【土木計画学研究・講演集　No.20(1)　1997年11月】

PERT／MANPOWER問題の最適解法の開発研究
ー カットネットワークにおける最適資源配分問題への変換を用いた新しい解法 ー *

Study on Development of Algorithm for Obtaining Optimal Solution of PERT/MANPOWER Problem

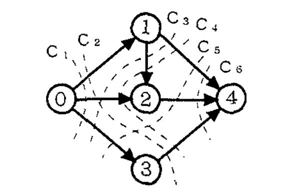
春名　攻** ・滑川　達*** ・櫻井義夫****
by Mamoru HARUNA**, Susumu NAMERIKAWA***, Yoshio SAKURAI****

1．はじめに

これまでPERT/MANPOWER問題の最適解法は存在せず，山崩し法や山均し法などによる近似解しか求められないといわれてきた．我々は，この問題に対して別な角度から次のようにアプローチして，最適解を求める方法を開発した．すなわち，ここでは，まずPERT/MANPOWER問題を最適化モデルとして定式化するとともに，0-1計画法やＤＰ等の手法を適用し，後述するカットネットワークにおける最適資源配分問題へ変換してその解法の開発を行なった．

このようなアプローチは，PERT系のネットワークプランニング・スケジューリング問題の最適解法の研究を行なう過程で，工程ネットワークのトポロジカルな特性分析を進めた結果求められた次のような成果をベースとして行なわれた．すなわち，その特性分析ではアクティビティ群とそれらの順序関係で規定される工程ネットワーク構造が，全てのアクティビティをネットワークの始点を含むアクティビティと終点を含む残りのアクティビティに２分するカットのうちで，始点から終点の方向に向かう順方向のアクティビティのみを含むカットだけで構成される図－１のような集合（群）と，始点と終点を順方向に結ぶ全てのパスからなる図－２のようなルートの集合（群）とのトポロジカルな関係として変換されるメカニズムを明らかにした[1]．この結果，PERT/MANPOWER問題を，図－３に示したようなカットをアクティビティとするカットネットワークにおける最適資源配分問題として定式化することができるようになり，0-1計画法とＤＰ等の手法を適用した最適解法の開発に進むことも可能となったのである．

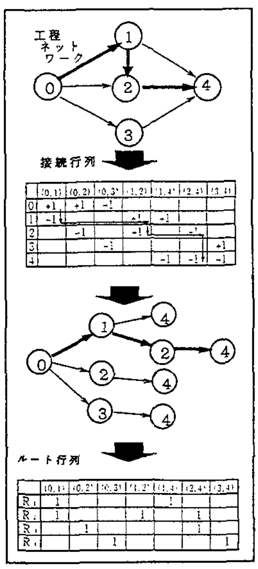
本稿では，紙面の関係上，カットネットワークにおける最適資源配分問題の定式化と，最適解法の内容に限定して述べていくこととする．



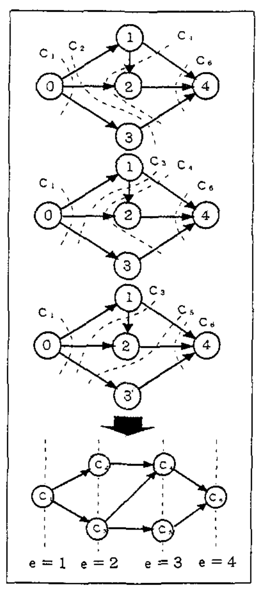
カット行列

	(0.1)	(0.2)	(0.3)	(1.2)	(1.4)	(2.4)	(3.4)
C_1	1	1	1				
C_2	1	1					1
C_3		1	1	1	1		
C_4		1		1	1		1
C_5			1		1	1	
C_6					1	1	1

図－１　カット構造



図－２ ルート構造



図－３ カットネットワーク

---

*　キーワード；計画手法論，施工計画・管理

**　正会員，工博　立命館大学理工学部環境システム工学科教授
（〒525 草津市野路東1-1-1, TEL 0775-61-2736, FAX 0775-61-2667）
***　学生員，工修　立命館大学大学院理工学研究科総合理工学専攻（同上）
****　学生員，立命館大学大学院理工学研究科環境社会工学専攻（同上）

2．PERT/MANPOWER問題の最適資源配分問題としての定式化

（1）問題の定式化に関する検討

図－1および図－2からも明らかなように，本研究でとり上げているカットでは，構成するアクティビティ間に順序関係は存在せず，このようなカットは全てのルートをたかだか1回切断するカットと等価であると定義することができる．そして，カットの順序関係を構造化して求められるカットネットワークの任意の経路は，もとの工程ネットワークの全てのアクティビティを網羅していることがわかる．このため，各アクティビティの実施状態，すなわち工程の状態は，上述したカット集合とルート集合との関連構造としてトポロジカルに変換できることになる．

したがって，ここでは以上の検討内容をベースとして，PERT/MANPOWER問題をルートの実施日数を変数にもったカットネットワークにおける最適資源配分問題として定式化していくこととする．なお，カットネットワークには図－3のようにイニシャルレベルを設定しておく．

いま，工程の状態をカットとそこでの各ルートの実施日数で表わすこととすれば，

$$R_{e,cz}=(r^1_{e,cz},\ r^2_{e,cz},\ \cdots,\ r^m_{e,cz})$$

$r^k_{e,cz}$；任意のレベルeでかつレベルe＋1のカットc_zと順序関係をもつカットc_yにおけるルートkの実施日数

のようなm次元ベクトルを問題定式化における状態変数として設定することができる．

つづいて，決定関数を，上述した各ルートの実施日数パターンを変数にもつ任意のカット区間の時間長として設定すれば，以下のような関数

$$g_e(R_{e,cz})=g_e(r^1_{e,cz},r^2_{e,cz},\cdots,r^m_{e,cz})$$

で表わすことができる．このとき，PERT/MANPOWER問題の定式化は，カットネットワークにおける各レベルでの決定関数値の総和の最小化として求められる．すなわち，PERT/MANPOWER問題は，

$$\text{minimize}\ f_n(r^1,\ r^2,\ \cdot\cdot\cdot,\ r^m)=\sum_{e=1}^{n} g_e(r^1_{e,cie},\ r^2_{e,cie},\ \cdot\cdot\cdot,\ r^m_{e,cie})$$

Subject to

$$\sum_{e=1}^{n} r^k_{e,cie}=r^k\quad(k=1,2,\cdots,m)$$

$$r^k_{1,ci1},\ r^k_{2,ci2},\ \cdots r^k_{n,cin}\geqq 0\quad(k=1,2,\cdots,m)$$

$$c_{i1}\prec c_{i2}\prec\cdot\cdot\cdot\prec c_{in-1}$$

$$c_{in}\in\phi$$

のようなカットネットワークにおける最適資源配分問題として定式化できることがわかる．さらに，このとき上式の1からnまでの各レベルが，フィードバックのないシステムであるカットネットワークでの資源配分問題として設定されているので，ＤＰの基本原理である最適性の原理が適用でき，次のように変形することができる．すなわち，

$$f_n(r^1,\ r^2,\ \cdot\cdot\cdot,\ r^m)$$

$$=\min_{\substack{0\leqq r^k_{n,cin}\leqq r^k\ (k=1,2,\cdots,m)\\ c_{in-1}\prec c_{in}}}\{g_n(r^1_{n,cin},r^2_{n,cin},\cdots,r^m_{n,cin})$$

$$+f_{n-1}(r^1-r^1_{n,cin},\ r^2-r^2_{n,cin},\cdots,\ r^m-r^m_{n,cin})\}$$

のような，繰り返しの関数方程式として定式化することができ，ＤＰによる解法を適用できることがわかる．

（2）任意のカットにおける決定関数値と各ルートの配分日数に関する検討

これまでの議論により，PERT/MANPOWER問題がカットネットワークにおける最適資源配分問題として定式化され，その解法としてＤＰを適用できることが明らかとなった．ここではさらに，上述定式化の決定関数$g_{e,cz}(R_{e,cz})$の値ならびに任意のカットにおける各ルートへの配分日数を求める方法について検討を加える．ここで求めているカットには，構成するアクティビティ間に順序関係が存在しないことを定義しているため，ここでの問題は並列ネットワークを対象とするスケジューリング問題に帰着する．また，このような問題の結果として求められるスケジュールが，アクティビティ数m（ここではカットに含まれるアクティビティ数）に対応するm×mマトリックスとして表現できることも，これまでの本研究における分析によって明らかとなっている[2)3)]．そして，並列ネットワークにおける(カット内の)資源制約付きスケジューリング問題は，

$\sum_{k=1}^{N} a_{ik} \cdot x_k = d_i$,

$\sum_{i=1}^{m} a_{ik} \cdot w_{il} \leqq W_l$,

$x_k \geqq 0$,

$(k = 1, 2, \cdots, N)$,

$(i = 1, 2, \cdots, m)$,

a_{ik}：時間区間I_kにおけるアクティビティ i の実施状況（実施しているとき１，そうでなければ０）

x_k　：時間区間I_kの日数

d_i　：アクティビティ i の所要日数

w_{il}：アクティビティ i における資源 l の必要資源数

W_l　：資源 l の制約数

の制約条件のもとで，

$$\lambda = \min \sum_{k=1}^{N} x_k,$$

を求める線形計画の問題として定式化される．なお，ここでNは資源制約を満たすすべての同時作業パターンの数を表すものとする．そして，スケジュールは最適解が求められたときの基底行列として求めることができるので，以上の問題に対して列生成法を用いた解法を適用できることがわかる．すなわち，すべてのパターンを暗に対象としつつ，あるステップでの解の改良のために，前ステップで求められた基底行列Bに新しく導入するパターンp_uを，

$\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot w_{il} \leqq W_l$

$a_i = 1$あるいは０

a_i：パターンp_uの構成要素

の制約条件のもとで，

$$U_u = \max \sum_{i=1}^{m} \beta_i a_i$$

を与えるような$\{a_i\}$を求める補助問題を解くことにより決定する．ここでβ_iは上述定式化における目的関数の係数ベクトル$C = \{c_j\}$の各要素の値がすべて１であるため$c_j = 1$となり，

$$\beta_i = CB^{-1} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ji}, \quad B^{-1} = (\beta_{ji}),$$

として容易に求められる．

定式化から明らかなように，このような補助問題は0-1整数計画（Integer Programming）の問題と呼ばれ，一般的にはナップサック問題としてよく知られている．本研究では，ナップサック問題の最も一般的な解法の一つであるＤＰを用いてこの補助問題を解くこととした．

以上のようにして，任意のカットに含まれるアクティビティ群を対象とした最小の完了時刻を求めることができるが，この値を直接，決定関数値として用いることはできない．すなわち，ここでの決定関数値がカット区間の時間長であるため，以下のような処理を加える必要がある．すなわち，最適解を与える基底行列として求められたパターンにおいて，

$i \in c_y$，かつ $i \notin c_z$

$(c_y \prec c_z)$

となるアクティビティが１つでも実施している，すなわち，$a_{ik'}=1$となるパターン$I_{k'}$のみを抽出し，

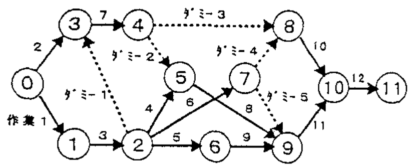
$$\lambda' = \sum_{k'} x_{k'},$$

を決定関数値$g_{e,cz}(R_{e,cz})$として求めればよいこととなり，結果として，この値が最小のカット区間の時間長となることは明かである．なお，各ルートへの配分日数も抽出されたパターン$I_{k'}$の集合とルート行列を用いて容易に求めることができる．そして，カットネットワークの最適経路探索と各ルートの実施日数の配分を前述のようなＤＰを用いて実施することにより，プロジェクト全体の最小工期を求めることができる．なお，このときのスケジュールは，当然各レベルで抽出されたパターン$I_{k'}$の合成として求めることができることとなる．

３．例題ネットワークでの適用計算

本研究ではさらに，図－４のような例題ネットワークを用いて，開発した解法の適用計算を行なった（表－１：アクティビティの日数・必要資源数および資源制約数）．なお，ここでは，各作業の中断が許されているものと仮定する．

適用計算の結果，カットネットワークの最適経路は図－５のようになり，各アクティビティ断面での時間配分と実施状態（最適作業実施パターン）が表－２のように求められるとともに，最小工期が３４日として求められた．なお表中の網掛け部分は，列方向に示したカットネットワークの最適経路に含まれる各カットがそれぞれ含むアクティビティ群を表わしている．さらに，図－６には各資源ごとの山積み結果を示しておく．

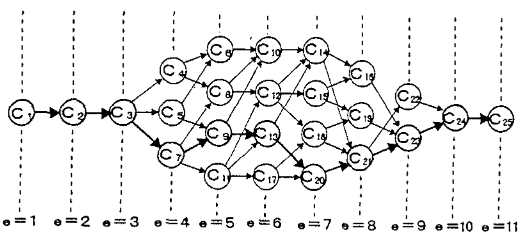


図－4 例題ネットワーク

表－1 各アクティビティの所要日数

・必要資源数および資源制約数

作業	結合点 i	結合点 j	所要日数	必要資源数 I	必要資源数 II	必要資源数 III
1	0	1	10	5	2	3
2	0	3	14	4	3	4
3	1	2	3	6	2	4
ダミー1	2	3	0	0	0	0
4	2	5	5	2	0	2
5	2	6	2	4	2	2
6	2	7	8	3	3	3
7	3	4	8	4	4	3
ダミー2	4	5	0	0	0	0
ダミー3	4	8	0	0	0	0
8	5	9	4	7	3	5
9	6	9	6	4	2	0
ダミー4	7	8	0	0	0	0
ダミー5	7	9	0	0	0	0
10	8	10	2	4	4	2
11	9	10	3	4	2	2
12	10	11	2	3	4	5
資源制約数				10	6	8



図－5 カットネットワークと最適経路

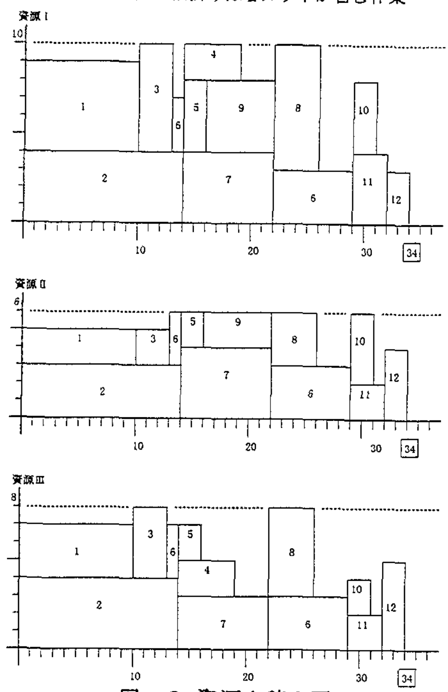
4．おわりに

本研究では，PERT/MANPOWER問題が，カットネットワークにおける最適資源配分問題として定式化できることを示すとともに，0-1整数計画法やＤＰを適用した最適解法を開発した．さらに例題ネットワークでの適用計算を実施して最適解を具体的に求めた．特にここでは，作業の中断が許されている場合についてのみの計算結果を示したが，解法上の簡単な工夫により，作業中断不可能な場合についても適用は十分可能である．この適用計算結果については紙面の関係上，発表時に示すこととする．

表－2 実施状況マトリックス

	C_1	C_2	C_3	C_7	C_9		C_{20}		C_{24}		C_{25}
1(0, 1)	1										
2(0, 3)	1	1	1								
3(1, 2)		1									
(2, 3)											
4(2, 5)				1	1						
5(2, 6)				1							
6(2, 7)			1				1	1			
7(3, 4)				1	1	1					
(4, 5)											
(4, 8)											
8(5, 9)							1				
9(6, 9)					1	1					
(7, 8)											
(7, 9)											
10(8, 10)									1		
11(9, 10)									1	1	
12(10, 11)											1
	10	3	1	2	3	3	4	3	2	1	2	34

注：網掛けは各カットが含む作業



図－6 資源山積み図

【参考文献】

1) 春名，山田，滑川；PERT/MANPOWER問題の最適解法に関する開発研究，第12回建設マネジメント問題に関する研究発表・討論会論文集，1994,12

2) 春名攻；建設工事における施工管理に関するシステム論的研究，学位論文(京都大学工学博士)，1971

3) 春名，滑川，櫻井；非線形・離散型費用関数に適用可能な新しい最適ネットワークスケジューリングモデルの開発研究－CPM手法とは異なったアプローチ－，土木学会土木計画学研究・講演集19(1)，1996,11