

複素数空間で経路の幾何学要因を考慮した確率的交通配分*

The Treatment of Cycle Flows in the Markov Chain Traffic Assignment

赤松 隆**・牧野幸雄***

By Takashi AKAMATSU and Yukio MAKINO

1. はじめに

確率的交通配分モデルにおいて配分対象とする経路の集合をどのように設定すべきかは、いまだ良い方法が確立していない問題である。従来、この配分対象経路として、a)全ての simple paths (同一リンクを二度以上通過しない経路)、b)適当な基準によって限定された経路、c)cycle をも含む全経路 ([1,2,5,9]) ;等の定義に対してモデルおよび計算法が提案されている。

a)は最も自然で単純である。しかし、この基準を完全に満たすためには、経路を列挙する必要がある、現実的な交通網では計算量・記憶容量の両面から実行不可能である。b)は、例えば、Dial(1971)や Laurent (1996)のように大規模交通網でも配分計算が効率的に行えるものの、現実には多くの交通が流れている経路に全く交通量が配分されないという問題が生じる。c)は、b)の問題点を解消しているが、cycle も含むという定義は、利用者の行動理論の観点からは不自然である。

このように、従来のいずれの経路集合の定義(とその配分計算法)も、利用者行動論上の自然さと計算の実行可能性・効率性という両面からの要請を同時に満たすものではない。そこで、本研究は、a)を配分対象としつつ大規模ネットワークにも適用可能な LOGIT 型確率的配分の計算法開発を目的とする。これを実現するために、以下の2つの方針を採用する：第一に、赤松(1995, 1996a), Bell(1995)の LOGIT 型マルコフ連鎖配分モデル(MCA:Markov Chain Assignment)と同様の枠組みで計算アルゴリズムを構築する。第二に、MCA で問題となっていた cycle flow を完全に削除するために、“回転角度”の概念を複素数空間を用いてモデルに導入する。この全く新しい技術の採用により、simple paths への配分と効率的計算の両立が可能となる。

2. LOGIT 型のマルコフ連鎖配分

本節では、次節以降の準備として、経路を限定しない LOGIT 型確率的配分と等価な MCA について簡単にまとめておく(詳細は赤松(1995,1996a)を参照)。

2.1 LOGIT モデルとマルコフ連鎖配分

g 個の起点・1 終点と n 個の通過ノードを持つネットワークを考える。佐々木(1965)の MCA モデルでは、車がマルコフ連鎖則に従ってノード間を推移し、以下の構造を持つノード間の推移確率行列 $Q_{[d]}$:

$$Q_{[d]} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & g & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ g \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_1 \\ Q_{2[d]} & 0 & Q_{[d]} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.1)$$

が所与であると仮定する。このとき、起点 o を出発した車がノード i を選択する確率 $P_{1[d]}(i|o)$ は

$$P_{1[d]} = Q_1 [I - Q_{[d]}]^{-1}, \quad (2.2)$$

ここで $P_{1[d]}$ は (o, i) 成分が $P_{1[d]}(i|o)$ の $g \times n$ 行列、で与えられる。また、OD ペア (o, d) の車がリンク (i, j) を選択する確率 p_{ij}^{od} は次式で与えられる：

$$p_{ij}^{od} = P_{1[d]}(i|o) \cdot Q_{[d]}(j|i). \quad (2.3)$$

このモデルは、見かけ上は行動論的な根拠が薄い、その推移確率を

$$Q_{ij} \equiv Q_{[d]}(j|i) = W_{ij} V_{jd} / V_{id} \quad (2.4)$$

で与えれば、経路を限定しない LOGIT 型確率配分と全く等価になる(赤松(1995,1996a)参照)。ここで

$$V_{id} \equiv \sum_{r \in R^{id}} \exp[-\theta C_r^{id}] \quad (2.5a)$$

$$W_{ij} \equiv \exp[-\theta t_{ij}] \quad (2.5b)$$

$C_r^{kd} \equiv \sum_{ij \in L} t_{ij} \delta_{r,ij}^{kd}$: ノード k から終点 d への r 番目経路

のコスト、 t_{ij} : リンク (i, j) のコスト、 θ : LOGIT モデルのコスト感度パラメータ、 R^{id} : ノード i から終点 d への全ての可能な経路 (cycle も含む) の集合である。

* Keywords: 配分交通, 経路選択, Markov 連鎖, サイクル, 複素数

** 正会員 工博 豊橋技術科学大学知識情報工学系

(〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1)

E-mail: akamatsu@tutkie.tut.ac.jp)

*** 学生会員 豊橋技術科学大学知識情報工学専攻

2.2 LOGIT 型マルコフ連鎖配分の計算法

式(2.4)で定義された推移確率を計算するためには、式(2.5)で定義された V_{ij} を要素とする行列 $\mathbf{V}$ の値を評価する必要がある。これは、MCA に類似した以下の行列演算によって計算される (Bell(1995)参照)：

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{W}^2 + \mathbf{W}^3 + \dots = [\mathbf{I} - \mathbf{W}]^{-1} - \mathbf{I} \quad (2.6)$$

ここで $\mathbf{W}$ は式(2.5)の W_{ij} を (ij) 成分とする“抵抗行列”。

さらに、式(2.6)を式(2.4)に代入し、式(2.3)を解析的に計算すると、結局、ODペア別のリンク交通量 x_{ij}^{od} は以下の式で与えられることがわかる。

$$x_{ij}^{od} = q_{od} V_{oi} W_{ij} V_{jd} / V_{od}, \quad (2.7)$$

ここで、 q_{od} は ODペア (o,d) 間の交通量である。

2.3 サイクル・フローとその問題点

上の MCA モデルが解を持つ (i.e. 式(2.6)の左辺が収束する) ための必要十分条件は、行列 $\mathbf{W}$ のスペクトル半径が 1 より小さいことである。しかし、この条件は、実際の交通網において必ずしも満たされない。例えば、コストが 0 の cycle が存在する場合、この条件は満たされず、その cycle を流れる交通量が無限大に発散する。また、このモデルでは、解は存在しても、非現実的に過大な cycle flow が配分される可能性がある。

3. リンク間推移に基づくマルコフ連鎖配分

現実の交通網へ前節の MCA を適用する際に最も問題となる cycle は、隣接する 2 ノード間を往復する cycle である。しかし、この種の cycle に限れば、簡単なネットワーク変換により削除できる。すなわち、もとのネットワークの線グラフ (もとのグラフのリンクをノードとするグラフ) を考え、その線グラフにおいて上記 cycle に対応するリンクを削除しておけばよい。

この様なネットワーク変換に対応してロジット型の MCA を行うためには、推移確率行列を node-node 行列ではなく、link-link 行列に修正する必要がある。そのために、まず、リンク間の“抵抗行列” $\hat{\mathbf{W}} = [\hat{W}_{ab}]$ の (a,b) 要素を $\hat{W}_{ab} = \exp(-\theta t_b)$ と設定する (ここで、 t_b はリンク b のコスト。第 2 節では、リンクを (ij) のように端点ペアで表したが、以降では、リンク連番で識別する)。そして、リンク間の推移確率を

$$Q(b|a) = \hat{W}_{ab} \frac{\hat{V}_{ba}}{\hat{V}_{aa}} \quad (3.2a)$$

$$\hat{V}_{ad} \equiv \sum_{r \in R^{ad}} \exp[-\theta C_r^{ad}] \quad (3.2b)$$

で与えた MCA を考えれば、LOGIT 型の配分モデルと等価となる。ここで、 $\hat{d}$ は終点 d に流入するリンクを表す。また、 $\hat{\mathbf{V}} = [\hat{V}_{ab}]$ は

$$\hat{\mathbf{V}} = [\mathbf{I} - \hat{\mathbf{W}}]^{-1}, \quad (3.3)$$

によって計算される。さらに、ODペア (o,d) を持つリンク a の交通量は次式で与えられる：

$$x_a^{od} = q_{od} \hat{V}_{oa} \hat{V}_{ad} / \hat{V}_{od}. \quad (3.4)$$

4. 回転角度とサイクル

4.1 リンク・経路の回転角度

以降では、前節の方法だけでは対処できない様々な cycle を完全に削除するために、ネットワークの幾何学的情報を利用する。そのために、まず、交通網の各ノードの地理的位置情報を表すユークリッド空間を考える。このとき、各リンクは、2次元実数空間上のベクトルとみなすことができる。そこで、隣接する 2 リンク (a,b) の“回転角度” ω_{ab} を次式で定義する：

$$\omega_{ab} = \text{sgn}(\vec{a}, \vec{b}) \cdot \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right), \quad -\pi \leq \omega_{ab} \leq \pi \quad (4.1)$$

ここで、 $\vec{a}$ はリンク a の地理的位置 (方向と長さ) に対応するベクトル、 $\text{sgn}(\vec{a}, \vec{b})$ はリンク a から b への回転が右折 (時計回り) なら 1、左折なら -1。

さらに、経路の回転角度を以下の様に定義する：

$$E_r^{od} \equiv \sum_{(a,b) \in \Lambda} \omega_{ab} \delta_{r,ab}^{od} \quad (4.2)$$

ここで、 $\delta_{r,ab}^{od}$ ：隣接するリンク a と b が OD ペア (o,d) 間の r 番目経路上にあるなら 1、そうでないなら 0; Λ は互いに隣接するリンクペアの集合。

4.2 経路の回転角度とサイクル

経路の回転角度 E_r^{od} は、その定義から容易にわかるように、以下の特性をもつ：

$$E_r^{ab} + \omega_{ba} = \begin{cases} 0 & r \in R^{ab}(0) \\ 2m\pi \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots) & r \in R^{ab}(1) \\ 0 & r \in R^{ab}(2) \end{cases} \quad (4.3)$$

ここで、 $R^{ab}(i)$, $i=0,1,2$ は、各々、リンク (a,b) 間の経路のうち、以下の属性をもつ経路の集合である： $(i=0)$ cycle を全く含まない、 $(i=1)$ 右回りと左回りの cycle の回数が等しくない、 $(i=2)$ 右回りと左回りの cycle の

回数が（非零で）等しい。つまり、ある経路の回転角度 E_r^{od} は、その経路が cycle を含んでいるか否かを判定するための重要な“detector”となる。

5. サイクルの完全な除去

以下では、simple path のみに対する LOGIT 配分：

$$P_r^{od} = \frac{\exp[-\theta C_r^{od}]}{\sum_{r \in R^{od}(0)} \exp[-\theta C_r^{od}]} = \frac{A_r^{od}}{\sum_{r \in R^{od}(0)} A_r^{od}} \quad (5.1)$$

$$x_a^{od} = q_{od} \sum_{r \in R^{od}(0)} P_r^{od} \delta_{r,a} \quad (5.2)$$

を、角度情報を用いて（経路を列挙せず）効率的に行う方法を示す。そのために、まず、 $\hat{V}_{od} \equiv$ [式(5.1)の分母] の計算法を議論し、最後に、リンク交通量の計算法（式(5.2)）について述べる。

5.1 $R(1)$ のサイクルの除去

いま、経路集合 $R(2)$ は null (i.e. $R=R(0) \cup R(1)$) という場合を仮に考えてみよう。このとき、 $\hat{V}_{od}$ の定義は以下のように書き直すことができる：

$$\hat{V}_{od} = \sum_{r \in R^{od}(0)} A_r^{od} = \sum_{r \in R^{od}} \delta(E_r^{od} + \omega_{do}) \cdot A_r^{od} \quad (5.3)$$

$$\text{where } \delta(z) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } z = 0 \\ 0 & \text{otherwise } (z = 2m\pi, m = \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}$$

ここで、Dirac のデルタ関数の Fourier 級数展開：

$$\delta(z) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[i \frac{2n\pi}{T} z\right] \text{ for } -\frac{T}{2} \leq z \leq \frac{T}{2} \quad (5.4)$$

を思い出すと、 $\hat{V}_{od}$ は（複素）指数関数を全経路集合について足したものと表現できることがわかる。従って、式(5.4)を考慮した適切な抵抗行列を定義すれば、前節までの MCA と同様の方法で $\hat{V}_{od}$ の計算が可能となることが予想される。

上のアイデアを具体化するために、以下の様な (a, b) 成分をもつ“複素抵抗行列”、 $\hat{W}(n, N)$ 、を考えよう。

$$\hat{W}_{ab}(n, N) \equiv \exp[-\theta t_b + i\omega_{ab} \frac{n}{N}] = W_{ab} Y_{ab}(n, N) \quad (5.5)$$

ここで、 $W_{ab} \equiv \exp[-\theta t_b]$ 、 $Y_{ab}(n, N) \equiv \exp[i\omega_{ab} \frac{n}{N}]$ 、 i は虚数単位 ($=\sqrt{-1}$)、 (n, N) は $1 \leq n \leq N$ の整数である。このとき、複素抵抗行列の k 乗の (a, b) 成分は

$$\hat{W}_{ab}(n, N)^k = \sum_{r \in R_{k+1}^{ab}} A_r^{ab} \exp\left[i E_r^{ab} \frac{n}{N}\right], \quad (5.6)$$

で与えられる。ここで、 R_{k+1}^{ab} はリンク a と b の間の $k+1$ -walks 経路の集合。従って、式(4.3)より

$$\begin{aligned} \hat{W}_{ab}(n, N)^k Y_{ba}(n, N) &= \sum_{r \in R_{k+1}^{ab}} A_r^{ab} \exp\left[i (E_r^{ab} + \omega_{ba}) \frac{n}{N}\right] \\ &= \sum_{r \in R_{k+1}^{ab}(0)} A_r^{ab} + \sum_{r \in R_{k+1}^{ab}(2)} A_r^{ab} + \sum_{r \in R_{k+1}^{ab}(1)} A_r^{ab} \exp\left[i (E_r^{ab} + \omega_{ba}) \frac{n}{N}\right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

である。この右辺第3項 ($E_r^{ab} + \omega_{ba} = 2m\pi$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ となる経路の項) を n について足し合わせると

$$\sum_{n=1}^N \sum_{r \in R_{k+1}^{ab}(1)} A_r^{ab} \exp\left[i (E_r^{ab} + \omega_{ba}) \frac{n}{N}\right] = N \sum_{r \in R_{k+1}^{ab}(1:N)} A_r^{ab}, \quad (5.8)$$

ここで $R_k^{ab}(1:N)$ は $E_r^{ab} + \omega_{ba} = (2N\pi) \times \ell$, ($\ell = \pm 1, \pm 2, \dots$) となる様な経路からなる $R_k^{ab}(1)$ の部分集合。従って、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^N \sum_{r \in R_{k+1}^{ab}(1)} A_r^{ab} \exp\left[i (E_r^{ab} + \omega_{ba}) \frac{n}{N}\right] \right) = 0$$

となり、これと式(5.7)より、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^N W_{ab}(n, N)^k Y_{ba}(n, N) \right) = \sum_{r \in R_{k+1}^{ab}(0)} A_r^{ab} + \sum_{r \in R_{k+1}^{ab}(2)} A_r^{ab}. \quad (5.9)$$

すなわち、経路集合 $R^{ab}(0) \cup R^{ab}(2)$ (i.e. $R^{ab}(1)$ が削除された経路集合) についての A_r^{ab} の和は、以下のような行列の (a, b) 成分として与えられる：

$$\begin{aligned} &\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(I + \hat{W}(n, N) + \hat{W}(n, N)^2 + \dots \right) * Y(n, N)^T \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left([I - \hat{W}(n, N)]^{-1} * Y(n, N)^T \right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

ここで、 $X * Y$ は行列 X と Y の要素別の乗算、 $Y(n, N)$ は (a, b) 成分が $Y_{ab}(n, N)$ の行列を表す。

5.2 $R(2)$ のサイクルの除去

以下では、上の方法を $R^{ab}(1)$ の cycle だけではなく $R^{ab}(2)$ の cycle をも削除できるように拡張する。その基本的アイディアは、式(5.10) 2行目の様に逆行列で一括計算するのではなく、1行目の低次項から順に、cycle を消去しながら、計算してゆくことにある。

いま仮に、cycle を含まない k -walks 経路の集合 $\{R_k^{ab}(0) \forall (a, b)\}$ が所与であるとしよう。このとき $\{R_k^{ab}(0) \forall (a, b)\}$ に含まれる経路に1個だけリンクを付加してできる $k+1$ -walks 経路を考え、その様な経路の集合を $\{\tilde{R}_{k+1}^{ab}(0) \forall (a, b)\}$ で表す。この経路集合の経路は、cycle を含んでいても、その個数は高々1つである。故に、 $\{\tilde{R}_{k+1}^{ab}(0) \forall (a, b)\}$ の経路では、以下が成立する：

$$\begin{aligned} E_r^{ab} + \omega_{ba} &= 0 && \text{if the path contains no cycles,} \\ E_r^{ab} + \omega_{ba} &= \pm 2\pi && \text{otherwise.} \end{aligned} \quad (5.11)$$

従って、もし、式(5.6)における和が R_{k+1}^{ab} ではなく

$\hat{R}_{k+1}^{ab}(0)$ であるなら、式(5.9)は、経路集合 $R_{k+1}^{ab}(0)$ のみに関する和となる(i.e. $R_{k+1}^{ab}(2)$ および $R_{k+1}^{ab}(1)$ に関する項が消える)ことがわかる。さらに、式(5.10)より $\hat{R}_{k+1}^{ab}(0)$ に対しては、 $|E_r^{ab} + \omega_{ba}| \leq 2\pi$ であるので、cycle を含む経路の項を消去するためには、式(5.9)、(5.10)において $N \rightarrow \infty$ とする必要はなく、 $N=2$ と設定すれば十分である。

この考え方をより具体的に述べるため、以下の様な (a,b) 成分を持つ行列 $\hat{W}(n,N)^{[k-1]}$ を定義しよう。

$$\hat{W}_{ab}(n,N)^{[k-1]} = \sum_{r \in R_{k+1}^{ab}(0)} A_r^{ab} \exp[iE_r^{ab} \frac{n}{N}] \quad (5.12)$$

上の議論により、経路集合 $R_{k+1}^{ab}(0)$ に関する A_r^{ab} の和は、以下の行列の (a,b) 成分として与えられる：

$$\hat{W}^{[k]} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 (\hat{W}(n,2)^{[k-1]} \hat{W}(n,2) * Y(n,2)^T). \quad (5.13)$$

そして、 $\hat{V}_{ab}$ は経路集合 $R^{ab}(0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k^{ab}(0) = \bigcup_{k=1}^{\ell} R_k^{ab}(0)$

(ℓ は全リンク数) に関する A_r^{ab} の和であるから、

$$\hat{V} = I + \hat{W}^{[1]} + \hat{W}^{[2]} + \dots + \hat{W}^{[\ell-1]} = \sum_{k=0}^{\ell-1} \hat{W}^{[k]}, \quad (5.14)$$

の (a,b) 成分として得られる。なお、この計算を実行するためには、 $\hat{W}^{[k]}$ を式(5.13)によって計算する際に、 $\hat{W}(n,N)^{[k-1]}$ が与えられている必要がある。この問題は、 k の昇順に $k=1$ から順に逐次的な計算を行うことで解決できる(詳細は Akamatsu(1996c) 参照)。

5.3 リンク・フローの計算法

第3節の MCA モデルでは、リンク交通量は、式(3.4)で与えられた。しかし、simple path のみに配分するモデルでは、この式は正しい値を与えることができない。なぜなら、 $\hat{V}_{oa} \hat{V}_{ad}$ は、OD ペア o, d 間のリンク a を通過する全ての経路についての A_r^{od} の和を与えているが、その経路には cycle が含まれているからである。しかし、 o から a への経路および a から d への経路のいずれもが cycle を含まない場合を考えると、それらを結合した経路に含まれる cycle は高々1個である。この事実を用いると、前の5.2と同様の考え方によりその cycle を消去することができる。具体的には、以下の式によりリンク交通量を得ることができる(詳細については Akamatsu(1996c)を参照)：

$$x_a^{od} = \frac{1}{2} q_{od} \sum_{n=1}^2 \tilde{V}_{oa}(n,2) \tilde{V}_{ad}(n,2) / \hat{V}_{od} \quad (5.15)$$

ここで、 $\tilde{V}_{ab}(n,2) \equiv \sum_{k=1}^{\ell} \hat{W}_{ab}(n,2)^{[k]} Y_{ba}(n,2)$ 。 (5.16)

6. おわりに

本稿では、経路を限定しない simple path を配分対象とする確率的配分を効率的に行う方法を示した。そのために“回転角度”の概念をモデルに導入し、複素抵抗行列を用いて全ての cycle を削除する方法を開発した。

この技術は、確率的配分問題のみならず各種グラフ問題への応用が可能と考えられる。また、この技術のような観点を一般的なグラフ理論に導入することは、以下に述べる理由により、極めて自然であり、新たな研究展開の余地が大きいと考えられる。

よく知られているように、標準的なグラフ理論の内容は、線形代数とパラレルな関係にある。例えば、“path problem”と呼ばれる多くのグラフ論の問題は、線形連立方程式と全く同一の代数構造を持っている(例えば、Carre(1979)、竹中(1989)等を参照)。ところで、線形写像の最も基本的な特徴のひとつは“回転と拡大/縮小”である。言うまでもなく、この特徴は、実数空間ではなく複素数空間で解析されるのが自然である。一方、従来のグラフ理論では $(0,1)$ 要素の incidence/adjacency 行列や実数要素の距離行列を用いた実数空間での解析に終始してきた。しかし、線形代数との対応関係を思い出せば、グラフの解析に“回転”の要素を導入し、複素数空間で考えることはごく自然である。従って、従来のグラフ理論をこの方向へ拡張することによって、意味のある様々な成果が得られることが期待される。

参考文献

- [1] 赤松隆・牧野幸雄，“経路を限定しない確率的均衡配分”，土木計画学研究・講演集 No.18, pp.717-720, 1995.
- [2] T.Akamatsu, “Cyclic Flows, Markov Process and Transportation Stochastic Assignment”, to appear in *Transportation Research Part B*, 1996a.
- [3] T.Akamatsu, “Decomposition of Path Choice Entropy in General Transport Networks”, to appear in *Transportation Science*, 1996b.
- [4] T.Akamatsu, “Stochastic Traffic Assignment with Geometric Attributes of Paths”, submitted to *Transportation Science*, 1996c.
- [5] M.G.H.Bell, “Alternatives to Dial's LOGIT Assignment Algorithm”, *Transportation Research* 29B, pp.287-295, 1995.
- [6] B.Carre, *Graphs and Networks*, Oxford University Press, 1979.
- [7] R.B.Dial, “A Probabilistic Multipath Traffic Assignment Algorithm Which Obviates Path Enumeration”, *Transp. Res.* 5, pp.83-111, 1971.
- [8] F.M.Leurent, “Contribution to Logit Assignment Model”, *Transportation Research Record* 1493, pp.207-212, 1996.
- [9] 佐々木綱，“吸収マルコフ過程による交通量配分理論”，土木学会論文集 No.121, pp.28-32, 1965.
- [10] 竹中淑子，線形代数的グラフ理論，培風館，1989.