【土木計画学研究・講演集 No.19(2) 1996年11月】

空間計量モデルのための最小距離推定法*

Minimum Distance Method for Spatial Econometric Models

堤 盛人 **

by Morito TSUTSUMI

1．はじめに

地域を対象とした空間モデルの推定上の大きな問題として、①空間的依存性（spatial dependence）、②空間的不均一性（spatial heterogeneity）があげられる。

このため、空間モデルのパラメータ推定を行うため、最尤法あるいは最小二乗法を用いる際には、誤差項の分散共分散行列を知ることがモデル推定上の大きな問題となる。

本研究では、最小距離推定というパラメータ推定手法を用いて空間的自己相関及び分散不均一性の問題を扱う方法について考察する。

2．分散不均一性と空間的自己相関

以下本研究では、つぎのような簡単なクロスセクションの回帰モデルを考える。なお、本稿において ′ は行列の転置を表すものとする。

$$y_i=\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{\beta} \quad \cdots(1)$$

$$\boldsymbol{X}_i=(X_{1i},X_{2i},\cdots,X_{ki}),\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)'$$

y：内生変数 $\boldsymbol{X}$：外生変数ベクトル

$\boldsymbol{\beta}$：パラメータベクトル

i：ゾーン番号 $(i=1,\cdots,m>k)$

(1)をさらに次のように書き換える。

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{u} \quad \cdots(2)$$

ただし、 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots y_m)'$

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{1m} & X_{2m} & \cdots & X_{km} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_m)'$ ：誤差ベクトル

ここで誤差項については、

$$E(\boldsymbol{u})=0 \quad \cdots(3)$$

と仮定する。しかし、空間を対象とした分析においては、②に起因した分散不均一性に加えて①による空間的自己相関による影響のため、その分散共分散行列は単位行列や対角行列のような単純な構造とならない。そのため、OLSのような簡単な方法でパラメータを推定することができない。無論、残差項の分散共分散行列 $E(\boldsymbol{uu}')$が既知であれば、一般化最小二乗法や最尤法によりパラメータを求めることは可能であるが、事前にその情報を得ることは現実問題として不可能に近い。

従来から、空間計量経済学（Spatial Econometrics）（例えば、Anselin(1988)など）の分野では、この種の空間的自己相関の問題を対象に様々な研究がなされている。最もポピュラーな方法の一つは、残差項を自己回帰過程（auto-regressive process）として定式化する方法であり、たとえば1階の自己回帰(AR)モデルでは、

$$u_i=\sum_j \rho_{ij}u_{ij}+\varepsilon_i \quad (\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)) \quad \cdots(4)$$

ρ_{ij}：パラメータ　ε_i：残差　i,j：ゾーン番号

となる。このようなモデルは error components model と呼ばれるが、時系列分析と異なり高々1階のモデルを推定するために $m\times m$ 個のパラメータが必要となり、このままではモデルの同定が不可能である。そこで、

$$\rho_{ij}=\rho\times w_{ij} \quad \cdots(5)$$

とし仮定し、 w_{ij}を先験的な情報（例えばi,j間の空間的距離 d_{ij} 用いて $w_{ij}=1/d_{ij}$ とする）により与える。

(3),(4)を行列表現すれば、

$$\boldsymbol{u}=\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\varepsilon} \quad \cdots(6)$$

となり、その分散共分散行列は

$$E(\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}')=(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})^{-1}E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W}')^{-1}$$

$$=\sigma^2[(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W}')(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})]^{-1} \qquad (E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')=\sigma^2)\cdots(7)$$

と計算される。$\boldsymbol{W}$は spatial weight matrix と呼ばれるが、本研究では事前情報としての$\boldsymbol{W}$を用いずにパラメータの推定を行う手法として、次に述べる最小距離推定法を検討する。

キーワード：地域計画、空間計量、空間的自己相関

学生員 工修 東京大学大学院工学系研究科

〒113 文京区本郷7-3-1 TEL:03-3812-2111 ext.6129

3．最小距離推定量

まず(2)の線形モデルに対して n 回（時点）の観測データを得たうえで、(2)を次のように書き換える。

$$y_t=X_t\beta+u_t \qquad (t=1,\cdots n) \qquad \cdots(8)$$

そして、次のような仮定をおくものとする。

仮定１：u_t は相互に独立に平均 0、共分散行列 Σ を持つ同一の分布に従う。

仮定２：任意の m 次正値定符号行列 V に対して

$$\mathbf{M}_n(\mathbf{V})=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\mathbf{X}_t'\mathbf{V}\mathbf{X}_t \qquad \cdots(9)$$

とおくと、n が無限大に近づくとき $M_n(V)$ は１つの非特異行列に収束する。

このとき次の(10)を最小化する $\hat{\beta}(\mathbf{V})$ は V に基づく最小距離推定量（minimum distance estimator：MD 推定量）と呼ばれる[2)]。

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\mathbf{y}_t-\mathbf{X}_t\beta)'\mathbf{V}(\mathbf{y}_t-\mathbf{X}_t\beta) \qquad \cdots(10)$$

ＭＤ推定量は具体的に次のように求められる。

$$\hat{\beta}(\mathbf{V})=[\mathbf{M}_n(\mathbf{V})]^{-1}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\mathbf{X}_t'\mathbf{V}\mathbf{y}_t$$

$$=(\sum_{t=1}^{n}\mathbf{X}_t'\mathbf{V}\mathbf{X}_t)^{-1}\mathbf{X}_t'\mathbf{V}\mathbf{y}_t \qquad \cdots(11)$$

ここで、 $V=\Sigma^{-1}$ とおけばMD 推定量は GLS 推定量に一致する。また、

$$V=(I-\rho W')(I-\rho W) \qquad \cdots(12)$$

とおけば、2.で述べた error components model による推定手法に一致する（尚 ρ は別途推定する必要あり）。

V の定義としては様々なものが可能であるが、統計的に意味を持つものの一つとして、(11)を用いて(13)の方法で残差を求め、(14)に示すような標本積率行列を用いた定義が考えられる。

$$\tilde{\mathbf{u}}_t=\mathbf{y}_t-\mathbf{X}_t\hat{\beta}(\mathbf{V}) \qquad \cdots(13)$$

$$\mathbf{V}_n^{-1}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\tilde{\mathbf{u}}_t\tilde{\mathbf{u}}_t' \qquad \cdots(14)$$

このとき、(15)から MD 推定量は実行可能 GLS 推定量となり、(16)に示すようにパラメータの一致推定量が得られる（岩田(1982)）。

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\ [\mathbf{V_n}^{-1}-\Sigma]=0 \qquad \cdots(15)$$

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\ [\hat{\beta}(\mathbf{V}_n)-\hat{\beta}(\Sigma^{-1})]=0 \qquad \cdots(16)$$

そこで、最初に適当な正値定符号行列 V を用いて $\hat{\beta}(\mathbf{V}^{-1})$ を推定し、これを用いたときの残差の標本積率行列 $V_{(2)}$を用いて $\hat{\beta}(\mathbf{V}_{(2)}{}^{-1})$ を求めるという作業を繰り返して $\hat{\beta}(\mathbf{V}_{(q)}{}^{-1})$ (q=1,2,･･･)を計算する方法が考えられる。最終的に収束値 $\hat{\beta}(\mathbf{V}^{-1})$ を持てば、(16)が成り立つ。

さて、これまで暗黙に $n\geqq m$ としてきた。なぜなら、残差の標本積率行列によって定義した（14）では、$n<m$ のとき

$$rank(V^{1})\leqq m \qquad \cdots(17)$$

であり正則でない。したがって、$n<m$ であるような場合においては、 V の定義としてそのまま(14)を用いることはできない。

そこで、（14）を次のように修正することを考える。

$$\mathbf{V}_n^{-1}=\frac{1}{n}\{\sum_{t=1}^{n}\tilde{\mathbf{u}}_t\tilde{\mathbf{u}}_t'+\delta\mathbf{I}\} \qquad \cdots(18)$$

ここで、δ は $|V_n^{-1}|\neq 0$ を満足する十分小さな値である。(18)のように修正された V に対しても、(15)が成立することは明らかであり、したがって、(18)を用いて求められるＭＤ推定量も一致推定量である。

上述の方法によれば、(5)式のような error components model を用いず、パラメータの推定段階における残差に関する情報を用いて空間的自己相関の問題を扱い、なおかつ分散不均一性の問題にも対処することが可能になるものと考えられる。

４．おわりに

本研究では、空間モデルにおいて問題となる空間的自己相関に対し、最小距離推定量を用いてパラメータ推定を行う方法について考察した。(18)で示した方法の統計学的な意味について理論的な検討が残されており、発表時までに整理したい。

【参考文献】

1) Anselin, L. ：Spatial Econometrics : Methods and Models, Kulwer, 1988

2) 岩田暁一：計量経済学，有斐閣，1982