【土木計画学研究・講演集 No.19(2) 1996年11月】

多都心型のつけ値地代均衡モデルと変分不等式*

Variational Inequality Formulation and Algorithms for Bid Rent Equilibrium Models with Multiple CBDs

赤松 隆**・佐藤浩基***

by Takashi AKAMATSU and Hiroki SATO

1. はじめに

Alonso(1964)以来の都市経済学における典型的な立地均衡理論は，単純化された連続空間でのモデリングと解析的な考察を中心として構築されてきた．このようなアプローチは，現象の本質を明確化し，明快な論理を与えられる利点がある反面，複雑な空間構造や様々な現象の相互作用が本質的となる局面への対応には限界がある．

本研究は，計算機による数値解析を前提とし，任意形状の都市・交通条件等を扱い得る離散的な空間で伝統的な立地均衡理論を表現したモデルを扱う．そして，そのような離散的モデルを systematic に扱うための一つの枠組みを示すことが本研究の目的である．より具体的には，離散空間でのつけ値地代均衡モデルを変分不等式問題として定式化し，その基本特性の解析および収束が保証された計算法を示す．

本論文の構成は以下の通りである．２節では，まず，基本的な住宅立地のつけ値地代均衡モデルを定式化し，続く３節で，変分不等式の枠組を用いて，基本特性の解析およびアルゴリズムの構築を行う．４節では，２節のモデルを拡張し，交通ネットワーク均衡条件を組み込んだ統合モデルを定式化し，最後にその解析とアルゴリズムを示す．なお，以下では，紙面の制約により，定理の証明は割愛する．

2. 基本モデルの定式化

2.1 モデルの枠組みと記号の定義

本節では，住宅立地のつけ値地代均衡を M 個の勤務地, N 個の居住地からなる離散的な空間で表現した基本的なモデルを考える．勤務地 o の雇用者(=世帯＝消費者)数 G_o，および居住地 d の住宅供給面積の上限 A_d は所与とする．記号の煩雑さを避けるため，各居住地内の住宅タイプは同一とし，また，各勤務地内の雇用者は同一の所得，効用関数を持つとする．

勤務地 o を持つ消費者は，仮に居住地 d およびその(均衡)地代 R_d が与えられた時，以下の効用最大化行動により居住面積 L_d を決定する：

$$\varphi_{od}(R_d) = \max_{z, L_d}\{u_{od}(z, L_d) \mid Y_o = z + T_{od} + R_d L_d\} \quad (2\text{-}1)$$

ここで, T_{od}:勤務地 o と居住地 d の交通費用(所与の定数), z :一般財(ニューメレール)消費量, Y_o:勤務地 o の雇用者の所得(所与の定数). そして，この間接効用関数{ $\varphi_{od}(R_d)$ }が最大となる居住地 d を選択する．このときの居住地面積(地代 R_o の関数)を $L_{od}(R_d)$，勤務地が o で居住地 d を選択する消費者数を q_{od} と書く．

一方，各居住地 d の均衡地代 R_d は，各勤務地の消費者間での最大付け値競争により決定されるものとする．勤務地が o の消費者が，(均衡)効用 U_o を維持しつつ居住地 d を選択する時のつけ値地代は,

$$\psi_{od}(U_o) = \max_{z, L_d}\{(Y_o - z - T_{od}) / L_d \mid u_{od}(z, L_d) = U_o\} \quad (2\text{-}2)$$

で与えられる．

主な変数・関数のベクトル表記は以下の通り：

$\mathbf{q}=(..,q_{od},..)^T \in R_+^{MN}$, $\mathbf{U}=(..,U_o,..)^T \in R_+^{M}$, $\mathbf{R}=(..,R_d,..)^T \in R_+^{N}$,

$\mathbf{G}=(..,G_o,..)^T \in R_+^{M}$, $\mathbf{A}=(..,A_d,..)^T \in R_+^{N}$,

$\boldsymbol{\varphi}=(.., \varphi_{od},..)^T: R_+^N \to R_+^{MN}$, $\boldsymbol{\Psi}=(.., \psi_{od},..)^T: R_+^M \to R_+^{MN}$,

$\mathbf{L}=\mathrm{diag}(..,L_{od},..)^T: R_+^M \to R_+^{MN} \times R_+^{MN}$,

$\mathbf{E}_1=[e_{ow}]$: M × MN の "勤務地・OD-pair 接続行列:

$$e_{ow} = \begin{cases} 1 & \text{if } w\text{th OD - pair includes } o\text{th business zone,} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\mathbf{E}_2=[\hat{e}_{dw}]$: N × MN の"居住地・OD-pair 接続行列:

$$\hat{e}_{dw} = \begin{cases} 1 & \text{if } w\text{th OD - pair includes } d\text{th residential zone,} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

---

* Keywords: 住宅立地，つけ値地代，均衡，変分不等式

** 正会員 工博 豊橋技術科学大学 知識情報工学系
(〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1
E-mail:akamatsu@tutkie.tut.ac.jp)

*** 学生会員 豊橋技術科学大学 知識情報工学専攻

2.2 モデルの基本的な定式化

以上の条件を定式化すると以下の通りである.

1) 消費者均衡(最大効用立地選択)条件：

$$\begin{cases} U_o = \varphi_{od}(R_d) & if\ q_{od} > 0 \\ U_o \geq \varphi_{od}(R_d) & if\ q_{od} = 0 \end{cases} \quad \forall od \qquad (2\text{-}3)$$

2) 土地市場均衡(最大付け値＆面積制約)条件：

(最大付け値条件)

$$\begin{cases} R_d = \psi_{od}(U_o) & if\ q_{od} > 0 \\ R_d \geq \psi_{od}(U_o) & if\ q_{od} = 0 \end{cases} \quad \forall od \qquad (2\text{-}4)$$

(供給住居面積制約)

$$\begin{cases} A_d = \sum_o L_{od}(R_d)\, q_{od} & if\ R_d > 0 \\ A_d \geq \sum_o L_{od}(R_d)\, q_{od} & if\ R_d = 0 \end{cases} \quad \forall d \quad (2\text{-}5)$$

3) 消費者(世帯)数の保存則：

$$\sum_d q_{od} = G_o \qquad \forall o \qquad (2\text{-}6)$$

2.3 等価な NCP/VIP/FPP

補題 2.1：式(2-3)&(2-4)は，以下の相補性条件と等価である：

$$\begin{cases} q_{od} \cdot \{U_o - \varphi_{od}(R_d) + R_d - \psi_{od}(U_o)\} = 0 \\ \quad U_o - \varphi_{od}(R_d) + R_d - \psi_{od}(U_o) \geq 0 \quad \forall od \ (2\text{-}3') \\ \qquad\qquad q_{od} \geq 0 \end{cases}$$

さらに，式(2-6)を以下の相補性条件で置き換えた方程式系を考え

$$\begin{cases} U_o \cdot \{G_o - \sum_d q_{od}\} = 0 \\ \quad G_o - \sum_d q_{od} \geq 0 \qquad \forall o \qquad (2\text{-}6') \\ \qquad U_o \geq 0 \end{cases}$$

ベクトル $\mathbf{X} = [\mathbf{q}, \mathbf{U}, \mathbf{R}] \in K_1 = R_+^{MN+M+N}$，および以下のような写像 $\mathbf{F}: K_1 \to K_1$ の定義：

$$\mathbf{F(X)} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E}_1^T & \mathbf{E}_2^T \\ -\mathbf{E}_1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{E}_2\mathbf{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{R}) - \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{U}) \\ \mathbf{G} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}7)$$

を行うと，次の定理が導かれる.

定理 2.1：立地均衡モデル(2-3)～(2-6) [LE] は以下の標準型の非線型相補性問題(NCP)と等価である.

Find $\mathbf{X} \in \boldsymbol{K}_l$ such that

$$\mathbf{F(X)} \cdot \mathbf{X} = 0, \quad \mathbf{F(X)} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{X} \geqq \mathbf{0} \qquad (2\text{-}8)$$

相補性問題／変分不等式の標準的な理論において，NCP は変分不等式，不動点問題の特殊ケースであることが知られている．より具体的には，上の定理は以下の系が成立することを意味している.

系 2.1：均衡モデル [LE] は以下の不動点問題 (FPP: Fixed Point Problem) と等価である.

Find $\mathbf{X} \in \boldsymbol{K}_l$ such that

$$[\mathbf{X} - \mathbf{a}^{-1}\mathbf{F(X)}]_+ = \mathbf{X} \qquad (2\text{-}9)$$

ここで，$[\mathbf{Z}]_+$ は $\mathbf{Z} = (..,Z_i,..)$の各要素毎に $max[Z_i, 0]$をとるベクトル関数，$\mathbf{a}=\mathrm{diag}[a_i]$, a_iは適当な正値実数.

系 2.2：均衡モデル [LE] は以下の変分不等式問題 (VIP: Variational InequalityProblem)と等価である.

Find $\mathbf{X}^* \in \boldsymbol{K}_l$ such that

$$\mathbf{F(X^*)} \cdot (\mathbf{X}^* - \mathbf{X}) \geqq 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \boldsymbol{K}_l \qquad (2\text{-}10)$$

3. 基本モデルの解析とアルゴリズム

3.1 基本モデルの解の存在と一意性

均衡解の存在については，VIP に関する以下の基本的な補題をもとに検討することができる：

補題 3.1：VIP(F,K)は，F が K 上で連続かつ上に有界なら少なくとも一つの解が存在する.

定理 3.1：消費者の効用関数が連続かつ上に有界なら，均衡モデル [LE]には少なくとも一つの解が存在する.

次に，均衡解の一意性については，VIP に関する以下の基本的な補題をもとに検討することができる：

補題 3.2a：F が K_l 上で連続，微分可能で Jacobina が正定値行列なら，F は狭義単調(strictly monotone)関数.

補題 3.2b：F が K_l 上で狭義単調なら，VIP(F,K_l)の解は（もし存在するなら）唯一.

上の２つの補題を式(2-7)の写像 F に適用すれば，均衡解の一意性に関する以下の結果が導かれる：

定理 3.2：消費者の間接効用関数が，地代に関して狭義単調減少 (i.e. $\partial\varphi_{od} / \partial R_d < 0$) なら，均衡モデル[LE]の均衡解は一意的.

3.2 均衡解の計算アルゴリズム

式(2-7)の様な単調写像をもつ VIP 問題に対しては，大域的収束性が保証された各種の効率的 algorithm が最近になって提案されている．最も単純なものは，以下のような Fukushima(1992) による merit function を用いた射影法である：

Step 0. 繰返しカウンタ $k := 0$, 適当な初期許容解 $\mathbf{X}^k \in K_1$を設定.

Step 1. 探索ベクトル $\mathbf{d}^k$を次式で計算：

$$\mathbf{Z}^k := [\mathbf{X}^k - \alpha^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{X}^k)]_+, \quad \mathbf{d}^k := \mathbf{Z}^k - \mathbf{X}^k$$

Step 2. 次の形式の merit function:

$$f(\mathbf{X}) = -\mathbf{F}(\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{Z} - \mathbf{X}) - (1/2)(\mathbf{Z} - \mathbf{X}) \cdot \alpha(\mathbf{Z} - \mathbf{X}),$$

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{X} - \alpha^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{X})]_+$$

を用いて以下の１次元探索問題を解き，step size t_kを決定：

$$\min_{t_k} . f(\mathbf{X}^k + t_k \mathbf{d}^k) \quad s.t. \quad 0 \le t_k \le 1$$

Step 3. 解を次式で改訂：

$$\mathbf{X}^k := \mathbf{X}^k + t_k \mathbf{d}^k = (1 - t_k)\mathbf{X}^k + t_k \mathbf{Z}^k$$

Step 4. 収束していれば終了，そうでなければ $k:=k+1$ とし ***Step 1*** へ.

4. 交通網均衡と立地均衡の統合モデル

4.1 モデルの枠組みと記号の定義

本節では，２節のモデルに，混雑のある一般的な構造のネットワーク上での Wardrop 交通均衡モデルを組み込む．住宅立地原則，立地空間，消費者の効用関数等に関する仮定は第２章と全く同じものを採用するが，消費者の効用関数に含まれる交通費用 T_{od}は内生変数化される．

２節との変更点／追加事項のみを以下に記す．まず，間接効用関数は，地代のみならず交通費用 T_{od}にも明示的に依存した関数 $\varphi_{od}(R_d, T_{od})$ として扱われる．また，同様に，つけ値地代関数も $\psi_{od}(U_o, T_{od})$ となる．交通ネットワークは，リンクとノードの集合からなり，リンク(i,j)の一般化交通費用関数はそのリンクの交通量 x_{ij} の単調増加関数 $c_{ij}(x_{ij})$ として与えられる．また，起点が o を持つリンク(i,j)上の交通量を x_{ij}^o と書き，そのベクトルを $\mathbf{x}^o=(.., x_{ij}^o,..)^T \in R_+^L$, $\mathbf{x}=(.., \mathbf{x}^o,..)^T \in R_+^{ML}$ と表す．ネットワークの構造は，以下の接続行列によって一般的に表現される：$\mathbf{B}_o$: $\hat{N}$ 行 L 列の node-link 接続行列 (i 行 j 列要素: i 番目ノードが j 番目リンクの始点なら 1, 終点なら -1, その他なら０)，$\mathbf{B}$: M 個の block 対角要素が全て行列 $\mathbf{B}_o$であるような M$\hat{N}$ 行 ML 列の行列.

4.2 モデルの基本的な定式化

立地均衡と交通ネットワーク均衡が同時に成立した状態は，以下のように定式化される．

1) 消費者均衡条件：式(2-3)．ただし，間接効用関数 φ_{od}は，R_dのみならず T_{od} の関数でもある．

2) 土地市場均衡条件：式(2-4),(2-5)．ただし，付け値関数 ψ_{od}は，U_oのみならず T_{od} の関数でもある．

3) 消費者(世帯)数の保存則：式(2-6).

4) 経路選択均衡条件：

$$\begin{cases} x_{ij}^o \cdot \{T_{oj} - T_{oi} - c_{ij}(x_{ij})\} = 0 \\ \quad T_{oj} - T_{oi} - c_{ij}(x_{ij}) \ \ge 0 \quad \forall o, \forall (i,j) \\ \qquad\qquad x_{ij}^o \ \ge 0 \end{cases} \qquad (4\text{-}3)$$

5) 交通ネットワークフローの保存則：

$$\sum_i x_{ik}^o - \sum_j x_{kj}^o - q_{ok} = 0 \qquad \forall o, \ \forall k, k \ne o \quad (4\text{-}4)$$

$$\sum_o x_{ij}^o = x_{ij} \qquad \forall (i,j) \quad (4\text{-}5)$$

4.3 等価な NCP/VIP/FPP

２節の補題 2.1 から，式(2-3)&(2-4)は，単一の相補性条件(2-3')と等価である．また，式(2-6)を式(2.6')で置き換え，さらに，式(4.4)を以下の相補性条件：

$$\begin{cases} T_{ok} \cdot \{\sum_i x_{ik}^o - \sum_j x_{kj}^o - q_{ok}\} = 0 \\ \quad \sum_i x_{ik}^o - \sum_j x_{kj}^o - q_{ok} \ \ge 0 \quad \forall o, \ \forall k, k \ne o \\ \qquad\qquad T_{ok} \ \ge 0 \end{cases} \qquad (4\text{-}3')$$

で置き換えた方程式系を考える．そして，以下の様な $\mathbf{X} = [\mathbf{x}, \mathbf{T}, \mathbf{q}, \mathbf{U}, \mathbf{R}]^T \in K_3 = R_+^{ML+M\hat{N}+MN+M+N}$, および $\mathbf{F}: K_3 \to K_3$ の定義：$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{M}\,\mathbf{X} + \mathbf{G}(\mathbf{X})$,

ここで，$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B}^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B} & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{E}_1^T & \mathbf{E}_2^T \\ 0 & 0 & -\mathbf{E}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{E}_2\mathbf{L} & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = [-\mathbf{c}(\mathbf{x}), \mathbf{0}, -\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{R}, \mathbf{T}) - \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{U}, \mathbf{T}), \mathbf{G}, \mathbf{A}]^T,$$

を行うと，次の定理が導かれる．

*定理 **4.1**：式(2-3)〜(2-6)&(4-3)-(4-5)の立地・交通均衡モデル [LTE] は以下の問題と等価である.*

a) NCP: Find $\mathbf{X} \in \boldsymbol{K}_3$ such that

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{X} = 0, \quad \mathbf{F}(\mathbf{X}) \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{X} \geqq \mathbf{0} \qquad (4\text{-}7)$$

b) FPP: Find $\mathbf{X} \in \boldsymbol{K}_3$ such that

$$[\mathbf{X} - \mathbf{a}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{X})]_+ = \mathbf{X} \qquad (4\text{-}8)$$

c) VIP: Find $\mathbf{X}^* \in \boldsymbol{K}_3$ such that

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}^*) \cdot (\mathbf{X}^* - \mathbf{X}) \geqq 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \boldsymbol{K}_3 \qquad (4\text{-}9)$$

5. 統合モデルの解析とアルゴリズム

5.1 統合モデルの解の存在と一意性

補題 3.1 を VIP (4-9) に適用すれば モデル[LTE]の解の存在に関する以下の結果が得られる．

定理 5.1：消費者の間接効用関数が連続かつ上に有界で，リンクコスト関数が連続かつ非負関数なら，均衡モデル [LTE] には少なくとも一つの解が存在する．

補題 3.2 を VIP (4-9) に適用すれば解の一意性に関する以下の結果が得られる．

定理 5.2：消費者の間接効用関数が地代・交通費用に関して狭義単調減少 (i.e. $\partial\varphi_{od}/\partial R_d < 0$, $\partial\varphi_{od}/\partial T_{od} < 0$) かつリンクコスト関数がリンクフローに関して単調非減少関数なら，モデル [LTE] の均衡解は一意的．

5.2 均衡解の計算アルゴリズム

VIP (4-9) は単調な写像をもつ問題であるので，基本的には，３節と同様のアルゴリズムが利用可能である．しかし，一般的なネットワークを含んだ大規模問題となっているため，その問題構造を活かしたより効率的なアルゴリズムを利用するのが望ましい．

そこで，以下では，ネットワーク問題の効率的計算法を活用したアルゴリズムを提案する．この方法では，k 回目繰返しにおける探索方向ベクトルを決定するために，もとの問題のリンクコスト*関数*をリンクフロー$\mathbf{x}^k$ で評価したコスト $\mathbf{c}(\mathbf{x}^k)$（＝*定数*）に置き換えた以下のような"補助問題"：

[VIP-PL]　Find　$\mathbf{Y}^* \in \boldsymbol{K}_3$ such that

$$\mathbf{F}_{PL}(\mathbf{Y}^*) \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^*) \geqq 0 \quad \forall \mathbf{Y} \in \boldsymbol{K}_3$$

を解く．ここで，$\mathbf{F}_{PL}$ は $\mathbf{F}$ に含まれる写像 $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ を定数ベクトル $\mathbf{c}(\mathbf{x}^k)$ に置き換えた写像．この補助問題は，もとの VIP を解 $\mathbf{X}^k$ の周りで（リンクフロー$\mathbf{x}$ に関してのみ）部分的に線形化した問題に相当する．このアルゴリズムの大域的収束性は，Patricksson (1993) が凸計画問題のための一般的な部分線形化アルゴリズムに対して示した収束性の証明とほぼ同様の論理によって保証される．

Step 0: 繰返しカウンタ $k := 0$,　適当な初期許容解

$\mathbf{X}^k := (\mathbf{x}^k, \mathbf{T}^k, \mathbf{q}^k, \mathbf{U}^k, \mathbf{R}^k)^T \in \boldsymbol{K}_3$ を設定．

Step 1: 補助問題[VIP-PL]を解き，その結果を

$\mathbf{X}^{SUB} := (\mathbf{x}^{SUB}, \mathbf{T}^{SUB}, \mathbf{q}^{SUB}, \mathbf{U}^{SUB}, \mathbf{R}^{SUB})^T$ とする．

Step 2: 探索ベクトル $\mathbf{d}^k$ を次式で計算：$\mathbf{d}^k := \mathbf{X}^{SUB} - \mathbf{X}^k$

Step 3: 次の形式の merit function:

$$f(\mathbf{X}) = -\mathrm{F}(\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{Z} - \mathbf{X}) - (1/2)(\mathbf{Z} - \mathbf{X}) \cdot \alpha(\mathbf{Z} - \mathbf{X}),$$

ここで，$\mathbf{Z} = [\mathbf{X} - \alpha^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{X})]_+$,

を用いて以下の１次元探索問題を解き，ステップサイズ t_k を決定：$\min_{t_k}. f(\mathbf{X}^k + t_k \mathbf{d}^k)$　s.t.　$0 \le t_k \le 1$

Step 4: 解を次式で改訂：　$\mathbf{X}^k := \mathbf{X}^k + t_k \mathbf{d}^k$

Step 5: 収束していれば終了，そうでなければ $k := k+1$ とし ***Step 1*** へ．

上の ***Step 1*** の補助問題[VIP-PL]は，問題を分割でき，以下の手順により効率的に解くことができる：

Step 1-1: *リンクコスト・パターン* $\mathbf{c}^k := \mathbf{c}(\mathbf{x}^k)$ に対して最短経路探索を行い，その結果得られる各ＯＤペア間の最小交通費用ベクトルを $\mathbf{T}^{SUB}$ とする．

Step 1-2: $\mathbf{T}^{SUB}$ を所与の定数として，以下の VIP（２節の VIP と同形式）：

Find　$\mathbf{Z}^* \in \boldsymbol{K}_1$ such that　$\mathbf{F}_{PLS}(\mathbf{Z}^*) \cdot (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^*) \geqq 0$　$\forall \mathbf{Z} \in \boldsymbol{K}_1$

ここで，$\mathbf{Z} = [\mathbf{q}^{SUB}, \mathbf{U}^{SUB}, \mathbf{R}^{SUB}]^T$,

$$\mathbf{F}_{PLS}(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E}_1^T & \mathbf{E}_2^T \\ -\mathbf{E}_1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{E}_2\mathbf{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Z} + \begin{bmatrix} -\varphi(\mathbf{R}^{SUB}) - \Psi(\mathbf{U}^{SUB}) \\ \mathbf{G} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

を３節の射影法等のアルゴリズムによって解く．

Step 1-3: ***Step 1-2*** で得られたＯＤ交通量 $\mathbf{q}^{SUB}$ を ***Step 1-1*** で得られている最短経路に all or nothing 配分し，そのリンクフローを $\mathbf{x}^{SUB}$ とする．

参考文献

[1] W.Alonso, *Location and Land Use*, Harvard University Press, 1964.

[2] 安藤朝夫, "住宅立地の静学分析: NUE モデルへの統一的アプローチ", 地域学研究 **13**, 1-23, 1983.

[3] M.Fujita, *Residential Land Use Theory*, Cambridge University Press, 1987.

[4] M.Fukushima, "Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems", Mathematical Programming **53**, pp.99-110, 1992.

[5] D.Kinderlehrer and G.Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, New York, 1980.

[6] M.Patricksson, "Partial linearization methods in nonlinear programming", *Journal of Optimization Theory and Applications* **78**, 227-246, 1993.

[7] W.C.Wheaton, "Linear programming and location equilibrium: the Herbert-Stevens model revisited", *Journal of Urban Economics* **1**, 278-287, 1974.