

## 空間的依存性を考慮した空間計量モデルの統計的推測手法に関する考察\*

### *A Study on the Statistical Inference Methods of the Spatial Econometric Model in the Presence of Spatial Dependency\**

福本潤也\*\*・堤盛人\*\*\*・清水英範\*\*\*\*

By Jun-ya FUKUMOTO\*\*・Morito TSUTSUMI\*\*\*・Eihan SHIMIZU\*\*\*\*

#### 1. はじめに

社会資本整備プロジェクトを客観的、定量的に評価する場合、地価モデルや交通・立地モデルといった空間計量モデルの利用が不可欠である。ただし、空間計量モデルにおいては、空間的依存性、空間的異質性、可変地区単位問題といった空間概念に起因する統計学的問題がモデルの推定および検定に影響を及ぼすことが知られており、これに対する適切な処置を欠くと分析の信頼性が低下してしまう<sup>1)4)</sup>。

そこで、本研究ではまず空間概念に起因する統計学的問題について整理を行う。次に空間的依存性の問題に着目し、空間計量経済学や計量地理学において提案されてきた既存の解決法を整理し、それらの一般形を示すことにより各手法の位置づけを明らかにする。最後にそれらの結果を踏まえ、さらに既存研究を参考としながら、実際に分析を行う場合における分析手順の指針を示すことを試みる。

#### 2. 空間概念に起因する統計学的問題

空間概念に起因する統計学的問題として、空間的依存性、空間的異質性、可変地区単位問題を説明する。ただし、これらは独立に生じる現象ではなく、相互に関連していることに注意されたい。

##### (1) 空間的依存性

クロス・セクションデータに対して回帰分析などを行う場合、データの測定問題やモデルから抜け落ちたデータ間の外部効果や波及効果のためにデータサンプルの誤差項同士に相関が残る、すなわち空間的自己相関 (Spatial Autocorrelation) が存在することがある。また、空間相互作用や空間拡散過程といった空間過程 (Spatial Process) をモデルが十分に説明しきれない場合、近隣ゾーンの被説明変数間にある関数関係が存在することがある。Anselin ら<sup>1)2)</sup>は、それらを総称して空間的依存性 (Spatial Dependence) と呼んでいる。空間的依存性が存在する場合、これを無視して通常の推定・検定手法を用いると以下の問題が生じることが知られている。

##### a) ラグ付き従属変数を含まない場合

- ① OLS 推定量は不偏だが有効性をもたない。
- ② OLS を用いた場合の分散推定値は偏りをもつ。
- ③②のため、通常の有意性検定は無効になる。

##### b) ラグ付き従属変数を含む場合

- ④ OLS 推定量は偏りをもつ。

##### (2) 空間的異質性

クロス・セクションデータに対して回帰分析などを行う場合、対象とする現象が空間上で構造的に安定していない場合 (構造的不安定性 structural instability) がある。また、データの測定問題などのために誤差項の分散均一の仮定が崩れる場合 (分散不均一性 heteroskedasticity) がある。Anselin ら<sup>1)2)</sup>はそれらを総称して空間的異質性 (Spatial Heterogeneity) と呼んでいる。空間的異質性が存在する場合、通常の推定・検定手法を用いると以下の問題が生じることが知られている。

\*キーワード：整備効果計測法、計画情報

\*\*学生員、東京大学大学院

\*\*\*正員、工修、同上

\*\*\*\*正員、工博、同上

(東京都文京区本郷 7-3-1, TEL:03-3812-2111,

FAX:03-5689-7290)

a) 構造的不安定性が存在する場合

① OLS 推定量は偏りをもつ。

b) 分散不均一性が存在する場合

② OLS 推定量は不偏だが有効性をもたない。

③ OLS を用いた場合の分散推定値は偏りをもつ。

④③のため、通常の有意性検定は無効になる。

### (3) 可変地区単位問題

地域科学で取り扱われるデータは何らかの形で集計されているのが一般である。しかし、集計単位的设计が異なると分析手法は同じでも結果が大きく異なる場合がありうる事が古くから知られており、Openshaw ら<sup>4)</sup>はこれを可変地区単位問題 (Modifiable Areal Unit Problem : MAUP) と呼んでいる。MAUP はサイズ効果 (scale effect) とゾーニング効果 (zoning effect) の二つに大きく分類されるが、ある地域をいくつかの小地域に分割する場合、前者はその分割数が異なる場合に、後者は分割する地域数が同じであっても境界の設計が異なる場合に、それぞれ分析結果が一致しないことを指す<sup>5)</sup>。

## 3. 空間的依存性の解決法

以下、空間的依存性に限定して議論を行う。空間的異質性については通常の計量経済学的手法の援用で解決する場合が多いこと、MAUP については様々な手法が提案されているものの理論的に十分と思われるものが見受けられないことがその理由である。

### (1) 一般形の定式化

以下、(1)式に示す線形回帰モデルのパラメータを推定する場合について考察する。地価関数の推定などを想像されたい。

$$y = X\beta + \varepsilon \quad \dots (1)$$

$y = (y_1, \dots, y_n)'$  : 内生変数

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} : \text{外生変数}$$

$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)'$  : パラメータ

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)'$  : 誤差

これまで、空間計量経済学や計量地理学の分野で空間的依存性が存在する場合のパラメータ推定および検定方法について様々な解決法が提案されてきた。本研究でそれらを整理した結果、以下の(2)-(5)式に示す一般形で線形回帰の全てのモデルを表現可能なことがわかった。

$$y = \sum \rho_i W_i y + X\beta + \sum W_i X\gamma_i + \varepsilon \quad \dots (2)$$

$$\varepsilon = \begin{cases} \sum \lambda_i W_i \varepsilon + \mu & \dots (3) \\ \sum \lambda_i W_i \mu + \mu & \dots (4) \\ \sum W_i v_i + \mu & \dots (5) \end{cases}$$

$\rho_i, \lambda_i, \gamma_i = (\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{im})'$  : パラメータ

$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$ ,  $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})'$  : 確率変数

$$\mu \sim N(0, \sigma_\mu^2 I), v_i \sim N(0, \sigma_{v_i}^2 I), E(\mu v') = 0$$

(3)-(5)式の誤差モデルの中から1つを選択して(2)式に代入し、適当な制約を加えることにより、これまで提案されてきた各モデルが容易に導出される。また、 $W_i$ は Spatial Weight Matrix と呼ばれるものでモデルを同定可能とするために分析者が先験的に有する情報として外生的に与えるものである。例えば、ゾーン*i*とゾーン*j*のゾーン間距離  $d_{ij}$  を用いて、 $w_{ij} = f(d_{ij})$  (ただし、 $\sum_i w_{ij} = 1$ ) と与えたりする。

以下の(a)-(g)には1次のオーダーの主なモデルを記す。

(a) mixed regressive-spatial autoregressive model<sup>2)</sup>

$$y = \rho W y + X\beta + \mu \quad \dots (6)$$

(b) mixed regressive-spatial crossregressive model<sup>6)</sup>

$$y = X\beta + W X \gamma + \mu \quad \dots (7)$$

(c) mixed regressive-spatial regressive model<sup>6)</sup>

$$y = \rho W y + X\beta + W X \gamma + \mu \quad \dots (8)$$

(d) regression model with autoregressive disturbances<sup>2)</sup>

$$y = X\beta + (I - \lambda W)^{-1} \mu \quad \dots (9)$$

(e) mixed regressive-spatial autoregressive model with autoregressive disturbances<sup>2)</sup>

$$y = \rho W y + X\beta + (I - \lambda W)^{-1} \mu \quad \dots (10)$$

(f) spatial autoregressive moving average model<sup>5)</sup>

$$y = \rho W y + X\beta + (I + \lambda W) \mu \quad \dots (11)$$

(g) spatial correlation model<sup>7)</sup>

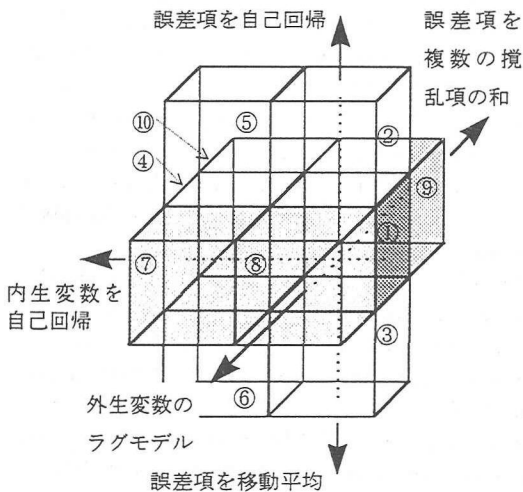
$$y = \rho W y + X\beta + W v + \mu \quad \dots (12)$$

表1 既存の手法の比較

|     | 誤差モデル    | 一般形に課される制約                                                 | 推定方法          | 主な検定方法                             |                               |                          |
|-----|----------|------------------------------------------------------------|---------------|------------------------------------|-------------------------------|--------------------------|
|     |          |                                                            |               | 帰無仮説                               | 対立仮説                          | 手法                       |
| (a) | (3)or(4) | $\gamma_i = \lambda_i = 0(1 \leq i), \rho_i = 0(2 \leq i)$ | ML<br>EGLS    | $\rho = 0$<br>$\rho = 0$           | $\rho \neq 0$<br>不明           | LM test<br>I test        |
| (b) | (3)or(4) | $\rho_i = \lambda_i = 0(1 \leq i), \gamma_i = 0(2 \leq i)$ | OLS           | $\gamma = 0$                       | $\gamma \neq 0$               | F, t-test                |
| (c) | (3)or(4) | $\lambda_i = 0(1 \leq i), \rho_i = \gamma_i = 0(2 \leq i)$ | ML            | $\rho = 0 \text{ and } \gamma = 0$ | $\rho \neq 0, \gamma \neq 0$  | LR test                  |
| (d) | (3)      | $\rho_i = \gamma_i = 0(1 \leq i), \lambda_i = 0(2 \leq i)$ | ML<br>EGLS    | $\lambda = 0$<br>$\lambda = 0$     | $\lambda \neq 0$<br>不明        | W, LR, LM test<br>I test |
| (e) | (3)      | $\gamma_i = 0(1 \leq i), \rho_i = \lambda_i = 0(2 \leq i)$ | ML            | $\rho = \lambda = 0$               | $\rho \neq 0, \lambda \neq 0$ | LM test                  |
| (f) | (4)      | $\gamma_i = 0(1 \leq i), \rho_i = \lambda_i = 0(2 \leq i)$ | ML            | $\rho = \lambda = 0$               | $\rho \neq 0, \lambda \neq 0$ | SARMA test               |
| (g) | (5)      | $\rho_i = 0(2 \leq i), \gamma_i = 0(1 \leq i)$             | EGLS, ML, GMM | 表記なし                               | 表記なし                          | 表記なし                     |

注) ML: Maximum Likelihood, EGLS: Estimated Generalized Least Squares, GMM: Generalized Method of Moments, LR: Likelihood Ratio, LM: Lagrange Multiplier, W: Wald

(a)-(g)の各モデルの推定・検定手法に関する概要を表1に整理した。詳細については、原文を参照されたい。また、(c)のモデルに $\gamma = -\rho\beta, (I - \rho W)^{-1}$ の存在という2つの制約を加えれば、(d)のモデルが導出できるように、各モデルは相互に入り組んだ関係にある。図1でその関係を示した。



|               |             |
|---------------|-------------|
| (a)=①U④       | (b)=①U⑧     |
| (c)=①U②U④U⑦U⑧ | (d)=①U②     |
| (e)=①U②U④U⑤   | (f)=①U③U④U⑥ |
| (g)=①U④U⑨U⑩   | ただし、(1)式=①  |

図1 既存の手法の相互関係

## (2) 分析の手順

### a) Spatial Weight Matrix の特定化

まず、Spatial Weight Matrix を分析者の先験情報をもとに特定化しなければならない。ただし、Spatial Weight Matrix の特定化を誤ると推定・検定に関する議論のいくつかが成立しなくなるので細心の注意が必要である<sup>8)</sup>。Florax ら<sup>9)</sup>はモンテカルロ実験によって、特定化を誤った場合の影響を調べており、データサンプル間の結びつきを真の結びつきより過大評価した場合、過小評価した場合に比べて分析の精度がより低下することを示している。

### b) 空間的依存性の診断

次に a) で特定化した Spatial Weight Matrix を用いて空間的依存性の存在を診断する。通常、(1)式に OLS を適用して得られた残差よりモーラン統計量を計算し、それをもとに I 検定が行われる<sup>2)</sup>。I 検定は(d)に関して望ましい性質を有しており、しかも計算も容易であることから最も一般的に利用されている。しかし、理論的に不明確な点もいくつか残されている。ラグランジュ乗数検定も I 検定とともによく利用される検定であり、特に内生変数の自己回帰項の存在の診断に有効である<sup>2)</sup>。ラグランジュ乗数検定は、尤度比検定やワルド検定とともに最尤法に基づいた検定であるが、OLS 残差をもとに検定可能である点において簡便である。また、I 検定に比べると理論的にも明確である。しかし、小標本特性については不明であり、また、誤差項の自己回帰

モデルと移動平均モデルを区別できないという問題点がある。

Anselin ら<sup>5),10)</sup>はモンテカルロ実験によって各種検定法の検定力を比較しており、I 検定およびラグランジュ乗数検定の有効性を確認している。ただし、いずれも理論的に不十分な点を残しており、分析者には、各種検定結果をもとにした総合的な判断が要求されるのはいうまでもない。

#### c) モデルの選択

空間的依存性の存在が検出された場合、(2)-(5)式の一般形に制約を加えて適切なモデルを選択することによりこれに対処しなければならない。Florax ら<sup>6)</sup>はラグランジュ乗数検定を組み合わせるモデルの特定化を段階的に行う pre-test 推定の有効性を示している。しかし、pre-test 推定は前節の(a)-(d)のような(c)に対して入れ子型になっているモデルの中からあるモデルを選択する場合には有効であるものの、自己回帰の誤差項を含む(e)と移動平均の誤差項を含む(f)の選択といった非入れ子型の関係にあるモデルの選択には適用できない。そこで、(3)-(5)式の誤差モデルのそれぞれに対して pre-test 推定を行い、モデルの特定化を行った上で非入れ子型の検定を行ったり、各種情報基準を参考にすることで適切な誤差モデルを選択することが必要となる<sup>11)</sup>。

a) で特定化した Spatial Weight Matrix にくいつかの代替案が存在する場合には、特定化したモデルをもとに Anselin<sup>2)</sup>のような Spatial Weight Matrix に関する非入れ子型検定を行わなければならない。その結果として別の Spatial Weight Matrix が採択されたならば、再度、b) に戻って分析を繰り返す必要がある。

#### 4. おわりに

本研究では空間的依存性の解決法に関する既存の研究の整理を行い、実際の分析に適用する上での指針を示した。ただし、空間計量モデルの統計的取り扱い<sup>11)</sup>は Anselin<sup>11)</sup>も述べているとおり、未だ unsatisfactory state of the art であり、分析の目的や分析者が先験的に有する情報に応じて適切に対処していかなければならない。今後の理論の進展およ

び実証分析の蓄積が望まれる。

なお、我々の実証分析の結果については、発表時までに整理して示したい。

#### 参考文献

- 1) Anselin, L. et al.: Do spatial effects really matter in regression analysis?, *Papers of the Regional Science Association*, Vol.65, pp.11-34, 1988.
- 2) Anselin, L.: *Spatial Econometrics: Methods and Models*, Kluwer Academic, 1988.
- 3) Wong, D.W.S.: Aggregation effects in georeferenced data, in *Practical Handbook of Spatial Statistics*, Arlinghaus, S.L., eds., CRC Press, pp.83-106, 1996.
- 4) Openshaw, S. et al.: A million or so correlated coefficients: three experiment on the modifiable areal unit problem, in *Statistical Applications in the Spatial Sciences*, Wrigley, N. et al., eds., Pion, London, pp.127-144, 1979.
- 5) Anselin, L. et al.: Small sample properties of tests for spatial dependence in regression models, in *New Directions in Spatial Econometrics*, Anselin, L. et al., eds., Springer, pp.21-74, 1995.
- 6) Florax, R.J.G.M. et al.: Specification and estimation of spatial linear regression models, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.22, pp.405-432, 1992.
- 7) Kelejian, H. et al.: A Suggested method of estimation for spatial interdependent models with autocorrelated errors, and an application to a county expenditure model, *Papers in Regional Science*, Vol.72, pp.297-312, 1993.
- 8) Griffith, D.A.: Some guidelines for specifying the geographic weights matrix contained in spatial statistical models, in *Practical Handbook of Spatial Statistics*, Arlinghaus, S.L., eds., CRC Press, pp.65-82, 1996.
- 9) Florax, J.G.M. et al.: The impacts of misspecified spatial interaction in linear regression models, in *New Directions in Spatial Econometrics*, Anselin, L. et al., eds., Springer, pp.111-135, 1995.
- 10) Anselin, L. et al.: Properties of tests for spatial dependence in linear regression models, *Geographical Analysis*, Vol.23, pp.112-131, 1991.
- 11) Anselin, L.: Model validation in spatial econometrics: A review and evaluation of alternative approaches, *International Regional Science Review*, Vol.11, pp.279-316, 1988.