【土木計画学研究・講演集 №.19(2) 1996年11月】

ランダム限界効用に基づく滞在時間モデルの導出*

A Duration Model Based on the Random Merginal Utility*

小林潔司** ・喜多秀行*** ・後藤忠博****

By Kiyoshi KOBAYASHI**, Hideyuki KITA*** and Tadahiro GOTO****

1. はじめに

駐車場などのターミナル施設では滞在時間分布が到着パターンと共に利用挙動の支配的要素となっているため、施設の整備運営計画を策定するにあたっては、滞在時間分布を的確に予測するとともに可能な範囲でこれを適切に制御することが要請される。また、数多くの訪問客が訪れる観光地を擁する地域では、当該観光地における滞在時間が地域の交通パターンに大きく影響する。したがって、交通計画を策定する場合には観光地への訪問時刻や滞在時間を適切に推計することが要請される。

滞在時間は、目的地に滞在することの魅力が大きいほど長くなり、かつ滞在するために負担しなければならない費用がかさむほど短くなる。すなわち、個人はこれらの要因を勘案して滞在時間を決定していると考えられる。このことは逆に、滞在することの魅力やそれに伴う費用の大きさに関係する要因を変化させることにより、滞在時間をコントロールすることが可能であることをも意味している。したがって、滞在時間の予測モデルを構築する際には、このような滞在時間の決定行動を種々の影響要因や政策変数と関連づけた形でモデル化する必要がある。

そこで、本研究ではランダム限界効用モデルを用いて個人の効用最大化行動と整合が取れた形で滞在時間モデルを提案し、時間価値分布が一様分布する場合の滞在時間分布を導出する。一般に、滞在時間は他の活動をも含めた複数の活動間における時間配分の結果として決定されるが、本研究では単一目的地における滞在の継続時間に限定してモデル化を行う。

2. 従来の研究

期間モデル (duration model) は、元来信頼性分析の分野で発展してきた手法であるが、最近になり行動科学の分野でも頻繁に用いられるようになってきた[1)]。しかし、これらの研究は生存関数あるいはハザード関数を統計的に推計する段階に止まっており、個人行動を内包する形にはなっていないのが実状である。したがって、各種の料金政策や公共施設等の整備が滞在時間の分布に及ぼす影響等の政策分析には適用できないという限界がある。

他方、時間配分に関する研究も数多くなされており[2)]、交通の分野においても activity-based approach に基づいて時間配分のモデル化が試みられている[3)]。しかし、これらの研究は、個人の行動選択プロセスに着目しているものの時間を離散的に扱っており、滞在時間の分布形を論じるには必ずしもそぐわない。個人の効用最大化行動に基づいて活動継続時間分布がどのように規定されるかを検討した研究は、わずかに Pudney[4)] に見られるが、これとて利用者の異質性を明確に考慮していない。

3. 基本モデルの定式化

本研究では滞在時間の決定問題に焦点を絞るためモデルの定式化にあたって以下のような仮定を設ける。すなわち、1）ある単一の目的地での滞在行動に着目する。2）目的地での金銭出費は滞在時間に比例する。3）個人の時間価値（時間の機会費用）は一定である。これらは、いずれもある目的地への訪問行動を他の交通行動や消費行動と切り離して、部

---

*キーワーズ：時刻選択，交通行動分析，駐車
**正会員，工博，京都大学大学院工学研究科教授
(京都市左京区吉田本町，TEL&FAX 075-753-5071)
***正会員，工博，鳥取大学工学部社会開発システム工学科教授
(鳥取市湖山町南4丁目101，TEL 0857-31-5309，FAX 0857-31-0882)
****正会員，工修，(株) オリエンタルコンサルタンツ
(川崎市高津区久本3-5-7，ニッセイ新溝のロビル，TEL 044-812-8208，FAX 044-812-8209)

分均衡分析を行うために設けた仮定である。以上の仮定により、経済理論と整合のとれた形で目的地での滞在行動をモデル化できることになる。

ある個人が目的地に滞在することにより獲得する効用を、一般化された合成財に関して準線形なSamuelson 型効用関数[5)]により表現する。

$$U(t, x_0, t_0, \boldsymbol{\xi}; \varepsilon) = u(\phi(t, \boldsymbol{\xi})) + x_0 + \varepsilon t_0 \tag{1}$$

ここに、$\boldsymbol{\xi}$は目的地の特性や個人属性を表す変数ベクトル、x_0は合成財の消費量、t_0は当該活動以外に投入する時間である。$z = \phi(\cdot)$ は家計生産関数であり、家計が自己の時間資源 t を環境要因$\boldsymbol{\xi}$と結合させることにより滞在サービス zを生産する技術を表現する。効用関数の第1項は、滞在サービスを自己生産・自己消費することにより得られる部分効用を意味している。部分効用関数 $u(z)$ は、滞在サービス zに関して

$$\frac{\partial u(z)}{\partial z} > 0, \quad \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2} < 0 \tag{2}$$

を満足する。これは効用関数が単調増加かつ強凹関数であることを意味する。また、滞在サービスが $z = 0$ の場合、$u(0) = 0$ が成立すると仮定する。これは効用関数の基準化のための仮定である。εは時間の機会費用を表す確率変数である。full-income 仮説では、時間の機会費用εは賃金率で表現される。εは個人にとって定数であるが、観測者には観測できない確率変数であると考える。

個人は、$t + t_0 = T$、$pt + x_0 = Y$、という金銭・時間に関する2つの予算制約に直面する。ここに、Tは個人の利用可能時間、Yは所得、pは単位時間当たりの滞在費用（以下、限界滞在費用と呼ぶ）である。したがって、個人の滞在時間決定問題は次式のように定式化される。

$$\begin{aligned} &\max_{t, t_0, x_0} \{u(\phi(t, \boldsymbol{\xi})) + x_0 + \varepsilon t_0\} \\ &\text{subject to} \quad t + t_0 = T \\ &\qquad\qquad\quad\ pt + x_0 = Y \\ &\qquad\qquad\quad\ t \geq 0,\ t_0 \geq 0,\ x_0 \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

これより次式の最適性条件を得る。

$$\frac{\partial u(\phi(t, \boldsymbol{\xi}))}{\partial t} - p = \varepsilon \tag{4}$$

すなわち、活動主体は目的地での滞在から得られる限界効用から限界費用を差し引いた値（以下、実効限界効用と呼ぶ）が、時間の機会費用に等しくなるように滞在時間を決定することになる。滞在時間は式 (4) を t に関して陽的に解くことにより求まる。いま、式 (4) において、$\boldsymbol{\xi}, p, \varepsilon$を外生的なパラメータであると考えれば、滞在時間に関する需要関数はこれらパラメータの関数として求まる。このことは、準線形の効用関数を用いたことの理論的帰結であるが、需要関数の中に計測が困難な所得、利用可能時間が変数として含まれないため、モデルの推計が著しく容易になるという利点がある。そこで、滞在時間の需要関数の一般形を

$$t^* = D(\boldsymbol{\xi}, p, \varepsilon) \tag{5}$$

と表現しよう。一方、合成財、その他の活動で消費する時間はそれぞれ、$t_0 = T - t^*, x_0 = Y - pt^*$ で表現される。したがって、目的地に滞在する $(t > 0)$ 場合の間接効用関数は

$$\begin{aligned} V^0(\boldsymbol{\xi}, Y, T, p, \varepsilon) \;&=\; u(\phi(D(\boldsymbol{\xi}, p, \varepsilon), \boldsymbol{\xi})) + Y \\ &\quad - (\varepsilon + p) D(\boldsymbol{\xi}, p, \varepsilon) + \varepsilon T \end{aligned} \tag{6}$$

と表現される。一方、$t = 0$ の場合には、仮定 3) より間接効用値は次式で示される。

$$V^1(\boldsymbol{\xi}, Y, T, p, \varepsilon) = Y + \varepsilon T \tag{7}$$

εを単位時間当たりの賃金率と考えれば、間接効用関数は一般化所得 $Y + \varepsilon T$に一致する。以上の議論では、時間の機会費用εを外生変数として基本モデルを定式化した。しかし、εは分析者が観測できない変数であり、個人によっても多様に異なった値をとる確率変数である。いま、εがある確率分布に従うと考えれば、基本モデルから導出される滞在時間もある確率分布に従うことになる。4. では、以上の議論を拡張して滞在時間モデルを定式化する。

4. 滞在時間モデルの定式化

議論の見通しをよくするために、ここでは限界滞在費用がゼロ ($p = 0$) の場合をとりあげる。ある個人が目的地に滞在する時間は限界条件 (4) により決定される。時間の機会費用εは当該の個人にとっては既知であるが、観測者には観測できないと考えよう。そこで、時間価値εが区間 $(0, M)$ 上で定義されるある確率分布に従って分布する考え、限界条件を用いて滞在時間の確率分布を導出しよう。ここに、Mは十分大きな正数、もしくは無限大をとる。

いま、目的地に到着した時点を$\tau = 0$ と表し、初期時点より時間 t が経過した時点$\tau = t$ における限界

効用 $v(t)$ を定義する。

$$v(t) = \left.\frac{\partial u(\phi(\tau, \boldsymbol{\xi}))}{\partial \tau}\right|_{\tau=t} \tag{8}$$

時点 $t(>0)$ において、個人の限界効用 $v(t)$ が時間の機会費用εより大きい限り、この個人は目的地に滞在している。つぎに、滞在時間に関する限界効用の上限値を定義する。滞在時間の限界効用は滞在時間とともに減少するため、限界効用の最大値$\bar{\mu}$は

$$\bar{\mu} = \left.\frac{\partial u(\phi(\tau, \boldsymbol{\xi}))}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} \tag{9}$$

で定義される。限界効用の最大値が有限の値を持つか、あるいは無限大に発散するかは効用関数の形式に依存している。一方、限界効用に上限値が存在する場合、$\varepsilon, \bar{\mu}$の間に以下の関係が生じる。$0 < \varepsilon \leq \bar{\mu}$ の場合、時間価値が滞在における限界効用の上限値より小さく、任意の$\varepsilon \in (0, \bar{\mu}]$ に対して限界条件 $v(t^*) = \varepsilon$を満足するような滞在時間 t^*が存在する。すなわち、限界効用関数 (4) より、滞在時間は次式で表される。

$$t^* = v^{-1}(\varepsilon) \tag{10}$$

一方、$\bar{\mu} < \varepsilon$の場合には時間価値εが滞在時間の限界効用より常に大きくなり、滞在時間は$t^* = 0$ となる。すなわち、この個人は目的地に滞在しない。

確率変数εが確率密度関数 $r(\varepsilon)$ に従い分布していると仮定しよう。個人が目的地に滞在する確率 P_sは

$$P_s = 1 - Prob\{t = 0\} = \int_0^{\bar{\mu}} r(\varepsilon) d\varepsilon \tag{11}$$

と表される。ここで、目的地に滞在している個人の時間価値εの条件付き確率分布を密度関数

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{P_s} r(\varepsilon) \tag{12}$$

で定義する。時間価値に関する条件付き密度関数 $f(\varepsilon)$ の定義域は $(0, \bar{\mu}]$ である。ある客が、目的地に時点 t まで滞在し、かつその時点で限界効用が時間の機会費用より大きくなる条件付き確率 $S(t)$ は次式で定義される。

$$\begin{aligned} S(t) &= Prob\{v(t) \geq \varepsilon\} \\ &= F(v(t)) = \int_0^{v(t)} f(\varepsilon) d\varepsilon \end{aligned} \tag{13}$$

効用関数が滞在時間に関して限界効用逓減の条件 (2) を満足している場合、これは個人の滞在時間τが t より大きい確率、すなわち生存確率に他ならない。

ここで、生存関数 $S(t)$ が t に関して単調減少であることに留意しよう。いま、時間軸上の微少期間 $[t, t + \Delta t]$ を考える。この期間中に滞在を終了する確率 $g(t)\Delta t$ は、

$$g(t)\Delta t = S(t) - S(t + \Delta t) \tag{14}$$

により表される。上式の両辺をΔt で除し、$\Delta t \to 0$ の極限をとれば、滞在時間 t で滞在を終了する確率密度を得ることができる。

$$g(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{t - (t + \Delta t)} \tag{15}$$

時刻 t までに滞在が終了する確率を表す確率関数 $G(t) = Prob\{\tau \leq t\}$ は次式で表現される。

$$G(t) = \int_0^t g(\tau) \mathrm{d}\tau \tag{16}$$

以下、確率分布関数 $G(t)$ を滞在時間終了分布関数と呼ぶ。この時、定義より滞在時間終了分布関数と生存関数の間には次式が成立する。

$$G(t) = Prob\{v(t) \leq \varepsilon\} = 1 - S(t) \tag{17}$$

ハザード関数は定義より次式のように表現できる。

$$h(t) = g(t)/S(t) \tag{18}$$

期間モデルを、例えば、駐車場等の設計に用いる場合、ある時刻 t までにサービスが終了する確率を用いることになる。

5. 滞在時間分布の導出

(1) 効用関数の特定化

効用関数 (1) を具体的に特定化し滞在時間分布を導出する。ここでは、以下の議論の見通しをよくするために、限界滞在費用がゼロ ($p = 0$) の場合を考える。部分効用関数として滞在時間の限界効用が滞在時間とともに低減していくという性質を有する以下のような絶対的危険回避度一定[6)]の効用関数を考えよう。

$$u_a(z) = \frac{\mu}{\alpha}\{1 - \exp(-\alpha \cdot z)\} \tag{19}$$

ここに、αは絶対的危険回避度を表しており、効用関数の凹性を保証するために、$\alpha > 0$ を仮定する。

いま、時間価値εの確率分布を規格化するために、一般性を損なうことなく$\mu = 1$ を仮定しよう。つぎに、準線形家計生産関数を導入する。

$$z = \phi(t, \boldsymbol{\xi}) = \psi(\boldsymbol{\xi}) t \tag{20}$$

ここに、$\psi(\boldsymbol{\xi})$ は目的地の魅力を表す関数である。この時、部分効用関数 (19) は以下の条件を満足する。

$$u_a(\phi(t, \boldsymbol{\xi})) = \begin{cases} 0 & \text{when} \quad t = 0 \\ \frac{1}{\alpha} & \text{when} \quad t \to \infty \end{cases} \tag{21}$$

また、$p = 0$ を仮定した時の限界効用関数は

$$v_a(t) = \psi(\boldsymbol{\xi}) \exp\{-\alpha \psi(\boldsymbol{\xi}) t\} \tag{22}$$

となる。$\alpha > 0$ に留意すれば、限界効用関数は以下の性質を持つ。

$$v_a(t) = \begin{cases} \psi(\boldsymbol{\xi}) & \text{when} \quad t = 0 \\ 0 & \text{when} \quad t \to \infty \end{cases} \tag{23}$$

すなわち、限界効用関数の値がとり得る範囲は、$(0, \psi(\boldsymbol{\xi})]$ となる。時間価値が $\psi(\boldsymbol{\xi})$ より大きくなれば $t = 0$ となる。すなわち、滞在をとりやめる個人が存在する。

(2) 絶対危険回避選好と滞在時間分布の導出

時間価値 ε が確率密度関数 $r(\varepsilon)$ に従って分布していると仮定する。また、滞在している客の時間価値に関する条件付き確率密度関数を $f(\varepsilon)$ で表す。ここで、変数変換 $v_a(t) = \varepsilon$ を用いて時刻 t に滞在が終了する条件付き確率密度関数を導出しよう。限界効用関数 (22) を用いて $dv_a(t)/dt$ を評価すれば

$$\frac{dv_a(t)}{dt} = -\alpha\{\psi(\boldsymbol{\xi})\}^2 \exp\{-\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})t\} \tag{24}$$

を得る。したがって、確率密度関数は

$$g(t) = \alpha f(v(t))\{\psi(\boldsymbol{\xi})\}^2 \exp\{-\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})t\} \tag{25}$$

となる。以下、時間価値 ε が区間 $(0, M]$ $(\infty > M \geq \psi(\boldsymbol{\xi}))$ において一様分布に従って分布している場合をとりあげ、滞在時間分布を具体的に導出する。

一様分布の密度関数は $r(\varepsilon) = \frac{1}{M}$ と表される。個人が目的地を訪問する確率（滞在確率）は

$$P_s = Prob\{0 < \varepsilon \leq \psi(\boldsymbol{\xi})\} = \frac{\psi(\boldsymbol{\xi})}{M}$$

で表される。式 (25) より滞在時間の条件付き確率密度関数を求めれば

$$g(t) = \alpha\psi(\boldsymbol{\xi})\exp\{-\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})t\} \tag{26}$$

となる。したがって、条件付き滞在時間終了分布は

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_0^t \alpha\psi(\boldsymbol{\xi})\exp\{-\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})\tau\}d\tau \\ &= 1 - \exp\{-\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})t\} \end{aligned} \tag{27}$$

と表せる。また、生存関数 $S(t)$ は定義より

$$S(t) = \exp\{-\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})t\} \tag{28}$$

となり、ハザード関数は

$$h(t|\boldsymbol{\xi}) = \alpha\psi(\boldsymbol{\xi}) \tag{29}$$

と表せる。すなわち、時間価値が一様分布に従う場合、滞在時間終了分布は平均 $\{\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})\}^{-1}$ の指数分布に従うことになる。

以上のほか、相対危険回避度一定の効用関数を用いる場合、時間価値分布が指数分布の場合、限界滞在費用が存在する場合などについて同様の導出を行っているが、紙面の都合上割愛する。

6. おわりに

本研究では個人の効用最大化行動に基づいた滞在時間分布モデルを提案した。その際、個人の滞在時間決定行動をランダム限界効用モデルを用いて表現するとともに、個人間での時間価値の確率分布から滞在時間の確率分布モデルを導出した。それにより、これまで提案されてきた期間モデルのいくつかが、比較的単純な効用関数の形式や時間価値の確率分布の下で導出されることがわかった。

Lancaster[7], Hensher[1]等は、指数族の確率密度関数に変数変換を施すことにより滞在時間分布モデルの相互の間の形式的な関係を導きだしている。しかし、本研究で提案した効用最大化モデルの枠組みの下では、滞在時間モデルが行動仮説と整合性を有するためにモデルのパラメータ値やモデルの適用範囲に大きな制約が存在する。確率分布関数の単純な変数変換により新たな滞在時間分布モデルを導出した場合、効用最大化仮説と整合性を保ち得ない危険性が生じることが判明した。当然のことながら、以上の結論は、本研究で採用した効用最大化モデルの枠組みの下でのみ有効であることは言うまでもない。今後、本研究とは異なる効用関数や時間価値分布を用いることにより行動仮説と整合がとりうる滞在時間モデルについてより広範囲に検討していくことが必要である。

参考文献

1) Hensher, D. A. and Mannering, F.: Hazard-based duration models and their application to transport analysis, *Transport Review*, 14: 63-82, 1994.
2) Becker, G. S.: A theory of the allocation of time, *Economic Journal*, Vol. 75, pp. 493-517, 1965.
3) Kitamura, R.: A Model of Daily Time Allocation to Discretionary Out-of-Home Activities and Trips, *Transportation Research*, Vol.18B, No.3, pp.255-266, 1984.
4) Pudney, S.: *Modelling Individual Choice, The Econometrics of Cornes, Kinks, and Holes*, Basil Blackwell, Oxford, 1989.
5) Samuelson, P. A.: Constancy of the marginal utility of income, In: Lange, O., McIntyre, F. and Yntema, T. O., (eds.), *Studies in Mathematical Economics and Econometrics in Memory of Henry Schultz*, Chicago: University of Chicago Press, 1942.
6) 多々納裕一, 小林潔司, 喜多秀行：危険回避選好を考慮した２段階離散選択モデルに関する研究, 土木計画学研究・論文集, No.13,（登載決定）, 1996.
7) Lancaster, T.: *The Economic Analysis of Transition Data*, Cambridge: Cambridge University Press, 1990.