稿では，リンクでの渋滞の進展と利用者の時間帯選択行動を同時に内生化した時間帯別均衡配分モデルの構築と解析を行った．

均衡解の計算法の提示については，紙面の制約により割愛した．要点のみ述べると，[VIP/ED-Primal] あるいは[VIP/ED-Dual]を利用することにより様々な収束的アルゴリズムの構成が可能である．例えば，[VIP/ED-Dual]を利用するなら，式(9) 左辺の第３項を非線型Jacobi近似した問題を考えればよい．その緩和問題は，赤松(1997)で議論されている需要変動型確率均衡配分問題とほぼ同様の構造となり，Akamatsu(1996)のアルゴリズムを組合わせて効率的に解くことができる．また，[VIP/ED-Primal]を利用する場合も，時間帯別に分解された問題の等価最適化問題を利用し，効率的に解くことができる．

なお，本稿で提案したモデルでは，渋滞が上流リンクへ延伸してゆくほど混雑した状況までは正確に扱うことができない．また，時間帯別OD交通量のネットワーク内残留量とリンク待ち行列の関係については，やや不明確な点が残されている．これらの点については，今後の研究課題としたい．

参考文献

1) I.Okutani, “Equilibrium Flows in a Network with Congested Links”, *Proc. of the 9th ISTTT*, pp.253-271,1984.
2) 井上博司, “混雑した道路網における交通均衡およびその数値解法”, 土木学会論文集, No.365, pp.125-133, 1986.
3) 河上省吾・溝上章志・鈴木稔幸, “交通量の時間的変動を考慮した道路交通量配分手法に関する研究”, 交通工学, Vol.20(6), 1985.
4) 藤田素弘・松井寛・溝上章志, “時間帯別交通量配分モデルの開発と実用化に関する研究”, 土木学会論文集, No.389, pp.111-119, 1988.
5) 藤田素弘・山本幸司・松井寛, “渋滞を考慮した時間帯別交通量配分モデルの開発”, 土木学会論文集, No.407, pp.129-138,1989.
6) 宮城俊彦・牧村和彦, “時間帯別交通配分手法に関する研究”, 交通工学,Vol.26(2), pp.17-27, 1991
7) 赤松隆, “交通流の予測・誘導・制御と動的なネットワーク配分理論”, 土木計画学研究・論文集 **13**, pp.23-48, 1996.
8) 赤松隆, “安定的ネットワーク均衡状態を保証するための交通施策問題に関する研究”, 平成７・８年度文部省科学研究費補助金（基盤研究Ｂ２）研究成果報告書, 1997.
9) T.Akamatsu, “Cyclic Flows, Markov Process and Transportation Stochastic Assignment”, *Transportation Research* **30B**, pp. 369-386, 1996.