【土木計画学研究・講演集 No.20(2) 1997年11月】

非線形感度分析を用いたラムゼイ価格均衡モデルの計算手法*

An application of nonliner sensitivity analysis to Ramsey price equilibrium model

宮城俊彦** 鈴木崇児***
Toshihiko MIYAGI Takaji SUZUKI

1．はじめに

規模の経済が働く状況下で企業が限界費用価格設定を行った場合、赤字が発生し、経営を維持していくことが困難になる。このような状況下では、ラムゼイ価格設定等[1]の次善価格設定の方法が重要となる。ラムゼイ価格基準を用いた公共交通機関の料金設定は、企業のゼロ利潤いわゆるブレイクイーブンを保証した上で社会的厚生を最大化するように料金を決定する問題となる。

従来から、ラムゼイ価格基準を用いて公共交通機関の料金設定を扱う分析[2]が行われてきたが、これらの応用では料金設定によって生じる公共交通機関と自動車の間の競争が考慮されていない。これに対し、宮城ら[3]はラムゼイ価格基準を多手段ネットワーク均衡の枠組みで再構成し、上位問題をラムゼイ価格基準を用いた社会的厚生の最大化問題とし、下位問題を機関分担配分同時モデルとする２段階最適化問題としてラムゼイ価格均衡問題(Ramsey Price Equilibrium Problem:RPEP)を提案した。その後、宮城・鈴木[4]はRPEPの下位問題を変分不等式問題として再定式化し拡張を行った。この種の問題に対する解法は、Tobin and Friesz[5]や Yang and Yagar[6]によって提案されている。本研究では、これらを参考として非線形感度分析を用いてラムゼイ価格均衡問題の計算手法を構築し例題計算を行うことを目的とする。

2．ラムゼイ価格均衡モデル

上位問題において、公共交通機関のサービスの供給主体である交通企業は、料金設定でサービス水準を制御する。料金設定に対する利用者の反応は、与えられた料金に従って生じる利用者均衡状態として下位問題で記述される。この問題の構造は、シュタッケルベルグのリーダー・フォロアー問題として知られている。ここでは、図１に示すような単一ＯＤペアに対する概念的なネットワークに対して定式化を行う。

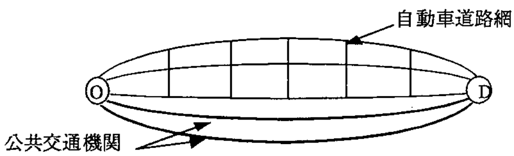

図１ 単一ＯＤペアに対する多手段ネットワーク

本モデルでは交通機関のフローが相互に独立したネットワーク均衡問題を２手段均衡問題の枠組み[7]で扱う。自動車と公共交通機関の交通需要の分担量はロジット型の関数に従うものとし、自動車と公共交通機関のそれぞれのモード内では一般化費用に関して利用者均衡状態が成立すると仮定する。このとき個々の公共交通機関は単一の経路に対応するため、各機関の需要量は経路交通量として決まる。また、公共交通機関に対してはブレイク・イーブン制約が課されるものとする。以上のRPEPは以下のように定式化できる。

[RPEP-1]

U1) $$Max.\,\Pi(h,p)=\theta\bar{q}\ln\sum_{m=1,2}\exp\left(\frac{-u^m}{\theta}\right)+\sum_{k\in\Lambda_i^2}\left(p_k h_k-T_k(h(p))\right)\quad(1a)$$

$$s.t.\ \sum_{k\in\Lambda_i^2}\left(p_k h_k-T_k(h(p))\right)\quad(1b)$$

L1) (q*,h*)は以下の変分不等式の解である。

$$C(h^*)^T(h-h^*)-w\left(q^{1^*}\right)\left(q^1-q^{1^*}\right)\geq 0,\ \forall(h,q)\in\Omega\quad(1c)$$

$$\Omega=\left[h:q=\Lambda h,h\geq 0\right]\quad(1d)$$

$$\Omega'=\left[v:v=\Delta h,q=\Lambda h,h\geq 0\right]\quad(1e)$$

ここで

u^m：均衡時のモードmを利用した旅行費用（$u^m=p^m+\beta t^m$, p^m, t^mは料金と旅行時間）

*キーワーズ：配分交通、２段階最適化問題

**正員 工博 岐阜大学地域科学部
***正員 岐阜大学工学部土木工学科
（岐阜市柳戸 1-1, TEL058-293-2446 FAX230-1528）

$\bar{q}$：ＯＤ間の総交通量

q^1, q^2：モードｍへの（=1自動車,=2マストラ）の分担量

h_k, p_k, C_k, T_k：k番目経路の交通量、料金、旅行費用、供給費用

K：補助金

Δ, Λ：リンクパス、ＯＤパス接続行列

$w(q^1)^{-1} = \bar{q}/(1+\exp(u^1-u^2))$

下位問題のＶＩの解（q^{1*}, h^*）についての必要条件はTobin and Frieszの定理１[5)]から以下のように与えられる。

$$-w(q^{1*}) - \varphi + E\mu = 0 \quad (2a)$$

$$C(h^*) - \lambda - \Lambda^T\mu = 0 \quad (2b)$$

$$\varphi^T q^* = 0 \quad (2c)$$

$$\lambda^T h^* = 0 \quad (2d)$$

$$\Lambda h^* - q^* = 0 \quad (2e)$$

$$\varphi \geq 0, \lambda \geq 0 \quad (2f)$$

ここで$\varphi \in R^I, \lambda \in R^{k1+k2}, \mu \in R^{2I}$はラグランジュ未定乗数でＥはeを単位とする次元Ｉの単位行列$E = [e \ -e]$。ただし、この連立方程式は、経路フローが一意に決まらないためにTobin and Frieszの定理３[5)]を満足せず十分条件とはならない。

３．非線形感度分析の適用

シュタッケルベルグ均衡状態を想定することは、交通企業が現在の料金水準に対して追加的に値上げや値下げを行った場合、機関選択やその結果生じるネットワークフローの変化に関する情報を利用して意思決定することを暗に仮定している。このため計算手法としては、機関選択と道路ネットワーク上での混雑の変化を同時に取り扱うようにネットワーク均衡条件式(2)を上位問題に含めて均衡解を求めなければならない。

ネットワーク均衡条件式(2)の均衡解の存在と一意性が保障される場合には、パラメトリックな最適解h*とラグランジュ未定乗数$\Psi = [\lambda, \mu, \varphi]$は独立変数である価格ベクトルの陰関数h(p), η(p)として表される[8)]。その結果、RPEPはさらに簡略化して以下のように定式化できる。

$$\underset{p}{Max}.\Pi(p,\eta(p)), \quad s.t. PS(p,\eta(p)) \leq K \quad (3)$$

下位問題の勾配が上位問題の意思決定変数に関連して得られれば、それをもとに上位問題の勾配が計算でき、標準的な非線形最適化問題に対する多くのアルゴリズムが利用者均衡問題を下位問題にもつ２段階最適化問題の解法として適用可能となる。この計算手法として非線形感度分析は次の２つの性質から有効である[5)]。１つめは、すべてのパラメータの摂動に対して一般的にネットワーク均衡状態が生じること、２つめは、このタイプの感度分析は摂動変数に関する意思決定変数と制約条件式に対する未定乗数の変化のみを計算すればよいことである。摂動ネットワーク均衡問題は以下の摂動変分不等式として記述できる。

以下の不等式を満たす$h^* \in \Omega(\varepsilon)$が均衡フローとなる。

$$C(h^*,\varepsilon)^T(h-h^*) - w(q^{1*},\varepsilon)^T(q^1-q^{1*}) \geq 0, \forall(h,q) \in \Omega(\varepsilon) \quad (4a)$$

$$\Omega(\varepsilon) = [h | \Lambda h = q(\varepsilon), h \geq 0] \quad (4b)$$

ここで ε は摂動変数ベクトルを表す。

一般に利用者均衡状態では、リンク交通量が一意に決まっても経路交通量は一意に決まらないため、この定式化から導かれる(2)に対応する条件もTobin and Friesz定理３[5)]を満足しないので最適解の必要十分条件とはならない。すなわち、摂動変数に関する解h*の勾配は常に一意には存在しない。そこで、解v*(0)が与えられたとして、摂動変数に対する下位問題の勾配を計算するために必要なことは、凸多面体$\Omega(\varepsilon)$の中からh*(0)を満たす$\Gamma^*(0)$の非退化の端点である経路パターンを選ぶことである。非退化の端点を含む経路フローの解集合は以下のように定義される。

$$\Gamma^*(\varepsilon) = [h | \Delta h = v^*, \Lambda h = q(\varepsilon), h \geq 0] \quad (5)$$

特定の経路フローパターンの存在は、全ての接続されている経路で起終点間が正のフローを持てば、すべての非負のリンクフローは特定の経路フローパターンで表現することができるというフロー分解原理[9)]で保証される。FW法の最短経路探索のような経路発生手法がh*(0)を発生させるのに用いることができるが、h*(0)を発生させる一つの方法は、均衡時のリンクフローv*(0)をリンク容量とし、そのネットワークのリンク容量に一致する経路フローパターンを線形計画問題を用いて解く

ことである[5)8)]。

ここで配分される経路があらかじめ特定でき、問題が正のフローを持つリンクのみに限定できる場合を考える。正のパスフローのみを考慮すればよいので$\lambda, \varphi = 0$。また、非負制約は均衡解の近傍では摂動変数が変化しても必ず満たされる。よって均衡条件式(2)は以下のように簡略化される。

$$-w^{\circ}(q^{1*},0)+E\mu=0 \tag{6a}$$
$$C^{0}(h^{*},0)-\Lambda^{0T}\mu=0 \tag{6b}$$
$$\Lambda^{0}h^{*}-q^{*}(0)=0 \tag{6c}$$

このとき、Λ^{T}の列ベクトルは線形独立であり、μは一意に決まる。一意な解ベクトルをμ^*と表記する。連立方程式(6)はTobin and Frieszの定理4[5)]を満足するため. εに関するh^{0*}の勾配が計算できる。連立方程式(6)の(h^{0},μ)に関するヤコビアンと$\varepsilon=0$での値は以下のようになる。

$$J_{q^{0},h^{0},\mu}=\begin{bmatrix}-\nabla_{q}w^{\circ}(q^{*},0) & 0 & E\\ 0 & \nabla_{h}C^{0}(h^{*},0) & -\Lambda^{0T}\\ E^{T} & \Lambda^{0} & 0\end{bmatrix} \tag{7}$$

$$J_{\varepsilon}=\begin{bmatrix}-\nabla_{\varepsilon}w^{\circ}(q^{*},0)\\ \nabla_{\varepsilon}C^{0}(h^{*},0)\\ -\nabla_{\varepsilon}q(0)\end{bmatrix} \tag{8}$$

摂動変数に対する陰関数定理から、下位問題の摂動変数に関する解ベクトルの勾配が得られる。

$$\begin{bmatrix}\nabla_{\varepsilon}q^{\circ}\\ \nabla_{\varepsilon}h^{\circ}\\ \nabla_{\varepsilon}\mu\end{bmatrix}=J^{-1}_{q^{0},h^{0},\mu}\bullet J_{\varepsilon} \tag{9}$$

先述のように、いったん摂動変数に関する意思決定変数の勾配が得られれば、以下のように上位問題での目的関数の勾配を計算することができる。

$$\nabla\tilde{\Pi}(p)=\nabla_{p}\Pi(p,h)+\left[\nabla_{q}\Pi(p,h),\nabla_{h}\Pi(p,h),0\right]\begin{bmatrix}\nabla_{\varepsilon}q\\ \nabla_{\varepsilon}h\\ \nabla_{\varepsilon}\mu\end{bmatrix}$$
$$=\nabla_{p}\Pi(p,h)+\nabla_{h}\Pi(p,h)\nabla_{\varepsilon}h$$

$$\nabla\tilde{g}(p)=\nabla_{p}g(p,h)+\left[\nabla_{q}g(p,h),\nabla_{h}g(p,h),0\right]\begin{bmatrix}\nabla_{\varepsilon}q\\ \nabla_{\varepsilon}h\\ \nabla_{\varepsilon}\mu\end{bmatrix}$$
$$=\nabla_{p}g(p,h)+\nabla_{h}g(p,h)\nabla_{\varepsilon}h$$

4. 例題計算

図2に示すネットワークに対して例題計算を行う。郊外地区を表すセントロイド1、2からCBDを表すセントロイド4へそれぞれ2万人が通勤・通学しているものと仮定する。LRTはこの地域の地方自治体によって計画されており、LRTが完成するとODペア1-4はそれぞれ1経路に対応する新交通とバス、自動車によって結ばれる。ODペア2-4は2経路の性質の異なる自動車経路で接続されているものとする。バスと自動車のフローはリンク(1,3,6,7)上では相互に独立していると仮定する。ここで、図2に対してRPEPを定式化する。

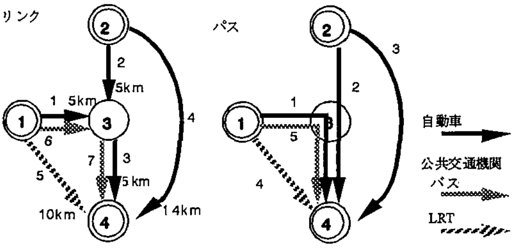

図2　単純化した都市交通ネットワーク

[RPEP-2]

U2) $$Max.\Pi(h,p)=A+\theta q_{14}\ln\sum_{m\in1,2}\left(\frac{-\mu^{m}_{14}}{\theta}\right)-q_{24}\mu^{1}_{24}+\sum_{k\in4,5}\left(p_{k}h_{k}-T_{k}(h(p))\right) \tag{10a}$$

$$s.t.\sum_{k\in4,5}\left(p_{k}h_{k}-T_{k}(h(p))\right)\le K \tag{10b}$$

L2)　　L1と同様

ここで $A=\sum_{i\in I}\bar{q}_{i}a_{i}$ は総トリップに対する総交通余剰を表すものとする。

U2の目的関数は社会的厚生の最大化を表しており、第3項までで2つのODペア間の全ての経路の旅行に対する消費者余剰を表しており、最後の項は生産者余剰を表している。

つぎに、リンクコスト関数は料金と旅行時間を用いた一般化費用で表されるものとし、自動車(a=1-4)とバス(a=6,7)の道路リンク上でのフローと所要時間の関係はBPR型の関数を用いる。なお、時間価値は40(円/分)とした。また、LRTの所要時間はフローの水準に依らず一定とした。

$$t_{a}(v_{a})=t_{a0}\left\{1+0.15(v_{a}/Q_{a})^{4}\right\},a\in1,2,3,4 \tag{11}$$

$$t_a(v_a) = t_{a0}\{1 + 0.15(v_a / 40)\}, a \in 6,7 \qquad (12)$$

ここで、

$t_a(v_a)$:リンクaの所要時間
t_{a0}:リンクaのゼロフロー時の所要時間
v_a:fリンクaのフロー
Q_a:リンクaの設計容量

その他のLRTとバスの運営形態を表1に示す。交通企業がサービスを供給するための費用はLRTとバスのサービスは結合生産されているものとし、(14)のコブダグラス型の結合費用関数で表されるものとする。なお、関数形とパラメータは日本のバス会社81社のデータを用いて推定した宮城・中津原[10]を参考とした。

$$T(h_4, h_5) = FC_L + 0.001P^{0.2}H^{2.0}L^{0.5} \qquad (14)$$

ここで、

FC_L: LRT の建設費用　P : 運行費用
H : 旅客数　L : 総営業キロ

表1　LRTとBUSの運営形態

	LRT	BUS
路線長	10km	10km
運行速度	20km/hr	10km/hr
営業時間	7:00 - 22:00	7:00 - 22:00
運行距離	1200km/day	300km/day
建設費用	20億円/km	——
補助率	建設費の65%	1000×旅客数^0.7円/day

5. 計算結果

例題計算の場合には、比較的少ない9回の繰り返し計算で最適解へ収束した。LRTとバスの最適料金は315円と271円となり、このときの利用者数はそれぞれ2556人と984人となった。例として計算過程のLRTの料金の変化を示す。これらの解は公共交通機関だけでなく自動車ネットワークの混雑も考慮した結果として計算されており、交通企業に対するブレイクイーブン条件のもとで都市交通システム全体に対しての最適な料金設定と言える。このことは、補助率を高くして計算を行った結果、公共交通機関の料金が下がるだけでなく、ODペア2-4間を含む道路網全体に時間短縮効果が観察されたことからも判断できる。

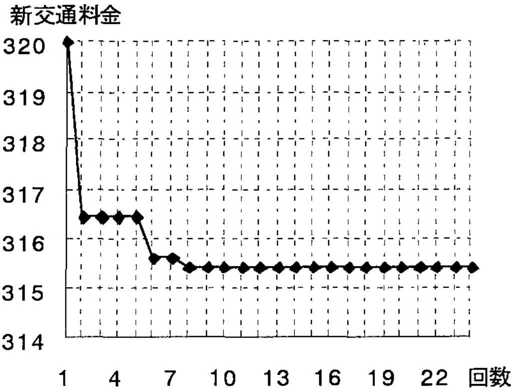

図3　LRT料金の収束過程

参考文献

1)Ramsey, F. (1927). A contribution to the theory of taxation. **Economic Journal, 37(1)**, 47-61.

2)Train, K.E. (1977). Optimal transit prices under increasing returns to scale and a loss constraint. **Journal of Transport Economics and Policy, 11(2)**, 185 - 194.

3)Miyagi, T., K.Izuhara and J.Morishima (1992). Ramsey optimal pricing in guideway bus system competitive with private automobile. **Papers presented at WCTR 92'**, Lyon, France.

4)Miyagi, T. and Suzuki, T.(1996) A Ramsey price equilibrium model for urban transit systems: A bilevel programming approach with transportation network equilibrium constrains. **7th WCTR Proceeding 2**, 65-78

5)Tobin, R.L. and T.L. Friesz (1988). Sensitivity analysis for equilibrium network flow. **Transpn. Sci., 22**, 242-250.

6)Yang, H. and Yagar S. (1994). Traffic assignment and traffic control in general freeway-arterial corridor systems. **Transpn. Res-B, 28B(6)**, 463-486.

7)志水清孝(1982).多目的と競争の理論、共立出版、東京、216-225

8)Florian, M. and H.Spiess (1983). On binary mode choice/assignment models. **Transpn. Sci. 17(1)**, 32-47.

9)Ahuja, R.K., T.L. Magnanti and J.B. Orlin (1983). **Network Flows : theory, algorithms, and applications**. Prentice-Hall International, Englewood cliffs, NJ.

10)宮城俊彦・中津原勢司(1995).公共輸送企業の費用構造と輸送効率性分析、運輸と経済**55-11**, 24-31.