【土木計画学研究・講演集 No.19(1) 1996年11月】

非線形・離散型費用関数に適用可能な新しい最適ネットワークスケジューリングモデルの開発研究
ー CPM手法とは異なったアプローチ ー*

A Study on Development of New Model for Optimal Network Scheduling with Non-linear and Discrete Cost Function

春名 攻** 滑川 達*** 櫻井義夫****

Mamoru HARUNA, Susumu NAMERIKAWA and Yoshio SAKURAI

1．はじめに

本研究においては，これまでに新たなスケジューリング理論や手法の展開をめざしての基礎研究として，ネットワーク工程表の構造特性把握のための分析的研究をおこない，その成果については逐次発表してきた．本稿ではこれらの研究成果をベースとして，計画変数の設定にこれまでとは異なった考え方を導入することにより，与えられた標準的な工程計画の内容を，計画者の希望する工期までもっとも安価に短縮することの可能な最適ネットワークスケジューリングモデルの開発に関して論じることとする．なお，本モデルでは，CPM手法のような線形の費用関数のみでなく，非線形や離散型の費用関数のような一般形の費用曲線でも最適解が求められる解法を開発している．

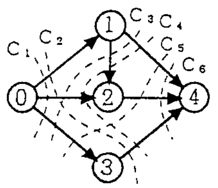
2．既存発表の基礎的研究成果に関する検討

上述のような日程短縮を伴う工程計画の問題に対して，既存のCPM手法においては，同時に時間短縮が可能な作業の集合であるカットを用いて，最適解の探索をおこなっているが，本研究においても，このようなカットを短縮のツールとして採用していくこととした．しかし，カット抽出の方法としては，CPM手法が採用しているような一種の流量問題に対する直接的でかつ解析的なミニマムカット探索のアプローチではなく，ネットワーク工程表の構造特性が表現する順序関係に着目した新しいアプローチを展開した．すなわち，まず日程の短縮を同時に検討することが可能な作業の集合として求められるカット構造に関して，作業間の順序構造のみに着目した数理的分析を実施するとともに(図－1)，これらカット間の順序構造が，もとの作業間の順序構造を保存しながら写像されることを発見し，この内容を理論的に整理したカットネットワークの概念を提案した(図－2)．さらにこのような研究成果にもとづき，本研究では問題を上述のカットネットワークでの配分問題として捉え，その解法にDPを適用したスケジューリングモデルを開発してきた．

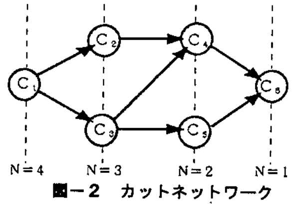
一方，われわれがこれまで実施した多くの適用計算や理論の再検討をとおして，この既開発モデルにも，以下のような解法上の問題点が内在していることが明らかとなってきた．

・短縮費用算出における処理の複雑さ
・CPM手法適用の際に逆向きさ行を含むカットが必要となる問題への対応

そして，これら2つの内容は，このモデルに採用していた計画変数の短縮状態の記述精度の問題に集約されることもこれまでの課題分析の結果より判明している．このため，以下においては，上述の既開発モデルをベースに，計画変数に新たな考え方を導入して開発した新しいスケジューリングモデルについて論述していくこととする．



図－1 カット



図－2 カットネットワーク

3．新しいスケジューリングモデルの開発

(1) 検討対象ネットワーク

さて，PERT計算により求められている初期のスケジュール案の示す工期λに対して，αの短縮を実行しようとする場合には，クリティカルパスに含まれている作業以外にも，短縮の対象となる作業が存在することは容易に理解できる．

ここで，トータルフロートが作業のもつ全余裕日数であることに着目すれば，短縮の検討対象となる

*キーワード：計画手法論，施工計画・管理
**正会員，工博 立命館大学理工学部環境システム工学科教授
(〒525 草津市野路町1916, TEL0775-61-2736, FAX0775-61-2667)
***学生員，工修 立命館大学大学院理工学研究科総合理工学専攻（同上）
****学生員，立命館大学大学院理工学研究科環境社会工学専攻（同上）

作業を限定することは十分に可能である．すなわち，

$$t^{E}_{i}=\max_{(k,\ i)\in P}\{t^{E}_{k}+D_{ki}\}$$
$$t^{E}_{0}=0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

の関数方程式によって，最早結合点時刻 t^{E}_{i} ならびにプロジェクト完了時刻 $t^{E}_{k}=\lambda$ を算出する．このとき，プロジェクト完了時刻 λ が制約工期に対して，α だけ超過していれば，

$$\lambda-\alpha=\lambda'=t^{L}_{n}$$

として，以下に示す関数方程式によって最遅結合点時刻 t^{L}_{j} を算出する．

$$t^{L}_{i}=\min_{(i,\ l)\in P}\{t^{L}_{l}-D_{il}\}$$
$$t^{L}_{n}=\lambda' \qquad i=n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 0$$

つぎにこれら算出された最早結合点時刻ならびに最遅結合点時刻を用いてトータルフロート TF_{ij} を

$$TF_{ij}=t_{j}-t_{i}-D_{ij}$$

として求める．そして，

$$TF_{ij}<0$$

となる作業のみの集合で形成されるネットワークを作成する．すなわち，ここではマイナスフロートをもつ作業のみからなる上述のようなネットワークを初期の検討対象としてとりあげ，解法の合理化をはかっている．なお，上述において定義したネットワークにおけるルートは，一般にリミットパスとよばれている．また，本研究ではこのリミットパスにより形成されるネットワークを，以後リミットパス・ネットワークとよぶこととする．

（2）新たな計画変数に関する検討

ここでは，前述した計画変数設定の問題を解決するために実施した新たなネットワーク構造特性の分析的研究の内容について論じていくこととする．すなわち，われわれは各レベルでの短縮状況の完璧な記述を目的として，ネットワークの始点から終点に流れるルート構造に着目した．そして，本研究では，このようなルート構造を的確に把握するための数理的分析手法を開発して，ネットワークの新たな構造特性分析を実施した．この手法の中では，接続行列上のルートの性質，すなわち，「ネットワーク工程表の接続行列上において，ルートは始終点間を縦→横→縦→横→･･･という単純な反復運動を繰り返す」という性質を**図－3**に示したように効果的に導入している．なお，以上のようなルートに着目したネットワークの構造分析は，対象ネットワークに対するルート行列の作成を可能とするものである．

しかし，リミットパス・ネットワークにおいては，複数のリミットパスの合成により，リミットパスとはならないルートが形成されている可能性があるため，ここで前述のルート探索方法によって作成されるルート行列に以下のような処理を加えておく．

まず，下式により，各ルートの所要日数を求める．

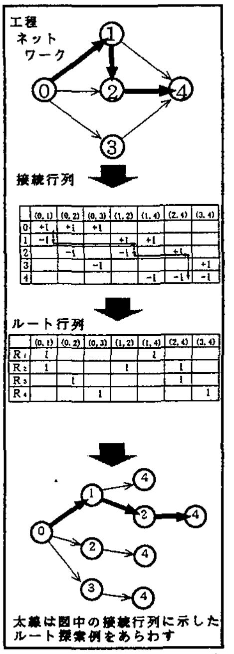
$$\sum_{(i,\ j)\in P} a_{k,\ (i,\ j)}\cdot D_{ij} \qquad (k=R_{1},\ R_{2},\ \cdots,\ R_{10})$$

P；リミットパス・ネットワークに含まれる作業の集合
$a_{k,\ (i,\ j)}$；上で作成されたルート行列の構成要素
D_{ij}；作業（i，j）の標準所要日数

そしてこの所要日数が

$$\sum_{(i,\ j)\in P} a_{k,\ (i,\ j)}\cdot D_{ij}\leqq\lambda-\alpha$$

となるルートをルート行列からとり除く．なお，このようなルートを排除してたとしても，リミットパス・ネットワークが，短縮を必要とするリミットパスの合成として形成されている以上，その構造はなんら変化することはない．以後のルート行列という記述はこの行列をさすものとする．



図－3　ルート抽出の考え方

このようにしてわれわれは，問題に対して意味のあるすべてのルート（ここでは，すべてのリミットパス）の構造を完全に把握することが可能となり，本稿が取り上げてきた日程の短縮問題は，すべての“意味あるルート”の同時短縮問題として取り扱うことができる．加えて，前述のカットは，上述したルートとの対応関係のもと「すべてのルートをたかだか1回切断するようなカット」として理論的に集約されることとなる．このため，本研究においては，モデルの計画変数を各ルートの短縮日数を表わすベクトル変数として新たに設定して，以降議論を進めていくこととする．

（3）問題の定式化に関する検討

以下においては，これまでの基礎研究の成果であるネットワークのカット集合およびその順序関係に

もとづいたカットネットワークと，新たな理論的成果としての作業の流れを始点から終点まで表わす意味のあるルートとその集合という形で定形化した日程短縮を伴う工程計画の問題を，ＤＰを適用したカットネットワークでの配分問題の解法として定式化した内容を示していくこととする．

いま，計画変数をリミットパス・ネットワークにもとづく各ルートの短縮状況，すなわち，

$$R_e = (r^1{}_e,\ r^2{}_e,\ \cdots,\ r^k{}_e,\ \cdots,\ r^m{}_e)$$

$r^k{}_e$；任意のレベルｅにおけるﾙｰﾄｋの短縮日数
ｍ；ﾘﾐｯﾄﾊﾟｽﾈｯﾄﾜｰｸに存在するﾙｰﾄの総数

のようなｍ次元ベクトルとおく．

つづいて，決定関数を各段の短縮費用として設定する．いま任意のレベルｅにおける状態変数R_eのもとで必要となる短縮費用を

$$g_e(R_e) = g_e(r^1{}_e,\ r^2{}_e,\ \cdots,\ r^m{}_e)$$

と表わせば，この$g_e(R_e)$の値は

$$g_e(R_e) = g_e(r^1{}_e,\ r^2{}_e,\ \cdots,\ r^k{}_e,\ \cdots,\ r^m{}_e)$$

$$= \sum_{(i,j)\in Pc} \left[\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_{k.(i,j)} \cdot C_{(i,j)}(r^k{}_e)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_{k.(i,j)}} \right]$$

（ｉ，ｊ）；作業
P_c；レベルｅに設定されたカットｃに含まれる作業の集合
$a_{k.(i,j)}$；ﾘﾐｯﾄﾊﾟｽﾈｯﾄﾜｰｸより作成したルート行列の構成要素
$C_{(i,j)}(r^k{}_e)$；作業（ｉ，ｊ）を$r^k{}_e$短縮したときに要する費用

として求めることができる．

ここで，すべてのレベル（１，２，…，ｎ）をとおしての各ルートの総短縮状況パターン$WR_{(n)}$と表わせば，計画全体としての総短縮費用$f_n(WR_{(n)})$は，各レベルの決定関数値，つまり短縮費用の総和として求められる．すなわち，

$$f_n(WR_{(n)}) = f_n(r^1,\ r^2,\ \cdots,\ r^m)$$

$$= \sum_{e=1}^{n} g_e(r^1{}_e,\ r^2{}_e,\ \cdots,\ r^m{}_e)$$

と表わすことができ，問題はこれを最小にすることである．また，このときの条件は，

$$r^k{}_1, r^k{}_2, \cdots, r^k{}_n \geqq 0,\qquad \sum_{e=1}^{n} r^k{}_e = r^k$$

$$(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

となる．いま，上の目的関数における１からｎまでの各レベルは，フィードバックのないシステムとして捉えることができるカットネットワークより設定されているので，ＤＰの基本原理である最適性の原理により，

$$f_1(r^1,\ r^2,\ \cdots,\ r^m) = g_1(r^1,\ r^2,\ \cdots,\ r^m)$$

$$f_n(r^1,\ r^2,\ \cdots,\ r^m)$$

$$= \min_{0 \leqq r^k{}_n \leqq r^k (k=1,2,\cdots,m)} \{ g_n(r^1{}_n, r^2{}_n, \cdots, r^m{}_n)$$

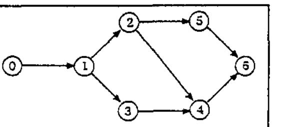
$$+ f_{n-1}(r^1 - r^1{}_n,\ r^2 - r^2{}_n,\ \cdots,\ r^m - r^m{}_n) \}$$

のような繰返しの関数方程式として定式化することができる．

４．例題ネットワークを用いた適用計算

（１）線形費用関数の場合

ここでは，**図－４**のような例題ネットワークを用いて，本稿で提案したスケジューリングモデルの適用計算を試みることとする．なお，この適用計算においては，本スケジューリングモデルより算出される解の最適性を検証するために，３日，７日，11日短縮のケースについての数値演算結果を以下のように算出するとともに，従来型のＣＰＭ手法による短縮計画を図－５のように算出した．



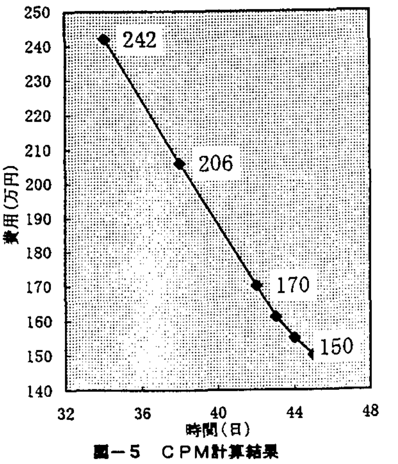
ｉ	ｊ	D_{ij}（日）	d_{ij}（日）	c_{ij}（万円/日）
0	1	5	5	
1	2	10	8	6
	3	5	3	4
2	4	10	3	5
	5	8	4	4
3	4	14	7	3
4	6	20	10	5
5	6	21	17	4
6				

D_{ij}：標準所要時間
d_{ij}：特急所要時間
c_{ij}：費用勾配

図－４　例題ネットワーク（線形費用関数）

・45日→42日（３日短縮）の場合

f 6 (2, 3, 2)=g 1 (1, 2, 2)+g 2 (0, 0, 0)+g 3 (0, 0, 0)
+g 4 (0, 0, 0)+g 5 (1, 1, 0)+g 6 (0, 0, 0)=20(万円)



図－５　ＣＰＭ計算結果

・45日→38日（7日短縮）の場合

f 6 (6, 7, 6)=g 1 (0, 5, 5)+g 2 (0, 0, 1)+g 3 (0, 0, 0)

+g 4 (4, 0, 0)+g 5 (2, 2, 0)+g 6 (0, 0, 0)=56(万円)

・45日→34日（11日短縮）の場合

f 6 (10, 11, 10)=g 1 (4, 9, 9)+g 2 (0, 0, 1)+g 3 (0, 0, 0)

+g 4 (4, 0, 0)+g 5 (2, 2, 0)+g 6 (0, 0, 0)=92(万円)

以上の結果から両者の解の同一性が確認できたため，本スケジューリングモデルの計算精度の高さが実証できたものと考える．

（2）非線形・離散型費用関数の場合

さらに，ここでは費用曲線が一般形で与えられているような作業を含む，すなわちＣＰＭ手法では取り扱いが困難な問題に対しても同様に，モデル理論の最適性を検証する．すなわち，図－６のような例題ネットワークを用いて，４日，５日，６日短縮のための本スケジューリングモデルの適用計算を実施することとした．その演算結果については以下のとおりである．

・50日→46日（４日短縮の場合）

f5 (1, 4, 2, 3)=g 1 (1, 1, 0, 3)+g 2 (0, 1, 0, 0)

+g 3 (0, 0, 0, 0)+g 4 (0, 2, 2, 0)

+g 5 (0, 0, 0, 0)=265(万円)

・50日→45日（５日短縮の場合）

f5 (2, 5, 3, 4)=g 1 (0, 0, 0, 0)+g 2 (0, 0, 1, 1)

+g 3 (0, 3, 2, 0)+g 4 (0, 0, 0, 1)

+g 5 (2, 2, 0, 2)=385(万円)

・50日→44日（６日短縮の場合）

f5 (3, 6, 4, 5)=g 1 (1, 1, 1, 1)+g 2 (0, 3, 3, 1)

+g 3 (0, 0, 0, 1)+g 4 (0, 0, 0, 1)

+g 5 (2, 2, 0, 1)=545(万円)

なお，図－７には上記３ケース短縮におけるすべての実行可能解の探索結果を示しておいた．

これらの結果より，本スケジューリングモデルの最適性が，各作業の費用曲線が一般形で与えられているような場合に関しても実証されたといえよう．

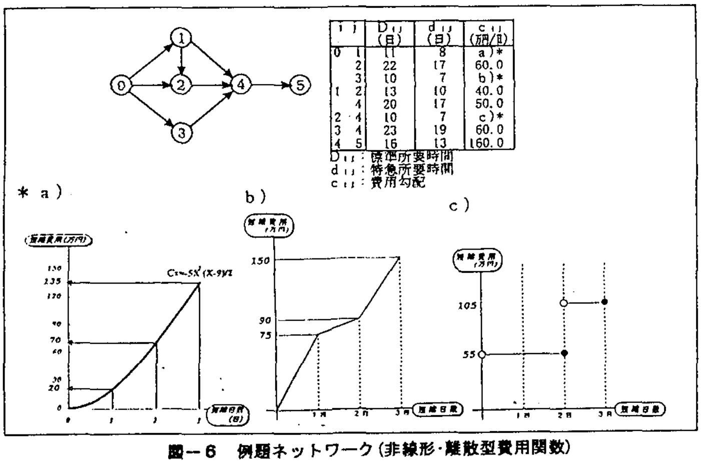
5．おわりに

本研究において新たに開発した最適ネットワークスケジューリングモデルは，これまでＣＰＭの適用が困難であった一般形の費用関数が与えられる条件下でも対応可能な理論となっている．また，本研究が，過去に開発した既発表のモデルにおける課題をも補完した形でモデリングされているので，一応の完成域に到達したものと考えることができる．

さらに本研究では，このネットワーク構造特性にもとづくスケジューリング理論は，近似解法しか手法化されていない資源配分問題へも応用可能な理論と考えており，現在その最適解法開発の目処もある程度たってきた段階である．これらの内容については，今後，具体的成果が得られ次第逐次報告していきたいと考えている．

参考文献

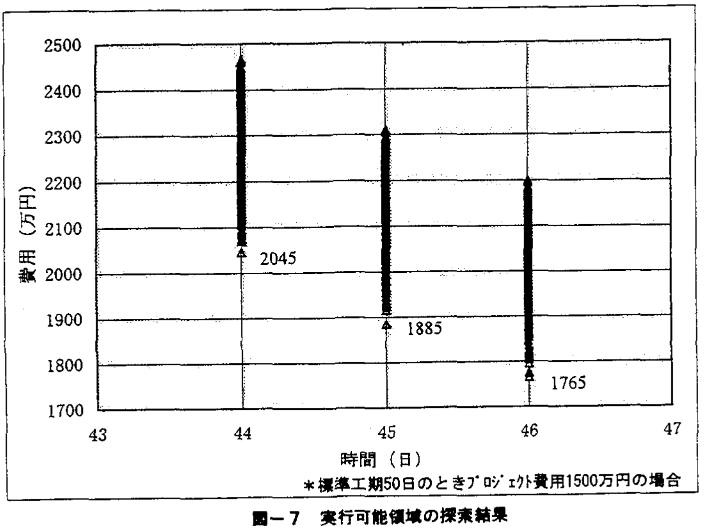
1)春名攻，原田満，荒川和久；ネットワークトポロジー理論を用いた工程計画のための日程短縮モデルに関する研究，土木学会土木計画学・研究論文集，1992，11.



i	j	D_{ij} (日)	d_{ij} (日)	c_{ij} (万円/日)
0	1	11	8	a)*
	2	22	17	60.0
	3	10	7	b)*
1	2	13	10	40.0
	4	20	17	50.0
2	4	10	7	c)*
3	4	23	19	60.0
4	5	16	13	160.0

D_{ij}：標準所要時間
d_{ij}：特急所要時間
c_{ij}：費用勾配

図－６　例題ネットワーク(非線形・離散型費用関数)



図－７　実行可能領域の探索結果