【土木計画学研究・講演集 No.19(1) 1996年11月】

ネットワーク変形に基づくアクセシビリティの公理的導出*
Axiomatic derivation of accessibility function based on network transformation

宮城俊彦** 鈴木崇児***
Toshihiko MIYAGI Takaji SUZUKI

1．はじめに

土木計画学の分野ではアクセシビリティは地域間もしくはネットワーク上でのノード間の近接性の指標として広く用いられてきた。

一方、1970 年代中旬以降には Domencich and McFadden によって導入されたランダム効用理論の研究が Transportation research の分野で隆盛をきわめ、それらの研究はアクセシビリティ指標へ行動論的な影響を与えた。アクセシビリティとランダム効用のより一般的なレビューは Williams [1]及び Williams and Senior[2]に詳しい。それらの中では、アクセシビリティ指標は経済的な観点での財やサービスの余剰に対する意志決定基準と互換するとされており、アクセシビリティ指標に対する一つの意味付けを行っている。

本論文では、これまでのアクセシビリティ指標がネットワークの各属性を用いて計測されているにも関わらず、アクセシビリティ指標の定義がネットワークの性質を基礎として導かれていないことを論点とし、ネットワークの性質を基礎とした空間変形の概念を用いてアクセシビリティ関数を公理的に導くことを目的とする。

本論文におけるアクセシビリティー関数の公理的導出は、篠田・仙石による中心度関数の導出方法[3]に基づいているが、本論文の主要な結論が、費用の相補性条件に基づいて導かれる点においてより一般化されている。これは交通費用の概念が、アクセシビリティ指標に用いられてきた狭義の距離（経路距離・時間距離等）の概念を包含しているためである。費用の相補性については、Panzar and Willing [4]によって交通における規模の経済と範囲の経済として研究されている。

*キーワーズ：ネットワーク分析、アクセシビリティ
**正員　工博　岐阜大学工学部土木工学科
***正員　　岐阜大学工学部土木工学科
（岐阜市柳戸 1-1, TEL058-293-2446 FAX230-1528）

2．ネットワークの変化の記述

（1）ネットワークの位相空間

ノード集合をV、リンク集合をL、βを実数値関数とし、ネットワーク G[V,L,β]を以下のように定義する。

$$\beta : V \times V \to R^{+}, \left(R^{+} = [0, \infty]\right) \tag{1}$$

位相空間[V；β]はネットワークのノード間に定義され、位相空間を構成するベクトルβは、例えばノードｒ，ｓを使ってβ（ｒ，ｓ）で表される。このβは二つのノードの係わりの度合いを表現している。全てのβが距離の公理を満たすときこの位相空間は距離空間と呼ばれる。交通ネットワークにおけるβの適当な例としては所要費用（時間）、容量、トン・キロや旅客人・キロのような交通生産物などが含まれる。

（2）空間変形

篠田と仙石の方法に従って、空間変形の概念と変形に伴うノード集合についての定義に入る。空間Ｖの中で定義された一つ以上のβが変化することによって得られた新しい位相空間を［Ｖ；β'］とする。我々はこのようなネットワークにおける位相空間の変化を空間変形と呼び、交通ネットワークにおけるリンクの付加・削除、リンクパフォーマンス関数の変化によるネットワークの性質の変化を位相空間の変形としてとらえる。

（3）変化点と影響点

次に、空間変形に関連した二つのノード集合として変化点集合Ｔと影響点集合Ｉを定義する。

$$T(r;\beta) = \{ s : \beta'(r,s) \neq \beta(r,s), s \in V \} \tag{2}$$

$$I(u;\beta) = \{ v : T(v;\beta) \subseteq T(u;\beta), T(v;\beta) \neq \phi \} \tag{3}$$

変化点集合に含まれた個々の要素はｒへの関係βが空間変形によって変わったノードを表す。ここで、アクセシビリティが変化点集合に含まれる全ての要素によって定義されると仮定する。ｖに対する変化点集合がｕに対する変化点集合に含まれたなら、アクセシビリティーに関する変化へのｖの影響の度合いはｕの影響の度合いの範囲内に含まれる。この意味において、そのようなノードの集合を影響点集合と呼ぶ。

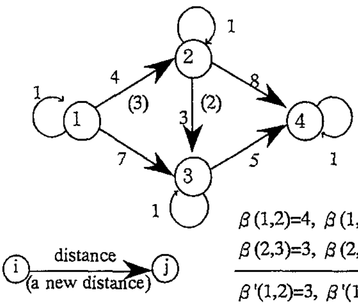
（４）縮小変形と拡大変形

定義： ＳをＶの部分集合とする。もしｒとｓに対して（４）式を満たせば、そのような空間変形をＳにおけるノードｐに関する縮小変形と呼ぶ。

$$\beta'(p,s)-\beta(p,s)\le\beta'(r,s)-\beta(r,s)\quad s\in S \tag{4}$$

特に全てのｒとｓについて $\beta'(r,s)-\beta(r,s)\le 0$ が成り立てば、単調縮小と呼ぶ。また、不等号の向きを反対にすることにより拡大変形と単調拡大の定義を得ることができる。

図１に描かれたネットワークを例に考えてみよう。なお、ノード間の係わりβについては最短経路距離を用いるものとする。



$\beta(1,2)=4,\ \beta(1,3)=7,\ \beta(1,4)=12$
$\beta(2,3)=3,\ \beta(2,4)=8,\ \beta(3,4)=5$

$\beta'(1,2)=3,\ \beta'(1,3)=5,\ \beta'(1,4)=10$
$\beta'(2,3)=2,\ \beta'(2,4)=7,\ \beta'(3,4)=5$

$$\mathbf{B}=\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 4 & 7 & 12 \\ 2 & \infty & 1 & 3 & 8 \\ 3 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ 4 & \infty & \infty & \infty & 1 \end{array}\qquad \mathbf{B'}=\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 5 & 10 \\ 2 & \infty & 1 & 2 & 7 \\ 3 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ 4 & \infty & \infty & \infty & 1 \end{array}\qquad \delta\mathbf{B}=\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

T(1)

S

図１　例題ネットワークの変形

このネットワークに対する変化点集合と影響点集合は以下のようになる。

$T(1)=\{2,3,4\}, T(2)=\{3,4\}, T(3)=\{0\}=T(4)$
$I(1)=\{1,2\},\ I(2)=\{2\}$

それ故に、この変形はＳ＝｛２，３，４｝についてのノード１に関する単調縮小変形である。

３．交通費用特性

次に、ノード間の係わりを交通費用を用いて考える。$x,y,z\ge 0$ として、(5)式の不等式を満たす実数値関数Ｃは非減少であり、式(6)の不等式を満たせば、限界的な追加に対して非増加である。

$$C(x+y)\ge C(x) \tag{5}$$

$$C(x+z)-C(x)\ge C(x+y+z)-C(x+y) \tag{6}$$

費用関数としてＣが定義されるとき、式(6)は費用の相補性条件と呼ばれている。Ｃが２階連続的で微分可能ならば、式(6)の不等式は以下の条件と等価である。

$$\frac{\partial^2 C(x)}{\partial x_i \partial x_j}\le 0 \tag{7}$$

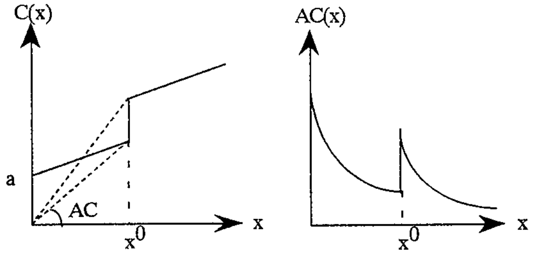
費用が増加する性質を示す不等式(5)は単純に生産物や距離が増加するに連れて生産物の費用や距離に関する費用が増加することを示す。Panzar and Willing[4]によれば、式(6)で表現される費用の相補性は生産物や他の生産物の増加に対して限界的に逓減する。または、交通の生産物の追加的な費用が減衰することを必要とする。単一生産物の費用関数に対して費用の相補性は凹関数となる。式(6)においてｘ＝０に対してＣ（０）＝０と仮定したとき、以下の劣下方性の条件を得る[5]。

$$C(z)+C(y)\ge C(y+z) \tag{8}$$

追加費用の減少や費用の劣下方性は交通費用の性質としてよく知られている。例えば、単位平均旅客者数×マイルにかかるガソリンで換算した旅客機の燃料消費は経路の区分の増加（経路の統合）と共に減少する。鉄道や高速道路を使った終点への直通の旅行の料金は、ある鉄道駅や高速道路のインターチェンジで旅行者が降り、その後で

再び列車に乗り彼らの目的地へ向かう場合よりも安くなる。ここで、劣下方性を満たす費用関数の例を挙げておこう。xは旅行時間をa，bは鉄道料金の差別化された水準、cは時間価値を示すものとする。旅行費用関数は以下のように与えられる。

$$C(x)\begin{Bmatrix} a+cx & for\ 0<x<x^0 \\ a+b+cx & for\ x\geq x^0, \\ & where\ a,b,c>0\ and\ b<a \end{Bmatrix} \qquad (9)$$



費用関数は旅行時間のあるレベルx^0を超えた追加的な料金bがaよりも費用として少なく認知されるような意味で鉄道利用者の認知旅行費用を表す。z (<x0) , y (<x0)かつx=z+y (>x0)であり、以下の式を満たすので、この費用関数は明らかに劣下方的である。

$$C(z)+C(y)=2a+cx\geq a+b+cx=C(y+z) \qquad (10)$$

優下方性をもつ関数の別の典型的な例はノルム関数や実数値の集合で定義される正の同次凸関数である。ここで以下の新たな結合関数を導入する。

$$\phi(x)=K-C(x) \quad (K: a\,positive\ cons.) \qquad (11)$$

実数値関数ϕは非増加で限界的な減少の条件に対して非減少であるので以下の不等式を満たす。

$$\phi(x)\geq\phi(x+y) \qquad (12)$$

$$\phi(x)-\phi(x+z)\geq\phi(x+y)-\phi(x+y+z) \qquad (13)$$

ϕが２度連続で微分可能なら不等式(13)は式(14)の条件と等しい。

$$\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x_i\partial x_j}\geq 0 \qquad (14)$$

ここでϕ（０）＝０とするとϕが以下の優下方性を満足する。

$$\phi(y)+\phi(z)\leq\phi(y+z) \qquad (15)$$

４．アクセシビリティの公理的導出

(1) アクセシビリティ関数の定義

アクセシビリティー関数を、都市間の距離と都市の人口や活動のレベルの尺度の関数として定義する。位相空間を［V; β,ω］で表す。ここでのβはノード間の最短経路距離をωはノードの重みを表すものとする。ノードの重みの変化を加法的な交通量の増加と関連づけ、以下の式で表現する。

$$\omega'(t)=\omega(t)+\sigma \qquad (16)$$

アクセシビリティー関数を以下のように定義する。

$$F_p(\beta)=\sum_{s\in Z}\Psi(\omega(s),\beta(p,s)) \qquad (17)$$

また、ネットワークの変化前と後のアクセシビリティー関数の差分を以下のように表す。

$$\delta F_p(\beta)=F_p(\beta')-F_p(\beta) \qquad (18)$$

(2) アクセシビリティ関数の公理系

公理系：空間[V; β,ω]の中で、ある二つの点pとtを考える。空間変形[V; β,ω]→[V; β',ω']がノードpに関するβの単調縮小変形となっており、ノードtに関するωの拡大変形となっている。このような空間変形に対して、条件

(i) $\delta F_p(\beta)\geq 0, \delta F_t(\omega)\geq 0$

を満たし、さらにVの部分集合$S(p)$について

(ii) $for\ r\in S\cap I(p),$

$$\delta F_p(\beta)\geq\delta F_r(\beta)$$

であり、かつ

(iii) $for\ \beta(u,t)\leq\beta(v,t),$

$$\delta F_u(\omega)\geq\delta F_v(\omega)$$

満たすとき、$F_p(\beta)$を(17)式によって$S(p)$について定義されたアクセシビリティ関数と呼ぶ。

条件(i)はこの空間変形によって、アクセシビリティの非負の変化が必ず表れるノードがあることことを保証する。条件(ii)はノードpに関する変化点集合は変化点集合の中で最大の要素を持っているので、ノードpに対する追加的なアクセシビリティーの変化が最大であることを示す。条件(iii)は、ノードuからtへの距離が最小ならば、ノードtでの追加的な変化によって最大の影響を受けるノードはノードuであることを保証する。

(3) アクセシビリティ関数の導出

ここでは、位相空間［V;β,ω］（β：最短経路距離、ω：ノードの重み）をもつネットワークに対してリンクの付加またはリンク距離の短縮という具体的な空間変形を仮定し、前節で示した公理系にあてはまるアクセシビリティ関数を導出するために用いる定理を示す。紙面の都合上証明は省略する。

補助定理1：以下の式で表されるリンクの付加やリンク距離の短縮する変形はノードpに対する単調縮小となっている。

$$\beta'(s,t) = \min.\{\beta(s,t), \beta(s,p) + \beta(q,t) + \lambda\},$$
$$(\lambda = \beta(p,q) - \delta \geq 0, \delta \geq 0) \tag{19}$$

補助定理2：(19)式の単調縮小を行ったとき、$r \in I(p), s \in T(r)$に対し

$$\beta'(p,s) \leq \beta'(r,s) \tag{20}$$

定理1：もし、Fがβについての非増加かつ、限界的な減少に関して非減少であり、ωについて非減少かつ、限界的な増加に関して非増加であれば、空間 [V;β, ω]についてのアクセシビリティー関数となる。

系：yは二階連続で微分可能であるとする。もし、βに関して非増加で凸関数であり、ωに関して非減少かつ凹関数であるなら、Fは空間[V;β, ω]についてのアクセシビリティー関数である。

以下のハンセンのアクセシビリティーの定義式は上記の系を満足する。

$$A_i = \sum_j H_j \exp(-\theta c_{ij}) \tag{21}$$

A_iはアクセシビリティーの公理系を満たすので、その単調増加変換も公理系を満たす。それ故に(Williams, 1977)のランダム効用理論から得られた以下の消費者余剰もまたアクセシビリティーの尺度である。

$$CS_i = \frac{1}{\theta} \log \sum_j H_j \exp(-\theta c_{ij}) \tag{22}$$

さらに、A_iでのc_{ij}や$\exp(-\theta c_{ij})$を式(13)にを満たす旅行時間関数や平均費用関数にそれぞれ置き換えれば、非連続なアクセシビリティー関数についても公理的な裏付けが可能である。

5. おわりに

本研究の最終的な目的は多様な論理的な枠組みにおいて用いられてきたアクセシビリティーを統合することである。その方法として、ネットワークの性質を基礎とする空間変形に関する公理系を与え、各ノードに定義した実数値関数の変化の条件からアクセシビリティ関数の系を導出した。空間変形の概念はネットワークシステムにおける変化を各ノードと関連づける重要な役割をアクセシビリティー関数に演じさせる。本論文で扱った関数の公理系は現在までに提案されたアクセシビリティー関数のほとんどを包含していることからもかなりの一般性を持つことがわかる。

参考文献

1) Williams, H.C.W.L. (1977): On the formation of travel demand models and economic evaluation measures of user benefit. Environment and Planning A,9, 285-344.
2) Williams, H.C.W.L. and Senior, M.L. (1978): Accessibility, spatial interaction and spatial benefit: analysis of land use-transportation plans. In Karlquist, A., Lundquist, L., Snickars, F. and Weibull, J.W. (eds.) *Spatial Interaction Theory* and Planning Models, North-Holland, Amsterdam, 253-258.
3) 篠田庄司、仙石正和：空間の変形とネットワークの点中心らしさを測る関数の理論、電子通信学会誌、'86/1 Vol. J69-A No.1
4) Panzar, J. C. and Willing, R. D. (1977): Free entry and the sustainability of natural monopoly. Bell Journal of Economics, 8, 1-22.
5) Sharkey, W.W. (1982): The theory of natural monopoly, Cambridge University Press, Cambridge, NY.