【土木計画学研究・講演集 No.19(1) 1996年11月】

Dantzig-Wolfeの分解原理を用いた工事間土量配分モデルの階層的計算方法*

The Hierarchical Calculation Method of Surplus Soil Transportation Model by Applying Dantzig and Wolfe's Decomposition Principle.

冨田 安夫**、寺嶋 大輔***

by Yasuo TOMITA and Daisuke TERASHIMA

1. はじめに

都市内およびその周辺部では多数の建設工事が行われており、大量の土砂が発生しその処分地の不足や遠隔化が問題となっている。一方、土砂を必要とする工事においても、採取場の不足や遠隔化が深刻となっている。採取場・処分場の不足は工事の円滑な進捗に支障を及ぼし、また、その遠隔化は、土砂コストの増大，道路混雑の助長、輸送ｴﾈﾙｷﾞｰ消費の増大などの問題をもたらしている[1]。

このため工事間での土砂再利用の促進が求められており、その輸送計画を策定するため、工事間土量配分モデル[2),3),4)]がいくつか開発されている。ところが、計算機の記憶容量の制約のため、設定できる対象工事数や期間数に限界があり、実用的な程度の大規模問題への適用には至っていない。

本研究は、冨田・寺嶋[4)]による工事間土量配分モデルに対して、Danzig-Wolfeの分解原理[5),6)]を適用し、モデルの階層化を行うことによって、計算機の記憶容量の制約を緩和し、大規模問題へのモデルの適用可能性を拡げることを目的とする。

2. 工事間土量配分モデルの概要

まず、工事間土量配分モデル[4)]の概要について整理しておく。

(1)モデルの考え方

建設発生土の再利用のための工事間土量配分モデルは、建設工事，土砂採取場，土砂処分場に加えて、土砂を一時的にストックし時間調整を行うためのストックヤードや、低質土を良質土に改良するための土質改良ﾌﾟﾗﾝﾄを対象として、図-1に示すような土砂の流れを最適化するためのモデルである。

土砂の再利用にあたっては、土量，土質，時期の一致が必要であり、本モデルでは次のように考えている。

⑴土量については、搬出・搬入工事、ストックヤード、土質改良プラントにおいてその入出土量を一致させる。

⑵土質については、搬入工事で必要とされる土質以上であれば再利用を認め、これを満たさない場合には、処分されるか、あるいは、土質改良プラントで一定の土質以上に改良した後に再利用を行う。

⑶時期については、土砂の搬出・搬入時期が一致する場合、工事間の直接的な再利用を認めるが、一致しない場合には、ストックヤードを介して再利用を行う。

(2)モデルの定式化

図-1に示す土砂輸送に関わる総費用の最小化問題は、線形計画問題として定式化できる。その目的関数および制約条件式は以下の通りである。定式化にあたって図-1に示す変数を用いる。これらのうち、決定変数は、工事および施設間の運搬土量 ($X^{t,k}_{\alpha\beta},(\alpha,\beta=i,j,y,p,s,d)$)、ストック土量 ($q^{t,k}_y$)，改良土量($r^{t,k'\to k}_p$)である。

(a)目的関数

目的関数は、輸送費(Z_1)，ストック費用(Z_2)，土質改良費用(Z_3)，土砂購入費用(Z_4)および処分費用(Z_5)の総和の最小化としており、これを定式化したものが(1)式である。

(b)制約条件

【搬出工事に関する制約】

搬出工事(i)の搬出土量$a_i^{t,k}$は、搬出工事から他の工事等(β =j,y,p,d)へ搬出される土量の合計に等しいことから(2)式が成立する。

【搬入工事に関する制約】

搬入工事(j)についても、搬出工事と同様の制約条件が成立する。ただし、搬入工事においては、必要土質k（数値の小さいほど良質土）以上のものであれば利用可能であることから、(3)式の左辺において土質k'(k'= 1,…,k)について和をとっている。

【ストックヤードに関する制約】

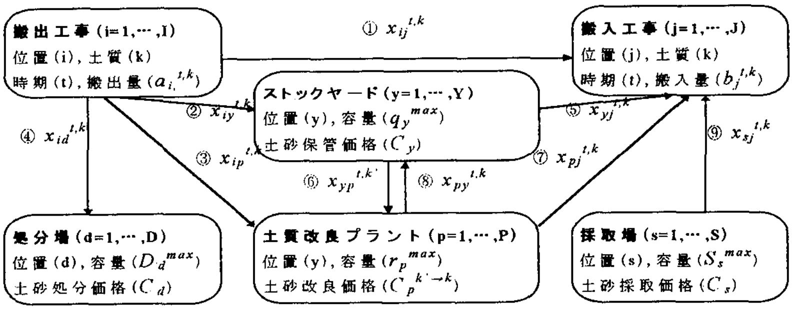
ストックヤード(y)のt期のストック量は、(t-1)期のストック量にt期の搬出工事(i)および土質改良ﾌﾟﾗﾝﾄ(p)からの搬入量を加

---

* キーワード 計画手法論、施工計画・管理

** 正会員 工博 神戸大学工学部建設学科
(〒657 神戸市灘区六甲台町1-1、Tel.& Fax. 078-803-1014)

*** 正会員 工修 (財)計量計画研究所
(〒162 東京都新宿区市谷本村町2-9、Tel. 03-3268-9911, Fax. 03-5229-8081)



(注)

$X_{\alpha\beta}^{t,k}$: $\alpha\beta$間の t 期における土質 k の土砂の輸送量 (図中①－⑨に対応)

$C_{\alpha\beta}$: $\alpha\beta$間の単位土量当たりの土砂輸送費用 (図中①－⑨の輸送費用)

I : 搬出工事数、J : 搬入工事数、Y : ｽﾄｯｸﾔｰﾄﾞ数、P : 土質改良ﾌﾟﾗﾝﾄ数、

S : 採取場数、D : 処分場数、K:土質レベル数、T : 対象期間数

図－1 建設発生土の輸送パターンと変数設定

[目的関数]

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 \qquad \to min \qquad \cdots(1)$$

$$Z_1 = \sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} c_{ij}x_{ij}^{t,k} + \sum_{i=1}^{I}\sum_{y=1}^{Y}\sum_{k=1}^{K} c_{iy}x_{iy}^{t,k} + \sum_{i=1}^{I}\sum_{p=1}^{P}\sum_{k=2}^{K} c_{ip}x_{ip}^{t,k}\right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{I}\sum_{d=1}^{D}\sum_{k=1}^{K} c_{id}x_{id}^{t,k} + \sum_{y=1}^{Y}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} c_{yj}x_{yj}^{t,k} + \sum_{y=1}^{Y}\sum_{p=1}^{P}\sum_{k=2}^{K} c_{yp}x_{yp}^{t,k}$$

$$\left.+ \sum_{p=1}^{P}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K-1} c_{pj}x_{pj}^{t,k} + \sum_{p=1}^{P}\sum_{y=1}^{Y}\sum_{k=1}^{K-1} c_{py}x_{py}^{t,k} + \sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} c_{sj}x_{sj}^{t,k}\right)$$

$$Z_2 = \sum_{t=1}^{T}\sum_{y=1}^{Y}\sum_{k=1}^{K} c_y q_y^{t,k}, \quad Z_3 = \sum_{t=1}^{T}\sum_{p=1}^{P}\sum_{k'=1}^{K}\sum_{k=1}^{K} c_p^{k'\to k} r_p^{t,k'\to k}$$

$$Z_4 = \sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} c_s x_{sj}^{t,k}, \quad Z_5 = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{I}\sum_{d=1}^{D}\sum_{k=1}^{K} c_d x_{id}^{t,k}$$

[制約式]

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ij}^{t,k} + \sum_{y=1}^{Y} x_{iy}^{t,k} + \sum_{p=1}^{P} x_{ip}^{t,k} + \sum_{d=1}^{D} x_{id}^{t,k} = a_i^{t,k} \qquad \cdots(2)$$

$$\sum_{k'=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{I} x_{ij}^{t,k'} + \sum_{y=1}^{Y} x_{yj}^{t,k'} + \sum_{p=1}^{P} x_{pj}^{t,k'} + \sum_{s=1}^{S} x_{sj}^{t,k'}\right) = b_j^{t,k} \qquad \cdots(3)$$

$$q_y^{t-1,k} + \left(\sum_{i=1}^{I} x_{iy}^{t,k} + \sum_{p=1}^{P} x_{py}^{t,k}\right) - \left(\sum_{j=1}^{J} x_{yj}^{t,k} + \sum_{p=1}^{P} x_{yp}^{t,k}\right) = q_y^{t,k} \qquad \cdots(4)$$

$$\sum_{k=1}^{K} q_y^{t,k} \le q_y^{max} \quad \cdots(5), \quad \sum_{i=1}^{I} x_{ip}^{t,k'} + \sum_{y=1}^{Y} x_{yp}^{t,k'} = \sum_{k=1}^{K} r_p^{t,k'\to k} \qquad \cdots(6)$$

$$\sum_{j=1}^{J} x_{pj}^{t,k} + \sum_{y=1}^{Y} x_{py}^{t,k} = \sum_{k'=1}^{K} r_p^{t,k'\to k} \quad \cdots(7), \quad \sum_{k'=1}^{K}\sum_{k=1}^{K} r_p^{t,k'\to k} \le r_p^{max} \qquad \cdots(8)$$

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} x_{sj}^{t,k} \le S_s^{max} \quad \cdots(9), \quad \sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} x_{id}^{t,k} \le D_d^{max} \qquad \cdots(10)$$

$$x_{\alpha\beta}^{t,k}, q_y^{t,k}, r_p^{t,k'\to k} \ge 0(\alpha, \beta = i, j, y, p, s, d) \qquad \cdots(11)$$

図－2 モデルの定式化

え、搬入工事(j)および土質改良プラント(p)への搬出量を減じたものであり、(4)式で表される。また、ストックヤードの容量制約を示したものが(5)式である。

【土質改良プラントに関する制約】

土質改良プラント(p)では土質改良前後においてそれぞれ条件式が成立する。土質改良前に着目すると、t期において搬出工事(i)及びストックヤード(y)からプラント(p)へ搬入された土質(k')の土量は、プラントによって土質(k')から他の土質へ改良された土量に等しいことから、(6)式が成り立つ。

土質改良後に着目すると、t期においてプラント(p)から搬入工事(j)及びストックヤード(y)へ搬出された土質(k)の土量は、プラントにより土質(k)に改良された土量に等しいことから(7)式が成り立つ。

プラントの1期当たりの処理量の制約を設定したものが(8)式である。

【採取場、処分場に関する制約】

採取場(s)および処分場(d)の総量制約を設定したものが(9)、(10)式である。

【非負条件】

決定変数は全て非負であり(11)式のとおりである。

3．Dantzig-Wolfeの分解原理を用いたモデルの階層的計算方法

本章では、2章で示した工事間土量配分モデルの、Dantzig-Wolfeの分解原理を用いた階層的計算方法を提案する。まず、表記の簡便化のためモデルの行列表記を行い、次いで、モデルの階層化およびその計算方法を示す。なお、便宜上、2期間モデル(T=2)として説明するが、3期間以上の場合に対しても容易に拡張することができる。

(1)土量配分モデルの行列表記

前章で示した土量配分モデルの行列表記を行う。まず、目的関数（図-2の(1)式）については、費用係数ベクトル［C］(目的関数の費用係数を要素とする行ベクトル)および第1期および第2期における決定変数ベクトル$[X^1][X^2]$(各期における土砂運搬土量を要素とする列ベクトル)を用いれば、次式のように表せる。

$$Z=[C][X^1]+[C][X^2] \rightarrow min \quad \cdots(12)$$

$[C]$：目的関数の費用係数(行)ベクトル

$[X^t]$：第t期の決定変数(列)ベクトル

次に、制約式については、(4)式を除いて、期(t)ごとに独立しているため、これらをまとめて、期ごとに行列表記したものが(13)式、(14)式である。なお、(5)、(8)～(10)式については不等号制約のためスラック変数を用いて等式化する。

$$[A][X^1]=[B^1] \quad \cdots(13)$$

$$[A][X^2]=[B^2] \quad \cdots(14)$$

$[A]$：(4)式を除く制約式の係数行列

$[B^t]$：(4)式を除く制約式(t期)の定数項(列)ベクトル

(4)式(ストックヤードのバランス式)については、t期に関連する変数のみならず、(t-1)期の変数($q_y^{t-1,k}$) を含んでおり、両期間に関連する制約式となっている。これを行列表示すると次式となる。

$$[Y^1][X^1]+[Y^2][X^2]=0 \quad \cdots(15)$$

$[Y^1]$：(4)式の$q_y^{t-1,k}$に対応する係数行列

$[Y^2]$：$q_y^{t-1,k}$以外の変数に対応する係数行列

なお、図-2の(4)式の右辺の$q_y{}^{t,k}$は、左辺と同様に一つの変数であることから、左辺に移項した上で行列表記を行っている。

以上の(12)～(15)式をまとめると、2期間の工事間土量配分モデルは、以下のように行列表記することができる。

$$\begin{aligned} z=[C][X^1]+[C][X^2] &\rightarrow min \quad \cdots(16)\\ [Y^1][X^1]+[Y^2][X^2] &=[0]\\ [A][X^1] \qquad\qquad &=[B^1]\\ [A][X^2] &=[B^2] \end{aligned}$$

(2)モデルの階層化

モデルの行列表記((16)式)は、制約式が期(t)ごとの個別制約式（$[A][X^1]=[B^1]$, $[A][X^2]=[B^2]$）と、期間を関連づける共通制約式($[Y^1][X^1]+[Y^2][X^2]=[0]$）とによって構成されている。

このような問題は、Dantzig-wolfeの分解原理によれば、(16)式を直接解くのではなく、各期ごとの問題(部分問題)と、その結果を全体で調整する問題(統合問題)に階層化することができる。

期ごとの部分問題はそれぞれ次式で表される。

$$z_1=[C][X^1]\rightarrow \min \ \ s.t\ [A][X^1]=[B^1] \quad \cdots(17)$$

$$z_2=[C][X^2]\rightarrow \min \ \ s.t\ [A][X^2]=[B^2] \quad \cdots(18)$$

各部分問題に対するすべての基底可能解(端点)の集合を $[X^1]_1$、$[X^1]_2$、…、$[X^1]_K$および$[X^2]_1$、$[X^2]_2$、…、$[X^2]_L$ とすれば、各部分問題の任意の解$[X^1]$, $[X^2]$は、次式によって表せる。

$$\begin{aligned}[X^1] &= \lambda_1^1[X^1]_1+\cdots+\lambda_K^1[X^1]_K \quad \cdots(19)\\ &=\sum_{\kappa=1}^{K}\lambda_\kappa^1[X^1]_\kappa \ \ (\text{但し、}\sum_{\kappa=1}^{K}\lambda_\kappa^1=1;\lambda_\kappa^1\geq 0)\end{aligned}$$

$$[X^2] = \lambda_1^2[X^2]_1 + \cdots + \lambda_L^2[X^2]_L \qquad \cdots (20)$$

$$= \sum_{l=1}^{L} \lambda_l^2 [X^2]_l \quad (\text{但し},\ \sum_{l=1}^{L} \lambda_l^2 = 1; \lambda_l^2 \geq 0)$$

(19)式、(20)式を(16)式に代入したものが統合問題((21)式)であり、各部分問題の解が制約条件を満たすように調整している。

$$z = \sum_{\kappa=1}^{K} \lambda_\kappa^1 [C][X^1]_\kappa + \sum_{l=1}^{L} \lambda_l^2 [C][X^2]_l \rightarrow min \qquad \cdots (21)$$

$$s.t.\ \sum_{\kappa=1}^{K} \lambda_\kappa^1 [Y^1][X^1]_\kappa + \sum_{l=1}^{L} \lambda_l^2 [Y^2][X^2]_l = [0]$$

$$\sum_{\kappa=1}^{K} \lambda_\kappa^1 = 1$$

$$\sum_{l=1}^{L} \lambda_l^2 = 1$$

$$\lambda_\kappa^1, \lambda_l^2 \geq 0$$

式、(18)式)と、統合問題((21)式)の2段階の階層的問題として再定式化されたことになる。

(3) 階層化モデルの計算方法

統合問題((21)式)を解いた解が、(16)式の最適解を与えるためには、部分問題((17)式、(18)式)の基底可能解が全て求められていることが必要となる。しかしながら、そのためには多大の労力を要し、求めたとしても多数の基底可能解のもとで統合問題を解くことは、計算上効率的でない。

そこで、部分問題の基底可能解のうち、いくつかを初期基底可能解として、これを順次改訂しながら解を改善していくことができる。これは、改訂シンプレックス法の考え方とほぼ同様である。具体的には、以下の手順に従う。

① 初期基底解の設定

統合問題((21)式)が解を持つためには、(21)式の変数(λ)の数が制約条件の数を上回る必要があることから、制約式の数以上の初期基底可能解を求めておく必要がある。

具体的には、種々の追加的条件のもとで各部分問題を解き、これらを初期基底解とすればよい。

② 統合問題の解の算定

上で求めた初期基底解をもとに統合問題を解く。また、このとき、共通制約式($[Y^1][X^1]+[Y^2][X^2]=[0]$)に対するシンプレックス乗数$[\pi^0]$(行ベクトル)および個別制約式 $[A][X^1]=[B^1]$, $[A][X^2]=[B^2]$) に対するシンプレックス乗数s^0、t^0とする。

改訂シンプレックス法によれば、手順①で求めた基底可能解以外に、相対費用(($[C]+[\pi^0][Y^1])[X1]+s^0$、($[C]+[\pi^0][Y^2])[X^2]+t^0$)が負となるものがみつかれば、さらに、解を改善することができる。

③ 部分問題の解の算定

上記のような相対費用が負となる基底可能解$[X1]_*$が存在するなら、$z=([C]+[\pi^0][Y^1])[X^1]$を最小化する問題、すなわち、部分問題(17)式の目的関数の費用係数$[C]$を($[C]+[\pi^0][Y^1]$)に入れ替えた問題の解として得られる。

同様に、$[X^2]_*$についても、部分問題(18)式の目的関数の費用係数$[C]$を($[C]+[\pi^0][Y^2]$)に入れ替えた問題の解として得られる。

④最適化判定

各部分問題の解として得られた$[X^1]_*$,$[X^2]_*$に関する相対費用(($[C]+[\pi^0][Y^1])[X1]+s^0$, ($[C]+[\pi^0][Y^2])[X^2]+t^0$)がともにゼロ以上であれば、手順②において(21)式を解いて得られた解λが最適解であり、このときの$[X^1]$、$[X^2]$は(19)式、(20)式を用いて求められる。

もし、負となるものがあれば、$[X^1]_*$,$[X^2]_*$のうち相対費用が小さいものを新たな基底として、再び手順②に戻って統合問題を解けばよい。

なお、計算例として、6期間の場合で試算した結果、計算機の記憶容量は約1/6に節約でき、計算時間についてもほぼ同程度であった。

4. おわりに

本研究では、Dantzig-Wolfeの分解原理を用いた、工事間土量配分モデルの階層的計算方法を提案し、適用例を通して、計算時間を大きく増大させることなく、計算機の記憶容量の節約が可能であることを明らかにした。

今後は、さらに、より多くの建設工事を対象とした適用可能性を高めるために、時間による分割・階層化だけでなく、空間に着目した分割・階層化も必要であると考えている。この場合、複数の地域間の調整する統合問題と、個々の地域内で最適化を行う部分問題とに階層化されることになる。

【参考文献】

1)建設省建設経済局：総合的建設残土に関する報告書、1990.6

2)見波、嶋津：建設残土の有効利用のための土量配分モデル、土木学会論文集、第395号／IV-9、pp.65-74、1988.7

3)和田、山本：建設残土の再利用計画に対する輸送問題の適用に関する研究、土木計画学研究・論文集、No.11、pp.255-262、1993.12

4)冨田、寺嶋：工事開始時期と工期の調整を考慮した建設残土輸送計画モデル、土木計画学研究・論文集、No.13、1996

5)G.B.Dantzig（小山訳）：線形計画法とその周辺、ホルト・サウンダース、1983

6)今野：線形計画法、日科技連、1987