【土木計画学研究・講演集 No.19(1) 1996年11月】

# 動的な利用者均衡配分の効率的解法*

Some Efficient Algorithms for Dynamic User Equilibrium Assignment
with Many-to-One OD Pattern

赤松 隆**・高松 望***
*by Takashi AKAMATSU and Masaki HANDA*

## 1. はじめに

動的な利用者均衡(DUE: Dynamic User Equilibrium)配分は，最近の活発な研究の展開にもかかわらず，収束の保証された効率的な計算法が未だに確立していない．従来，様々なアルゴリズムが提案されているが，いずれも数学的な背景のない *ad hoc* なものか，あるいは，“経路旅行時間関数”の強単調性（我々の解析によれば，これは必ずしも成立しない）を根拠無しに仮定したものとなっている．このような状況に陥っている原因の一つは，従来の研究が経路変数による定式化をベースとしている点にあると考えられる（なお，[8]の定式化は“リンク変数に基づいた定式化”と主張されているが，“propagation 条件”の記述において経路変数が用いられており，実質的には経路変数ベースの定式化である）．実際，その定式化で必要となる“経路旅行時間関数”は，特性の数理解析が困難である上に，アルゴリズム開発上も，経路の列挙を必要とする等の様々な問題を引き起こす．

このような従来の研究の問題点に鑑み，本研究は *arc-node* 形式の定式化に基づいて DUE 配分のアルゴリズムを開発する．より具体的には，多起点・1終点ＯＤ構造の DUE 配分問題に対して，それと等価な *arc-node* 変数ベースの等価な変分不等式／相補性問題を導出し，それらを活用することによって，大規模ネットワークでも適用可能な計算法を構築する．

本論文の構成は以下の通りである．第２節では，まず，DUE 配分の基本的な定式化を示した後，それが相補性問題／変分不等式として表現できることを示す．続く第３・４節では,各々，異なる考え方に基づいた２種類の解法を議論する．まず，第３節では，変分不等式問題に対する部分線形化の考え方に基づいた解法を示す．そして，第４節では，相補性問題に対する修正 Newton 法（[5]）を DUE 配分問題に適用するための方法を議論する．

## 2. 動的な利用者均衡配分

### 2.1 ネットワーク・OD需要・時間系

N 個の要素を持つノード集合 $N$ および L 個の要素を持つ有向リンク集合 $L$ からなるネットワーク $G(N,L)$ を考える．各ノードは整数の連番で区別され，ノード $i$ から $j$ へのリンクは$(i,j)$と表される．また，ノード$k$へ流入するリンクの上流側ノードの集合を$I_k$, ノード $k$ から流出するリンクの下流側ノードの集合を $O_k$ と書く．本稿では，多起点・１終点のネットワークを考える．起点が $o$ で終点 $d$ へ時刻 $u$ までに到着する累積交通量 $Q^u_{od}$ は所与であるとし，(到着時刻についての)その流率を $q_{od} \equiv dQ^u_{od} / du$ と書く．

唯一の終点 $d$ への到着時刻 $u$ は，適当な単位で測った区間[0,T]の実数である．ただし，以下では，数学的展開の煩雑さを避けるため，時間は離散系で近似されている（i.e. 到着時刻を自然数で識別）とし，その離散的な到着時刻の集合を $U$ と書く．

### 2.2 到着時刻別に分解された定式化

動的な交通ネットワーク流を記述するための基本的な変数は，時刻 $t$ までにリンク$(i,j)$へ流入する車の累積台数 $A_{ij}(t)$，累積流出台数 $D_{ij}(t)$, 存在台数 $X_{ij}(t)$（あるいはそれらの微分変数）である．しかし，DUE 配分問題は，終点への到着時刻別に分解できるため（[1,2,3]参照），その分解に適した変数を用いることによって，より単純化された表現が可能となる．その分解された定式化では，到着時刻 $u$ ごとに以下のように定義された２種類の変数 $(y^u_{ij}, \tau^u_i)$ が中心的な役割をはたす．まず，均衡状態において終点に時刻 $u$ に到着する車がノード $i$ に最も早く到着する時刻を $\hat{\tau}^u_i$，ノード $i$ から終点までの所要時間を $\tau^u_i \equiv u - \hat{\tau}^u_i$ と書く．このとき，終点到着時刻が $u$ の車のリンク$(i,j)$

---

* Keywords:利用者均衡, 動的交通量配分, 交通流, 変分不等式
** 正会員 工博 豊橋技術科学大学 知識情報工学系
(〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1
E-mail:akamatsu@tutkie.tut.ac.jp)
*** 学生会員 豊橋技術科学大学 知識情報工学専攻

への（$u$ についての）流入率は，$y_{ij}^u \equiv dA_{ij}(\hat{\tau}_i^u)/du$ と定義される．

以下に，終点到着時刻別に分解された定式化を簡単にまとめておく（詳細は,[1,2,3]を参照）：

**1)** リンク旅行時間関数

時刻 $t$ にリンク$(i,j)$に流入する車がそのリンクを通過するのに要する時間（リンク旅行時間）を $c_{ij}(t)$ と書く．本稿では，リンク旅行時間を Vertical-Que model による待ち時間と自由走行時間の和で表す．このとき，終点到着時刻 $u$ の車のリンク旅行時間 $c_{ij}^u \equiv c_{ij}(\hat{\tau}_i^u)$ は，均衡状態では，以下の表現に帰着する：

$$c_{ij}^u = \max.[c_{ij}^{u-1} + \{X_{ij}(\hat{\tau}_i^u) - X_{ij}(\hat{\tau}_i^{u-1})\}/\mu_{ij}^*, m_{ij}]$$
$$= \max.[c_{ij}^{u-1} + y_{ij}^u \cdot du/\overline{\mu}_{ij} - (\hat{\tau}_i^u - \hat{\tau}_i^{u-1}),\ m_{ij}] \quad (2.1a)$$

ここで，$m_{ij}$ と $\overline{\mu}_{ij}$ は，各々，リンク$(i,j)$の自由走行時間，最大流出率（ともに所与の定数），$du$ は離散近似された時刻 $u$ と $u$-1 の微小な時間間隔である．終点が唯一の場合の DUE 配分は終点到着時刻 $u$ ごとに分解し，$u$ の昇順に逐次計算することができるので，時刻 $u$ の均衡フローを計算する際には，時刻 $u$-1 に関する変数は全て所与となる．従って，終点到着時刻 $u$ の車の旅行時間は，以下のような（$y_{ij}^u, \tau_i^u$）の関数として表される：

$$c_{ij}^u = \max.[\alpha_{ij} y_{ij}^u + \beta_{ij} + \tau_i^u,\ m_{ij}] \quad (2.1b)$$

ここで，$\alpha_{ij} \equiv du/\overline{\mu}_{ij}$，$\beta_{ij} \equiv c_{ij}^{u-1} - \tau_i^{u-1}$.

**2)** 最短経路選択原則

DUE 状態では，利用者は(事後的にみても)所要時間が最短となる経路のみを選択する．これは，*arc-node* 変数を用いると以下のように表される：

$$\begin{cases} y_{ij}^u \cdot \{c_{ij}^u + \tau_j^u - \tau_i^u\} = 0 \\ c_{ij}^u + \tau_j^u - \tau_i^u \geq 0 \quad \forall k \in N, \forall u \in U \\ y_{ij}^u \geq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

**3)** フロー保存条件

動的な交通ネットワーク流では，任意の時刻において，各ノードにおける inflow と outflow が等しくなければならない．また，各リンクでは，First-In-First-Out 条件が成立する場合，$A_{ij}= D_{ij}(t+c_{ij}(t))$ が成立しなければならない．これらの条件は，DUE 状態の持つ特性を利用すると，以下のような $y^u$ のみを利用した表現に帰着する：

$$\sum_{j \in O_k} y_{kj}^u - \sum_{i \in I_k} y_{ik}^u - q_{kd}^u = 0 \quad \forall k \in N, \forall u \in U \quad (2.3)$$

### 2.3 相補性問題／変分不等式による表現

[2,3]で証明されているように，終点到着時刻 $u$ に対応する DUE 配分は，以下の様な非線型相補性問題 *NCP*(**F**)／変分不等式問題 *VIP*($K_1$,**F**)と等価である：

a) *NCP*(**F**): *Find* $\mathbf{x}^*$ *in* $K_1 = R_+^{\mathrm{L}} \times R_+^{\mathrm{N}}$ *such that*

$$\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0,\ \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0},\ \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0} \quad (2.4)$$

b) *VIP*($K_S$,**F**): *Find* $\mathbf{x}^*$ *in* $K_1$ *such that*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in K_1 \quad (2.5)$$

ここで，$\mathbf{x} \equiv [\mathbf{y}, \boldsymbol{\tau}]^T$，$\mathbf{y} = (\ldots, y_{ij}^u, \ldots)^T$，$\boldsymbol{\tau} = (\ldots, \tau_k^u, \ldots)^T$，

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{c}(\mathbf{y},\boldsymbol{\tau}) \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$\mathbf{c} = (\ldots, c_{ij}^u(y_{ij}^u, \tau_i^u), \ldots)^T$，$\mathbf{q} = (\ldots, q_{kd}^u, \ldots)^T$，

**A** は *node-link* 接続行列である．

また，リンク旅行時間関数式(2.1b)が相補性条件：

$$\begin{cases} (c_{ij}^u - m_{ij}) \cdot \{c_{ij}^u - (\alpha_{ij} y_{ij}^u + \beta_{ij} - \tau_i^u)\} = 0 \\ c_{ij}^u - (\alpha_{ij} y_{ij}^u + \beta_{ij} - \tau_i^u) \geq 0 \\ c_{ij}^u \geq m_{ij} \end{cases} \quad (2.7)$$

として表されることに着目すると，DUE 配分は，以下の様な線形相補性問題 *LCP*($\mathbf{F}_{\mathrm{L}}$)／変分不等式問題 *VIP*($K_2$,$\mathbf{F}_{\mathrm{L}}$)としても表現できる：

c) *LCP*($\mathbf{F}_{\mathrm{L}}$): *Find* $\mathbf{x}^*$ *in* $K_2 = R_+^{\mathrm{L}} \times R_+^{\mathrm{L}} \times R_+^{\mathrm{N}}$ *such that*

$$\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{L}}(\mathbf{x}^*) = 0,\ \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0},\ \mathbf{F}_{\mathrm{L}}(\mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0} \quad (2.8)$$

d) *VIP*($K_2$,$\mathbf{F}_{\mathrm{L}}$): *Find* $\mathbf{x}^*$ *in* $K_2$ *such that*

$$\mathbf{F}_{\mathrm{L}}(\mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in K_1 \quad (2.9)$$

ここで，$\mathbf{x} \equiv [\hat{\mathbf{c}}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\tau}]^T$，$\hat{\mathbf{c}} = (\ldots, c_{ij}^u - m_{ij}, \ldots)^T$，

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{m} + \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{m} \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{I} & -\alpha & \mathrm{A}_+^T \\ \mathrm{I} & 0 & -\mathrm{A}^T \\ 0 & \mathrm{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}} \\ \mathbf{y} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

$\mathbf{m} = (\ldots, m_{ij}, \ldots)^T$，$\boldsymbol{\beta} = (\ldots, \beta_{ij}, \ldots)^T$，$\alpha = diag[\alpha_{ij}]$，

$\mathbf{A}_+$=**A** の-1 要素を 0 とした行列, I=単位行列,

つまり，a),b)では関数であったリンク旅行時間 **c** は，c),d)では変数として扱われ，その代わりに，a),b)の非線型写像 F が affine 写像 $\mathrm{F}_{\mathrm{L}}$ になる．

## 3. アルゴリズムーその1

### 3.1 変分不等式問題に対する部分線形化法

Patricksson(1993)は，凸計画問題に対するアルゴリズム開発のための包括的な枠組みとして，部分線形

化法を提案している．VIP は，凸計画問題の一般化とみなすことができるから，その部分線形化法の考え方は，VIP へ拡張することができる．なお，VIP には凸計画問題のような目的関数がないが，最近の研究で明らかにされた VIP の各種 merit 関数を用いれば，step size の調整を行うことができる．これは，アルゴリズムの大域的収束性を強化する効果を持つ．具体的な VIP($K$,**F**)の merit 関数としては，例えば，Fukushima (1992)による射影を利用した関数：

$$f(\mathbf{X}) = -\mathrm{F}(\mathbf{X})\cdot(\mathbf{Z}-\mathbf{X})-(1/2)(\mathbf{Z}-\mathbf{X})\cdot\alpha(\mathbf{Z}-\mathbf{X}) \quad (3.1\mathrm{a})$$

$$\mathbf{Z} \equiv [\mathbf{X}-\alpha^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{X})]_+ \quad (3.1\mathrm{b})$$

等を用いれば良い．以下に，*VIP*($K$,**F**)に対する部分線形化アルゴリズムをまとめておく：

***Step 0. (Initial Guess)***

初期解 $\mathbf{X}^{(0)}\in K$ を設定，$n := 0$.

***Step 1. (Search Direction Generation)***

補助問題 PL-VIP：*Find* $\mathbf{Z}^*\in K$ *such that*

$$[\mathbf{g}(\mathbf{Z}^*,\mathbf{X}^{(n)})+\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(n)})-\mathbf{g}(\mathbf{X}^{(n)},\mathbf{X}^{(n)})]\cdot(\mathbf{Z}-\mathbf{Z}^*)\geqq 0 \quad \forall \mathbf{Z}\in K$$

の解 $\mathbf{Z}^*\in K$ を求め，方向 vector 決定：$\mathbf{d} := \mathbf{Z}^* - \mathbf{X}^{(n)}$

***Step 2. (Line Search)***

VIP の merit 関数 $L$ を用いて step size $\alpha$ 決定：

$$\min.\{L(\mathbf{X}^{(n)}+\alpha\,\mathbf{d}) \mid \mathbf{X}^{(n)}+\alpha\,\mathbf{d}\in K,\ \alpha\geqq 0\}$$

***Step 3. (Update)***

$$\mathbf{X}^{(n+1)} := \mathbf{X}^{(n)}+\alpha\,\mathbf{d},\quad n := n+1.$$

***Step 4. (Convergence Check)***

*収束→終了，収束していない→Step 1 へ.*

ここで，$\mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) : K\times K\to R^N$ は **Y** に関して連続で，**X** に関して連続・単調な関数（**F(X)**を部分線形近似した適当な関数）．

### 3.2 DUE 問題への応用

上で述べた部分線形化法を DUE 配分問題に適用するためには，補助問題における **F(x)**の近似関数 **g(X,Y)** を具体的に設定する必要がある．その基本的な考え方としては，**F(x)**の非線型性を可能な限り残しつつ，補助問題 PL-VIP が効率的に解けるような近似関数を作ればよい．そこで，**g(X,Y)** を

$$\mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{X}^{(n)})+\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(n)})-\mathbf{g}(\mathbf{X}^{(n)},\mathbf{X}^{(n)}) = \mathbf{G}^{(n)}(\mathbf{X},\tau^{(n)}) \quad (3.2\mathrm{a})$$

$$\mathbf{G}^{(n)} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \tau \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \mathbf{c}(\mathbf{y},\tau^{(n)}) \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (3.2\mathrm{b})$$

となるように設定しよう．すると，PL-VIP は

*Find* $\mathbf{Z}^*\in K_1$ *such that*

$$\mathbf{G}^{(n)}(\mathbf{Z}^*,\tau^{(n)})\cdot(\mathbf{Z}-\mathbf{Z}^*)\geqq 0 \quad \forall\mathbf{Z}\in K_1 \quad (3.3)$$

となる．この問題は,$\mathbf{G}^{(n)}(\mathbf{Z}^*,\tau^{(n)})$の Jacobian が by-symmetric になっていることに注意すると，以下の最適化問題：

$$\min_{(\mathbf{y})}.\sum_{ij}\int_0^{y_{ij}} c_{ij}^u(\omega,\tau_i^{(n)})d\omega \quad (3.4)$$

$$\textit{subject to}\quad \mathbf{A}\,\mathbf{y}=\mathbf{q},\quad \mathbf{y}\geqq\mathbf{0}$$

と等価であることがわかる．これは，静的な利用者均衡配分の等価最適化問題と全く同一構造の問題であるから，Frank-Wolfe 法を始めとする各種アルゴリズムによって容易に解くことができる．なお，式(3.2)を満たすような近似関数 **g(X,Y)** は，具体的には，

$$\mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \tau \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \mathbf{c}(\mathbf{y},\tau_{\mathrm{Y}}) \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (3.5\mathrm{a})$$

$$\mathbf{X}\equiv[\mathbf{y},\tau]^T,\quad \mathbf{Y}\equiv[\mathbf{y}_{\mathrm{Y}},\tau_{\mathrm{Y}}]^T \quad (3.5\mathrm{b})$$

と設定する(i.e.リンク旅行時間関数が，引数 $\tau$ についてのみ，Y の要素 $\tau_{\mathrm{Y}}$ で近似された関数とする)ことで実現できる．このとき，

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}^{(n)},\mathbf{X}^{(n)}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(n)}) \quad (3.6\mathrm{a})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{X}^{(n)}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \tau \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \mathbf{c}(\mathbf{y},\tau^{(n)}) \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (3.6\mathrm{b})$$

となるから，式(3.2)が成立することがわかる．

## 4. アルゴリズムーその2

### 4.1 相補性問題に対する Newton 法

最近，Facchinei and Soare(1995) は，広いクラスの NCP に対して大域的収束が保証された効率的計算法を提案している．この方法は，Newton 法の一種であり，その基本的な考え方は以下の通りである．

いま，$\mathbf{x}^*$ を NCP の非退化解とし，$\alpha = \{\, i \mid x_i^* = 0\}$，$\beta = \{\, i \mid x_i^* > 0\}$ となるような添字集合 $\alpha$ と $\beta$ がわかっているとしよう．それに対応する **x** と **F** の分割を各々，$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_\beta,\ \mathbf{x}_\alpha) = (\mathbf{x}_\beta,\ \mathbf{0})$，$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_\beta,\ \mathbf{F}_\alpha) = (\mathbf{0},\ \mathbf{F}_\alpha)$ と書く．このとき，連立方程式 $F_i(\mathbf{x}_\beta,\mathbf{0}) = 0$，$i\in\beta$，を解けば，NCP の解が得られる．ここで，もし $[\nabla_\beta\mathbf{F}_\beta(\mathbf{x}^*)]$ （$\nabla_\beta$ は $\mathbf{x}_\beta$ に関する微分演算子）が singular でなければ，この方程式は Newton 法を用いて解くことができる．より具体的には，線形連立方程式：

$$[\nabla_\beta\mathbf{F}_\beta(\mathbf{x}^{(n)})]\,\mathbf{d}_\beta^{(n)} = -\mathbf{F}_\beta(\mathbf{x}^{(n)}) \quad (4.1)$$

を解いて $\mathbf{d}_\beta^{(n)}$ を求め，$\mathbf{x}_\beta^{(n+1)} := \mathbf{x}_\beta^{(n)}+\mathbf{d}_\beta^{(n)}$ で解を改訂することを繰り返せばよい．さて，一般には，NCP の解を得るまでは真の $\alpha$ と $\beta$ はわからないが，各

iterationでその適切な近似集合を利用できれば，収束が期待できる．Facchinei and Soares (1995) は，以下の基準で$\alpha$と$\beta$を近似することを提案した：

$$\alpha=\{\,i\,|\,x_i^{(n)}\le \varepsilon F_i(x_i^{(n)})\},\quad \beta=\{\,i\,|\,x_i^{(n)}>\varepsilon F_i(x_i^{(n)})\},$$

ここで，$\varepsilon$は正の定数．このとき，$\mathbf{d}_\alpha^{(n)}$は $\mathbf{d}_\alpha^{(n)}=-\mathbf{x}_\alpha^{(n)}$によって決定され，$\mathbf{d}_\beta^{(n)}$ は線形連立方程式(4.1)の解として決定される．ただし，式(4.1)の右辺は

$$-\mathbf{F}_\beta(\mathbf{x}^{(n)})+[\nabla_\alpha \mathbf{F}_\beta(\mathbf{x}^{(n)})]\,\mathbf{x}_\alpha^{(n)} \tag{4.2}$$

で置き換えられる．さらに，彼らは，アルゴリズムの大域的収束性を保証するために，Fisher(1992) のNCPに対するmerit関数：

$$\Psi(\mathbf{x})\equiv\sum_{i=1}^{L+N}\phi(x_i,F_i(\mathbf{x}))^2 \tag{4.3a}$$

$$\text{ここで,}\quad \phi(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-(x+y), \tag{4.3b}$$

による一次元探索を組合わせた方法を提案している．そのアルゴリズム全体は以下の様にまとめられる：

***Step 0: (Initialization)***
Set $n:=0$ and set the value of the parameters $(\varepsilon,\rho,p,\kappa,\sigma)$ satisfying $\varepsilon>0,\ \rho>0,\ p>2,\ \kappa\in(0,1/2),\ \sigma\in(0,1)$

***Step 1: (Stopping Test)***
If the stopping criterion is satisfied, stop.

***Step 2: (Direction Finding)***
Calculate $\mathbf{d}_\beta^{(n)}$ by solving (4.1), and $\mathbf{d}_\alpha^{(n)}:=-\mathbf{x}_\alpha^{(n)}$.

If system (4.1) is not solvable or $\mathbf{d}^{(n)}$ does not satisfy $\nabla\Psi(\mathbf{x}^{(n)})\cdot\mathbf{d}^{(n)}\le-\rho\|\mathbf{d}^{(n)}\|^p$, set $\mathbf{d}^{(n)}:=-\nabla\Psi(\mathbf{x}^{(n)})$.

***Step 3: (Move with the step size of 1)***
If $\mathbf{d}^{(n)}$ satisfies $\Psi(\mathbf{x}^{(n)}+\mathbf{d}^{(n)})\le\sigma\Psi_2(\mathbf{x}^{(n)})$

set $\mathbf{x}^{(n+1)}:=\mathbf{x}^{(n)}+\mathbf{d}^{(n)}$, $n:=n+1$ and go to Step 1.

***Step 4: (Line Search and Move)***
Find the smallest $i=0,\ 1,\ 2,\ldots$ such that

$$\Psi(\mathbf{x}^{(n)}+2^{-i}\mathbf{d}^{(n)})\le\Psi(\mathbf{x}^{(n)})+\kappa 2^{-i}\nabla\Psi(\mathbf{x}^{(n)})\cdot\mathbf{d}^{(n)}$$

set $\mathbf{x}^{(n+1)}:=\mathbf{x}^{(n)}+2^{-i}\mathbf{d}^{(n)}$, $n:=n+1$ and go to Step 1.

## 4.2 DUE 問題への応用

このアルゴリズムの効率性は，線形連立方程式(4.1)をいかに効率的に解くかに大きく依存している（他のステップの計算の手間は相対的に極めて小さい）．幸いにも，DUE配分の場合，(4.1) に対応する連立方程式は，問題のネットワーク構造を活用すれば，極めて効率的に解ける．DUE配分の場合，式(4.1)は

$$\begin{cases}\mathrm{D}\,\Delta\mathbf{y}+\mathrm{A}_-^T\Delta\boldsymbol{\tau}=-\mathbf{g}(\mathbf{y}^{(n)},\boldsymbol{\tau}^{(n)})\equiv\bar{\mathbf{g}}\\ \mathrm{A}\,\Delta\mathbf{y}=-\mathbf{h}(\mathbf{y}^{(n)},\boldsymbol{\tau}^{(n)})\equiv\bar{\mathbf{h}}\end{cases} \tag{4.4}$$

となる．ここで$\mathbf{d}^{(n)}\equiv(\Delta\mathbf{y},\Delta\boldsymbol{\tau})$; $(\mathbf{g},\mathbf{h})$は，各々，ベクトル関数$\mathbf{F}(\mathbf{x})$の最初のL個の要素，N個の要素に対応するベクトル関数; $\mathrm{A}_-=\mathrm{A}$の+1要素を0とした行列; $\mathrm{D}=\mathbf{c}(\mathbf{y},\boldsymbol{\tau})$のyに関するJacobian（対角要素$\alpha_{ij}$を持つ対角行列）である．さらに，連立方程式(4.4) は$\Delta\boldsymbol{\tau}$のみに関する連立方程式：

$$\mathrm{AD}^{-1}\mathrm{A}_-^T\Delta\boldsymbol{\tau}=\mathrm{AD}^{-1}\bar{\mathbf{g}}-\bar{\mathbf{h}}, \tag{4.5}$$

に帰着し，$\Delta\mathbf{y}$は以下の簡単な計算で得られる：

$$\Delta\mathbf{y}=\mathrm{D}^{-1}(\mathrm{A}_-^T\Delta\boldsymbol{\tau}-\bar{\mathbf{g}}) \tag{4.6}$$

$$\text{or}\qquad \Delta y_{ij}=(\Delta\tau_j-\bar{g}_{ij})/\alpha_{ij}\qquad \forall(i,j)\in L\cap\beta$$

ここで，接続行列Aの特徴を考慮すると，$\mathrm{AD}^{-1}\mathrm{A}_-^T$は

$$\begin{cases}-1/\alpha_{ij} & \text{if there exists a link } i\to j,\\ \sum_k(1/\alpha_{ki})-\sum_k(1/\alpha_{ik}) & \text{if } i=j \text{ (diagonal entry)},\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

を$(i,j)$ 成分に持つ非常に疎な行列であることがわかる．つまり，連立方程式(4.5)の係数行列は，極めて少ない手間で得ることができ，また，記憶容量も必要としない．従って，我々は(4.4) を効率的に解くことができ，このアルゴリズムは大規模なDUE配分問題に対しても効率的に適用できることがわかる．

## 参考文献


[1] 赤松隆・桑原雅夫，“渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分”，土木学会論文集 488, pp.21-30,1994.

[2] 赤松隆，“交通流の予測・誘導・制御と動的なネットワーク配分理論”，土木計画学研究・論文集 No.13, (印刷中), 1996.

[3] T.Akamatsu and M.Kuwahara, “Dynamic Network Equilibrium Model of Simultaneous Route/Departure Time Choice for a Many-to-One OD Pattern”, submitted to *Transportation Research Part B*.

[4] F.Facchinei and J.Soares, “Testing a New Class of Algorithms for Nonlinear Complementarity Problems”, in *Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems* (Eds. F.Giannessi and A.Maugeri), Plunum Press, 1995.

[5] A.Fisher, “A Special Newton-type Optimization Method”, *Optimization* **24**, pp.269-284, 1992.

[6] M.Fukushima, “Equivalent Differentiable Optimization Problems and Descent Methods for Asymmetric Variational Inequality Problems”, *Mathematical Programming* **53**, pp.99-110, 1992.

[7] M.Patricksson, “Partial Linearization Methods in Nonlinear Programming”, *Journal of Optimization Theory and Applications* **78**, pp.227-246, 1993.

[8] B.Ran, R.W.Hall and D.E.Boyce, “A Link-based Variational Inequality Model for Dynamic Departure Time / Route Choice”, *Transportation Research* **30B**, pp.31-46, 1996.

[9] M.J.Smith, “A New Dynamic Traffic Model and the Existence and Calculation of Dynamic User Equilibria on Congested Capacity-constrained Road Netwoks”, *Transportation Research* **27B**, pp.49-63, 1993.