【土木計画学研究・講演集　No.19(2)　1996年11月】

Hub-Spokes／Point-to-Point や集約型／直行型などの一般的多段階輸送のモデル化とその基本特性*

*Modeling and Solving of General Multi-Step Transport Systems including Hub-Spokes / Point-to-Point and/or Consolidation / Direct Delivery Concept**

家田　仁**
*By IEDA, Hitoshi***

1．はじめに

航空や海運（特にコンテナ輸送）における Hub-Spokes タイプと Point-to-Point タイプの輸送、宅配便や郵便などの多段階のターミナル集約輸送と自家用の直行トラック輸送、あるいは乗換えを伴うマストラによる集約輸送とドア to ドアのマイカーなど輸送の方式は多様である。需要の密度や距離特性、あるいは機材やインフラの技術的条件に応じて定まる、規模の経済性などをはじめとした輸送やターミナルのコスト特性（とその変化）によって、どのような輸送方式がユーザーの利便などを含めて経済合理性をもつのかという問題は、Hub 空港や港湾、都市の物流交通問題などを持ち出すまでもなく、交通計画上の重要な課題である。また、これは交通学に関する教育メニューの中でも、ハイライトの一つであると言えよう。

本稿は、直行輸送は（多段階）集約タイプの輸送の特殊ケースであることから、これらをまとめて「一般的多段階輸送」としてモデル化し、ＤＰで解くことによって、前提となる諸ファンダメンタルズと合理的選択の結果として採用される（はずの）輸送方式の関係を検討しようとするものである。本モデルは、単純であるから直ちに実務的に有用とは全くいえないが、交通の基本メカニズム（の一つ）を理解する上で、教育上非常に有効であり、また学生がＤＰという知的トレーニングに向いた方法論に触れるのにも適切な課題であると筆者は考えている。

また、このフレームは、Christaller の中心地理論的な都市の階層構造、道路の機能や卸－小売など流通チャンネルの上の階層構造などの分析にも応用できそうである。

なお、本稿のようなモデル化は、ＯＲや地理などの分野において全くなされていないわけではないが、交通を専門とする筆者の目からすると現象を理解するのにふさわしい定式化には至っていないと認識し、本稿を執筆した次第である。

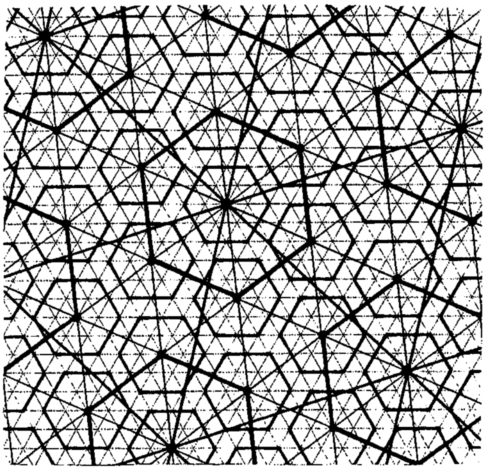
*　キーワーズ：Hub-Spokes、交通網計画、ターミナル計画、物資流動
**　正会員、工博　東京大学大学院社会基盤工学専攻
113 文京区本郷7-3-1,　Fax:+81-3-5800-6868
Email: ieda@trip.t.u-tokyo.ac.jp

2．一般的多段階輸送のモデル化

（１）多段階輸送の表現方法

無限に広がる平面を隣接する格子点の距離が D_0 の正三角格子によって表現し、各格子点に等質な一つのノードを対応させる。これを基本格子と呼ぶ。この任意の格子点間で輸送需要が発生し、コスト最小化などといった何らかの合理的な方法によって輸送が行われることを考える。（図－１）

このような格子点間輸送の一つは、各格子点間をそれぞれ直接結んで輸送（直行輸送）する方法である。もう一つは、複数の格子点群をグループとしてまとめ、それらの上位に新たに一つづつターミナルを設け、各格子点の輸送を一旦これらのターミナルに集約した上で、ターミナル間で直行輸送をする方式（集約輸送）である。さらに、このような集約輸送を多段階にわたって繰り返した後に直行輸送する方式も考えられる。何段階で集約するか？あるいはしないか？各レベルでのターミナルテリトリー（１つのターミナルの下位に入る格子点群を取り



図－１　正三角格子と正六角テリトリー

（19 基本格子点で１つの一次ターミナルを作り，さらに新たな７格子点で一つの二次ターミナルを作る例）

囲む領域）の大きさはどうすべきか？といった要素が未知の計画ファクターとなる。

そこでは、規模の経済性を前提にして、集約の度を高めるほど輸送密度が高まって輸送コストが低下する反面、積み替えコストなどのターミナルコストや輸送距離が伸びるなどの損失が増えるというトレードオフがある。また、集約段階数が少ないとターミナルコストが抑えられる反面、一つのテリトリーが大きくなることにより内々輸送量が増え、せっかく集約してもターミナル間の輸送にまわされる量が減るから、集約の効果も薄れるというトレードオフも生じる。

さて、格子点とターミナルの幾何的な関係をおさえておこう。まずターミナルは、テリトリーの図心に設けられるものとする。こうしてできたターミナル群は新たな上位の格子点群となる。テリトリーの形状は、一義的には決められないが、ここでは、辺長が D_0 の自然数倍である正六角形（HT（Hexigonal Territory）と呼ぶ）をとることとする。これは、HTが等方性が高く、しかも新たに生み出される格子点も同じく正三角形の格子点を作るので、以降で述べるような再帰的な操作に向いているためである。（図－1）

無限に広がる辺長 d の正三角格子に、n を自然数として辺長 n·d のHTを設け、その中心にターミナルを作り、新たな上位の格子点とする。隣接する新たなターミナル間の距離、すなわち上位の正三角格子の辺長 D は、

$D=f_n d$　　ここで、$f_n=(3n^2+3n+1)^{1/2}$　　(1)

となる。また、このHTに含まれる格子点の数 P_n は、以下となる。

$P_n=3n^2+3n+1$　　(2)

（2）多段階輸送の最適化法（DPの応用）

今、基本格子辺長を D_0 として、このような集約輸送が複数のステップにわたり高々K回（0回からK回）まで繰り返され、最後に直行輸送が行われるものとする。また、各段階のHTの辺長は、その段階の格子点の辺長の高々N倍とする。k番目のステップ（ここで、$1\leqq k\leqq K+1$）におけるHTの辺長 D_k は、(1)式によって、格子点の辺長 D_{k-1}（すなわちk-1番目のステップにおけるHTの辺長）の f_n 倍（ここで、$1\leqq n\leqq N$）となる。従って、第1番目のステップから通算すれば、D_k は、D_0 の f_1^k 倍, $f_1^{k-1}f_2$ 倍, . . , f_N^k 倍と、「N種のものから重複を許してk個取り出す組み合わせの数」だけの値をとることができる。この組み合わせの数 M_k は、

$M_k={}_{N+k-1}C_k=(N+k-1)!/\{(N-1)!k!\}$　　(3)

となる。ここで、

$M_k=(N+k-1)k^{-1}M_{k-1}$　　$(M_0=1)$　　(4)

が成り立つ。M_k 個の組み合わせ中の m 番目の D_k の値を $D_k(m)$（$1\leqq m\leqq M_k$）と書く。（基本格子辺長 D_0 についても、以降では $D_0(1)$ と書く。）

今、k番目のステップにおいて、格子点辺長が m 番目の値 $D_{k-1}(m)$ である時、これを辺長が n のHTに集約すると、次のステップの格子点辺長 $f_n D_{k-1}(m)$ の値を $D_k(\cdot)$ の中で検索すれば、

$D_k(m')=f_n D_{k-1}(m)$　　(5)

となる添え字 m' を見いだすことができる。この第k番目のステップ以降の輸送で要するコスト $C(D_{k-1}(m),n)$ は、HT内の各格子点とHTのターミナルの間でのフィーダー輸送に関わるコスト $C_T(D_{k-1}(m),n)$ と、HTに集約した以後の輸送（HT間の直行輸送やさらに上位の集約輸送）に要するコストの和で表すことができる。なお、n=0 のケースは直行輸送を表すことにする。従って、コスト $C(D_{k-1}(m),n)$ の n についての最小値 $C_{min}(D_{k-1}(m))$ は、「前者 $C_T(D_{k-1}(m),n)$ と、そのnを前提にしたときにk+1ステップ以降に要するコストの最小値 $C_{min}(D_k(m'))$ の和」を最小とするようなnによって与えられる。各コストをkステップにおける格子点1つあたりで算出すると、(2)式を用いて、以上の関係は次のように表現される。

$$C_{min}(D_{k-1}(m))=\min_{0\leqq n\leqq N}\{C_T(D_{k-1}(m),n)+(1/P_n)C_{min}(D_k(m'))\}$$

for $1\leqq k\leqq K+1$、for $1\leqq m\leqq M_k$、$M_k=(N+k-1)k^{-1}M_{k-1}$ $(M_0=1)$。ここで、$P_n=3n^2+3n+1$、

m' : $D_k(m')=f_n D_{k-1}(m)$、$f_n=(3n^2+3n+1)^{1/2}$

n=0 の時は直行輸送を表し、{ }の第二項はゼロ。

また、最小値を与える n を $n^{opt}(k,m)$、その n に対応した m' を $m'=m^{opt}(k,m)$ とする。　　(6)

この問題は、本来は無数の組み合わせをもつ整数計画問題であるが、C_{min} が上記のような再帰的な表現になっていることから、いわゆる動的計画法（DP）によって格段に少ない労力で解くことができる。

k=1 から逐次(6)式をたどると、最後には k=K+1 のステップに至る。仮定によりこのステップでは直行輸送のケースのみ考えればよい。従って、

$C_{min}(D_K(m))=C_T(D_K(m),0)$、

$n^{opt}(K+1,m)=0$、 for $1\leqq\forall m\leqq M_K$　　(7)

となる。こうして得られた $C_{min}(D_K(m))$ を用いて(6)式により $C_{min}(D_{K-1}(m))$、$n^{opt}(K,m)$、$m^{opt}(K,m)$ を発見することができる。このようにして逐次 k を下げすべての k と m について演算を進めれば、最後には、$C_{min}(D_0(1))$、$n^{opt}(1,1)$、$m^{opt}(1,1)$ が求まる。従って、逆に $m^{opt}(1,1)$ から $m^{opt}(k,m)$ を順次 $n^{opt}(k,m)=0$ となるまでたどっていけば多段階の

最適な輸送方式を知ることができる。

(3) 輸送量の導出

任意の1格子点Aとそこから距離 r だけ離れた格子点の間の輸送量を q_r とした時、輸送量が距離に応じて $q_r = we^{-ar}$ と表されるとする。A点の周囲に同心的に多層の正六角形を描くと、A点から j 層目の六角形上の格子点（点数は、6j）までの距離 r_j は、$(3^{1/2}/2)Dj \leqq r_j \leqq Dj$ となる。その代表値として近似的に最大値と最小値の平均をとると、

$$r_j = bDj \qquad ここで、b=(3^{1/2}+2)/4 \tag{8}$$

となる。A点の発着輸送量 Q は、A点と他の各点との間の輸送量の総和によって表される。A以外のすべての点は、 A点の周りのいずれかの層の正六角形の上に乗る。A点と他の点との間の輸送量を(8)式の距離を用いて計算し、多重の正六角形に従って無限遠まで順次加えると、この値は収束し[注1)]、

$$Q = \sum_{j=1}^{\infty} 6jq_r = \sum 6jwe^{-abDj}$$
$$= 6w \sum je^{-abDj} = 6we^{-abD}/(1-e^{-abD})^2 \tag{9}$$

となる。逆に1格子点の発着量 Q が与えられた時、距離が r 離れた格子点間の輸送量 q_r は、

$$q_r = we^{-ar} \quad ここで、w=(Q/6)\cdot e^{abD}(1-e^{-abD})^2 \tag{10}$$

となる。

辺長が nD のHTには、(2)式により P_n 個の格子点が含まれるから、ターミナルに発着する総輸送量 Q_{HTTL} は、

$$Q_{HTTL} = P_nQ = (3n^2+3n+1)Q \tag{11}$$

となる。

次にこのHTの内部で輸送が帰結する内々輸送量 Q_{HTIN} を算出する。HTに含まれ、かつHTの中心から i 層目の正六角形の頂点の1つ点Bをとる。この点の周囲に同心的に正六角形状の層を描くと、点Bから j 層目の正六角形上に位置し、かつ同じHTに所属する格子点の数 N(j, i, n)は、簡単な考察によって以下のように表される。

N(j, i, n) =

<u>i=0 の時、</u>

6j	$1 \leqq j \leqq n$

<u>0<i<n の時、</u>

6j	$1 \leqq j \leqq n-i$
2(n-i+j)+1	$n-i+1 \leqq j \leqq n$
2n+1	$n+1 \leqq j \leqq n+i$

<u>i=n の時、</u>

2(n-i+j)+1	$1 \leqq j \leqq n$
2n+1	$n+1 \leqq j \leqq 2n$ (12)

このとき、第 j 層の正六角形上の各点とB点との距離を前項と同様に(8)式により bDj で近似して、(10)式により輸送量を計算し、第 j 層の所属格子点数 N(j, i, n) と第 i 層上の格子点数 6i をかけ、ダブルカウントに注意して総和をとると、HTの内々輸送量 Q_{HTIN} は、以下のように求めることができる。

$$Q_{HTIN} = (1/2)\Big[\sum_{j=1}^{n} N(j,0,n)we^{-abDj} + \sum_{i=1}^{n} 6i \sum_{j=1}^{n+i} N(j,i,n)we^{-abDj}\Big] \tag{13}$$

従って、ターミナルを通じてHTの外部とやりとりする輸送量、すなわち新たな上位格子点の1点あたりの発着輸送量 Q'は、(11)から(13)を差し引き、

$$Q' = Q_{HTTL} - Q_{HTIN} = (3n^2+3n+1)Q - Q_{HTIN} \tag{14}$$

となる。

ステップ k における m 番目の格子点辺長 $D_{k-1}(m)$ に対応した、格子点発着輸送量を前項の表記法に従い $Q_{k-1}(m)$ とする。（同じく、基本格子点の発着輸送量 $Q_0(1)$ が所与とする。）この時、第 k ステップで辺長が格子点辺長の n 倍のHTに集約される場合、任意の n に対応して $D_k(m') = f_nD_{k-1}(m)$ となる m'を検索しておき、(10)と(13)に $D_{k-1}(m)$ と $Q_{k-1}(m)$ を代入し、(14)式から次のようにステップ k+1 における格子点発着輸送量の一つを算出できる。

$$Q_k(m') = (3n^2+3n+1)Q_{k-1}(m) - Q_{HTIN} \tag{15}$$

こうして逐次、$Q_k(m)$ $(1 \leqq k \leqq K、1 \leqq m \leqq M_k)$ が求まる。

(4) コストの導出

コストとしては、輸送コストとターミナルコストを取り入れる。輸送量 q を距離 r だけ輸送するコスト C（貨幣的なコストも時間的なコストもその他諸々合わせて扱う。）が、c_A を単位距離あたり、単位輸送量あたりのコストとして次のように記述されるものとする。

$$C = c_A \cdot q \cdot r = c_1q^{1-s_1}r \qquad ここで、c_A = c_1q^{-s_1} \quad (0 \leqq s_1 < 1) \tag{16}$$

s_1 は、規模の経済性の高さを表し、$s_1=0$ の時には、規模の経済性が存在せず、平均コストは輸送量によらず一定となる。

格子点辺長が D で、格子点発着輸送量が Q の時、これらを各格子点間の直行輸送で輸送するコスト $C_T(D, 0)$ は、(16)式に(8)式と(10)式を代入し、$a_1 = a(1-s_1)bD$ と置いて、無限級数を計算すると、これは次のように収束する。[注2)]

注1、2：
(9)式の級数は、両辺に e^{-abD} を掛けたものを差し引くことによって簡単に算出され、その極限をとると収束することが確認できる。(17)式も同様に操作し(9)式の結果を用いて計算できる。

表－１　適用計算例

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5	Case 6	Case 7	Case 8	Case 9	Case 10	Case 11	Case 12	Case 13	Case 14
Parameters	$D_0=1,\ Q_0=10^{-2},\ c_1=c_2=10^{-2}$									$D_0=1,\ c_1=10^{-2}$				
	$a=1$						$s_1=s_2=0.7$			$Q_0=10^{-2},\ a=0.1$		$a=1,\ c_2=1,\ s_1=0.95,\ s_2=0.05$		
	$s_{1,2}=0.5$	$s_{1,2}=0.6$	$s_{1,2}=0.7$	$s_{1,2}=0.8$	$s_{1,2}=0.9$	$s_{1,2}=0.95$	$a=3$	$a=2$	$a=0.5$	$c_2=10^{-2}$	$c_2=1$	$Q_0=10^{-4}$	$Q_0=10^{-2}$	$Q_0=1$
						Direct				Direct		Direct		
3rd level Terminal					Direct	3(42.58) *37[1813]*				2(50.27) *19[2527]*	Direct	3(42.58) *37[1813]*	Direct	
2nd level Terminal		Direct	Direct	Direct	4(20.66) *61[427]*	1(7.0) *7[49]*		Direct	Direct	2(11.53) *19[133]*	4(47.51) *61[2257]*	1(7.0) *7[49]*	5(41.58) *91[1729]*	Direct
1st level Terminal	Direct	1(2.65) *7[7]*	2(4.36) *19[19]*	5(9.54) *91[91]*	1(2.65) *7[7]*	1(2.65) *7[7]*	Direct	1(2.65) *7[7]*	5(9.54) *91[91]*	1(2.65) *7(7)*	3(6.08) *37[37]*	1(2.65) *7[7]*	2(4.36) *19[19]*	25(44.17) *1951[1951]*
BTG	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)
# of Terminals for a BTG	0	.143	.053	.011	.131	.164	0	.143	.011	.061	.027	.164	.053	.001

BTG: Basic Triangle Grid
Direct: Direct Transport

n: Side of HT in adjacent lower grid distance (D: Distance of adjacent HT terminal in D_0)
P_n: # of adjacent lower grid [ΣP_n:Cumulative # of basic grid]

$$C_T(D,0)=\sum_{j=1}^{\infty}(6j)\,c_1 q_r^{\,1-s1}(bDj)$$
$$=6bDc_1\,\Sigma\, j^2(we^{-abDj})^{1-s1}$$
$$=6bDc_1 w^{1-s1}\sum_{j=1}^{\infty} j^2 e^{-a1j}$$
$$=6bDc_1 w^{1-s1}(e^{-a1}+e^{-2a1})/(1-e^{-a1})^3$$
$$\text{ただし、}\quad w=(Q/6)\cdot e^{abD}(1-e^{-abD})^2 \qquad (17)$$

次にＨＴに集約輸送する時の、ＨＴ内の各点とＨＴの中央に設けられるターミナルとの間の（１つのＨＴあたりの）輸送コスト C_{C1} を算出する。上記と同様に正六角形の層に従って算出する。この場合すべてが一旦ターミナルへ輸送されるわけであるから、輸送量は各点ともＱで一定である。従って、

$$C_{C1}=\sum_{j=1}^{n}(6j)\,c_1 Q^{1-s1}(bDj)=6bDc_1 Q^{1-s1}\,\Sigma\, j^2$$
$$=bDc_1 n(n+1)(2n+1)Q^{1-s1} \qquad (18)$$

となる。ターミナルコスト C_{C2} は、１ターミナルあたりの取扱い量をｑとしたとき、同様に規模の経済性を考慮し、

$$C_{C2}=c_2 q^{1-s2} \qquad \text{ただし、}\quad 0\leqq s_2<1 \qquad (19)$$

とする。ＨＴ内の各点の発着量の総和がターミナルの取扱量であるから、C_{C2} は、

$$C_{C2}=c_2(3n^2+3n+1)^{1-s2}\,Q^{1-s2} \qquad (20)$$

となる。よって、辺長 nD のＨＴを設ける集約輸送の１格子点あたりのコスト $C_T(D,n)$ は C_{C1} と C_{C2} の和を(2)式のＨＴの格子点数で除すことにより、以下のように与えられる。

$$C_T(D,n)=(C_{C1}+C_{C2})/P_n$$
$$=bDc_1Q^{1-s1}n(n+1)(2n+1)/(3n^2+3n+1)$$
$$+\ c_2Q^{1-s2}(3n^2+3n+1)^{-s2}$$
$$\text{ただし、}\ 1\leqq n\leqq N\quad (n=0\text{ の時、直行輸送}) \qquad (21)$$

３．適用計算例

以上より、基本格子の辺長と輸送需要、コストに関する諸パラメータが与えられると、まず(5)式による $D_k(m)$ と(15)式による $Q_k(m)$ を算出しておけば、これらに基づいて、(17)式と(21)式により任意のケースのコスト $C_T(D_k(m),n)$ が計算できるから、(6)(7)式を通じて最適な輸送方式を発見することができる。

表－１は、計算の一例である。1)Case1～6 ではコストにおける「規模の経済性」が高まるにつれて、2)Case3 と Case7～10 では輸送の足が長くなるにつれて、3)Case12～14 では地理的な輸送需要密度が低いほど、いずれも集約の度合いが進むことがわかる。また、Case10 に比べて Case11 では、積み替えや迂回ルートによる時間ロスなどターミナルコストのウェイトが高まることによって、より集約度の低いタイプの輸送方式へと移行することがうかがえる。■

参考文献

1)　小林清晃：輸送計画の研究、所書店
2)　田辺健一ほか：都市地理学、朝倉書店
3)　杉山昌平：動的計画法、日科技連