【土木計画学研究・講演集 No.18(2) 1995年12月】

経路を限定しない確率的利用者均衡配分*

Stochastic User Equiriblium Assingment without Path Restriction

赤松隆** 牧野幸雄***

By Takashi AKAMATSU and Yukio MAKINO

1．はじめに

LOGIT 型の確率的配分を行うための代表的な方法に Dial[6]のアルゴリズムがある．このアルゴリズムは一般ネットワークでも経路を列挙する必要がないという利点を有する．しかし，配分対象経路を"*Efficient Path*" と呼ばれる経路のみに限定しているため，しばしば非現実的な結果を出力する（eg.現実に多くの交通量が流れているリンクに交通量が全く配分されない）ことが指摘されてきた．

そこで本研究では，配分対象経路を限定しない LOGIT 型の確率的利用者均衡配分モデルを提案し，その解法を開発する．本稿の構成は以下の通りである．まず，次節で，そのモデルの定式化を示す．3 節では，経路を限定しない LOGIT 型の確率的配分モデルと佐々木[11]の"Markov 連鎖配分"との関係を明らかにする．最後に，経路を限定しない確率的利用者均衡配分モデルの厳密解計算法が示される．

2．経路を限定しない確率的利用者均衡配分

本研究では，経路を全く限定しない LOGIT 型の確率的利用者均衡配分を考える．ここで，"経路を全く限定しない"とは，cycle を含むすべての可能な経路を配分対象とすることを意味する．

以下に，経路を限定しない LOGIT 型の確率的利用者均衡配分の定式化を示す．

まず，リンク交通量と経路交通量の関係は，経路集合に cycle が含まれている場合，通常（simple path のみが経路集合の場合）とやや異なってくる．すなわち，リンク ij の交通量は，

$$x_{ij}=\sum_{od}\sum_{r}f_r^{od}\delta_{r,ij}^{od,n} \quad \forall ij \tag{2.1}$$

で与えられる．ここで f_r^{od} ：OD ペア od の r 番目経路の交通量，$\delta_{r,ij}^{od,n}$ ：*OD ペア od の r 番目経路がリンク ij を n 回使用するなら n，そうでなければ 0.*

同様に，経路コストとリンク・コストの関係も，通常とはやや異なり，以下のように定義される：

$$C_r^{od}=\sum_{ij}t_{ij}\delta_{r,ij}^{od,n} \quad \forall r\in R_{od},\forall od \tag{2.2}$$

ここで，C_r^{od} : OD ペア od の r 番目経路の交通コスト，t_{ij} ：リンク ij のコスト．つまり，ある経路がリンク ij を n 回通過する場合，その経路コストの計算では t_{ij} が n 回カウントされる．

また，利用者の経路選択行動は，以下のような LOGIT モデルで表現されるものとする：

$$P_r^{od}=\frac{\exp(-\theta C_r^{od})}{\sum_{r\in R_{od}}\exp(-\theta C_r^{od})} \quad \forall r\in R_{od},\forall od \tag{2.3}$$

ここで，R_{od} : OD ペア od の cycle を含む全ての可能な経路の集合，P_r^{od} ：OD ペア od の r 番目経路の選択確率，θ : 確率的誤差項の分散パラメータ．

本稿で示すモデルでは，簡単のため，OD 交通量 q_{od} は外性的に与えられるものとする．このとき，経路交通量の期待値は，

$$f_r^{od}=q_{od}P_r^{od}(\mathbf{C}(\mathbf{t})) \quad \forall r\in R_{od},\forall od \tag{2.4}$$

で与えられる．

最後に，リンク ij のコストは，そのリンクの交通量に関して単調増加なリンク性能関数で与えられるものとする：

$$t_{ij}=t_{ij}(x_{ij}) \quad \forall ij \tag{2.5}$$

---

* Keywords: 配分交通，経路選択，ネットワーク交通流
** 正会員 工博 豊橋技術科学大学知識情報工学系
(〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1
E-mail: akamatsu@tutkie.tut.ac.jp)
*** 学生会員 豊橋技術科学大学知識情報工学専攻

以上の定式化は，基本的には，従来の確率的均衡配分とほぼ同じである．従来のモデルとの決定的な違いは，選択確率式(2. 3)における経路集合の定義および，式(2. 1), (2. 2)におけるリンク経路接続行列の定義のみである．

3．マルコフ連鎖モデルと LOGIT モデル

本節では，LOGIT 型の確率配分モデルにはマルコフ的な性質があることに着目し，佐々木のマルコフ連鎖配分モデル[11] (以下 MCA: Markov Chain Assignment; と呼ぶ）と LOGIT モデルの関連性を調べる．そして，その結果を用いれば，経路を限定しない LOGIT 型の確率的配分が，簡単な行列演算に帰着できることを示す．

(1) 佐々木のマルコフ連鎖配分モデル

g 個の起点，a 個の終点を含む n 個のノードからなる交通ネットワークを考えよう．MCA では，各ノードがマルコフ連鎖における“状態” に対応し，車は，始点からマルコフ連鎖則に従って分岐を繰返し，終点に到着すると確率 1 で吸収されると考える．

いま，以下の形式の推移確率行列：

$$\mathbf{P}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & n-a \end{array} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{array}{l} a \\ n-a \end{array} \end{array} \tag{3. 1}$$

が与えられているとし，終点を除くノード集合間の推移確率を表す$\mathbf{Q}$を以下のように表す．

$$\mathbf{Q}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} g & n-g-a \end{array} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} g \\ n-g-a \end{array} \end{array} \tag{3. 2}$$

マルコフ連鎖では，最初の時点で状態 i にいた車が，n 回の状態遷移後に状態 j にいる確率は，$\mathbf{Q}^n$ の (i,j) 要素として与えられる．一方，各ノードに到達する車は，1 回の状態遷移 2 回の状態遷移 ... 等の様々な状態遷移経路を経た場合がある．従って，起点から発生した車が各ノードにいる確率は以下の逆行列により与えられる．

$$\mathbf{I}+\mathbf{Q}^1+\mathbf{Q}^2+\cdots+\mathbf{Q}^n+\cdots=\left[\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Q}_1\left[\mathbf{I}-\mathbf{Q}_2\right]^{-1} \\ \mathbf{0} & \left[\mathbf{I}-\mathbf{Q}_2\right]^{-1} \end{bmatrix} \begin{array}{l} g \\ n-g-a \end{array} \tag{3. 3}$$

ただし，推移確率行列$\mathbf{Q}$は，行列級数が収束するための条件：Hawkins-Simon 条件[12] を満たしているものと仮定する．ここで，$\mathbf{Q}_1[\mathbf{I}-\mathbf{Q}_2]^{-1}$の各行は起点別ノード選択率ベクトルである．ノード i の選択率 $P(i)$ が計算されれば，それに$\mathbf{Q}$の要素として与えられているノード i から j への推移確率 $p(j\,|\,i)$ を掛けることでリンク ij の選択率 p_{ij} が得られる：

$$p_{ij}=P(i)\cdot p(j\,|\,i) \tag{3. 4}$$

以上のような簡単な計算によって，MCA による配分計算（リンク・フローの算出）は完了である．

(2) LOGIT モデルと整合的な推移確率

MCA では，推移確率は観測交通量等から推計されることが前提となっている．そのため，従来，MCA には利用者の行動論的根拠は無いものと考えられてきた．しかし，推移確率を以下の式で与えれば，MCA によるフローパターンは，LOGIT 型確率配分モデルと等価になる：

$$p(j\,|\,i)=\exp[-\theta\, t_{ij}]\frac{V_{jd}}{V_{id}} \tag{3. 5}$$

ここで $V_{id}=\sum_{r=1}^{\infty}\exp[-\theta\, C_r^{od}]$. (3. 6)

式(3. 5) による推移確率が LOGIT 型確率配分モデルと整合的であることは，このときの MCA による経路選択率が，

$$P_r^{od}=\prod_{ij}p(j\,|\,i)^{\delta_{ij,r}^{od,n}} \tag{3. 7}$$

$$=\exp[-\theta\sum_{ij}t_{ij}\,\delta_{ij,r}^{od,n}]\exp[\sum_{ij}(\ln\frac{V_{jd}}{V_{id}})\,\delta_{ij,r}^{od,n}]$$

$$=\exp[-\theta\, C_r^{od}]\Big/\sum_{r=1}^{\infty}\exp[-\theta\, C_r^{od}]$$

となることから容易に確認できる．

なお，式(3. 5)の推移確率は，“前向き”(図 1)に定義されており，多起点・1 終点の OD パターンに対して成立する．これに対して，推移確率を図 2 の様に“後ろ向き” に定義することも可能である（詳細については[1]を参照）．

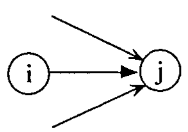

図 1 前向き推移確率

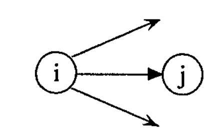

図 2 後向き推移確率

(3) 経路を限定しないLOGIT型配分の計算法

式(3.5)で定義された条件付き確率を計算するためには，式(3.7)で定義されたV_{ij}を要素とする行列$\mathbf{V}$の値を評価する必要がある．しかし，$\mathbf{V}$はcycleを含めた無限個の経路を考慮した定義となっているため，経路を列挙するような直接的な方法では評価できない．そこで，以下では，$\mathbf{V}$の値をMCAに類似した行列演算によって評価する方法を示す．

まず，以下のようなi行j列要素をもつ重み行列$\mathbf{W}$を定義する：

$$w_{ij}=\begin{cases}\exp[-\theta t_{ij}] & \text{ノード}i\cdot j\text{間にリンクが存在}\\ 0 & \text{その他}\end{cases} \quad (3.8)$$

この行列の定義から，そのべき乗$\mathbf{W}^n$は，以下のようなi行j列要素$w_{ij}^{[n]}$をもつことが理解できる：

$$w_{ij}^{[n]}=\sum_{r\in R_n^{ij}}\exp[-\theta C_{r,n}^{ij}] \quad (3.9)$$

ここで，R_n^{ij}はn本のリンクを通過してノードiとjを結ぶ経路の集合，$C_{r,n}^{ij}$はR_n^{ij}に属するr番目の経路のコストを意味する．

一方，$\mathbf{V}$の要素は，各種経路についての和演算をもとに定義されているが，この演算は，リンクを1本通過する経路 2本通過する経路... n本通過する経路...と分割した後に重ね合わせて考えることができる．従って，$\mathbf{V}$は$\mathbf{W}+\mathbf{W}^2+\mathbf{W}^3+\ldots$によって与えられる．ここで，行列$\mathbf{W}$がHawkins-Simon条件を満足していると仮定すると，$\mathbf{W}$の行列級数の和は以下の逆行列：

$$\mathbf{I}+\mathbf{W}+\mathbf{W}^2+\mathbf{W}^3+\ldots=[\mathbf{I}-\mathbf{W}]^{-1} \quad (3.10)$$

に収束する．従って，$\mathbf{V}$は

$$\mathbf{V}=[\mathbf{I}-\mathbf{W}]^{-1}-\mathbf{I} \quad (3.11)$$

で与えられることがわかる．

以上の議論より，LOGIT型の確率的配分の解を得るための手順は，以下のようにまとめられる：

Step 1: 推移確率$\mathbf{Q}$を計算

a) 式 (3.11) の逆行列計算により$\mathbf{V}$の値を計算

b) $\mathbf{V}$の値を式 (3.5) に代入して$\mathbf{Q}$を計算

Step 2: Markov配分式によりリンク選択率を計算

a) 式(3.3)の計算によりノード選択率$\boldsymbol{P}$を計算

b) $\boldsymbol{P}$と$\mathbf{Q}$の値を式(3.4)に代入してリンク選択率を計算

この手順全体では，*Step 1*と*2*の各々で2種類の逆行列計算；$[\mathbf{I}-\mathbf{W}]^{-1}$と$[\mathbf{I}-\mathbf{Q}_2]^{-1}$が必要である．しかし，以下のように考えれば，*Step 2*の逆行列計算は単純な計算に帰着し，逆行列計算は*Step 1*のみで必要となることがわかる．

多起点・1終点のODペア(Many to One OD patterns)ごとに問題を分解して考える．行列$\mathbf{W}$の要素を起点・終点・その他ノードに分割し，

$$\mathbf{W}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc}1 & g & n-g-1\end{array}\\ \begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{W}_{d1} & \mathbf{0} & \mathbf{W}_1\\ \mathbf{W}_{d2} & \mathbf{0} & \mathbf{W}_2\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}1\\ g\\ n-g-1\end{array} \quad (3.12)$$

と書くと，$[\mathbf{I}-\mathbf{W}]^{-1}$は以下のように表現できる．

$$[\mathbf{I}-\mathbf{W}]^{-1}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc}1 & g & n-g-1\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \mathbf{V}_{d1} & \mathbf{I} & \mathbf{V}_1\\ \mathbf{V}_{d2} & \mathbf{0} & \mathbf{V}_2\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}1\\ g\\ n-g-1\end{array} \quad (3.13)$$

ここで，

$$\mathbf{V}_{d1}=\mathbf{W}_{d1}+\mathbf{W}_1\,[\mathbf{I}-\mathbf{W}_2]^{-1}\mathbf{W}_{d2} \quad (3.14a)$$

$$\mathbf{V}_{d2}=[\mathbf{I}-\mathbf{W}_2]^{-1}\mathbf{W}_{d2} \quad (3.14b)$$

$$\mathbf{V}_1=\mathbf{W}_1[\mathbf{I}-\mathbf{W}_2]^{-1} \quad (3.14c)$$

$$\mathbf{V}_2=[\mathbf{I}-\mathbf{W}_2]^{-1} \quad (3.14d)$$

LOGITモデルと整合的な条件付き確率（推移確率）は，式(3.5)で与えられ，行列表示すれば，

$$\mathbf{Q}_1=\overline{\mathbf{V}}_{d1}^{-1}\,\mathbf{W}_1\,\overline{\mathbf{V}}_{d2} \quad (3.15a)$$

$$\mathbf{Q}_2=\overline{\mathbf{V}}_{d2}^{-1}\,\mathbf{W}_2\,\overline{\mathbf{V}}_{d2} \quad (3.15b)$$

従って，MCAによる式(3.3)にこれらを代入して，

$$\mathbf{Q}_1\,[\mathbf{I}-\mathbf{Q}_2]^{-1}=\overline{\mathbf{V}}_{d1}^{-1}\,\mathbf{W}_1\,\overline{\mathbf{V}}_{d2}\,[\mathbf{I}-\overline{\mathbf{V}}_{d2}^{-1}\,\mathbf{W}_2\,\overline{\mathbf{V}}_{d2}]^{-1}$$
$$=\overline{\mathbf{V}}_{d1}^{-1}\,\mathbf{V}_1\,\overline{\mathbf{V}}_{d2}.$$

この式の典型的な要素は，

$$P(i)^{od}=V_{oi}V_{id}/V_{od} \quad (3.16)$$

である．従って，リンク選択率は，以下のような簡単な式で求められる：

$$p_{ij}^{od}=p(j|i)\;V_{oi}\;V_{id}/\;V_{od}=V_{oi}\,w_{ij}\;V_{jd}/\;V_{od}$$

なお，この式はVan Vliet [13]が，Dialのアルゴリズムにおいてノード間の選択率を求めるために導いた式と全く同一の形式となっている．

以上では説明の便宜上，明示的な逆行列表記を用いた．実際の数値実験ではそのような直接的な方法は，膨大な記憶容量を必要とし，実際的ではないため，式（3.14）に対応する線形連立方程式をPCG法やSOR法などで解くこととなる．その場合，必要とされる記憶容量は，リンク数のオーダーで済む．

4．確率的均衡配分の厳密解計算法

(1) 等価な最適化問題

経路を限定しないLOGIT型の確率的配分は，以下の様な数理計画問題[SA-arc]と等価である（証明は[2]を参照）：

$$\min. Z(\mathbf{x}) = \sum_{ij} t_{ij} x_{ij} - \frac{1}{\theta} \sum_{o} \{-HN(\mathbf{x^o}) + HL(\mathbf{x^o})\} \quad (4.1)$$

subject to

$$\sum_i x_{ij}^o - \sum_j x_{kj}^o + q_{od}\delta_{o,k} - \sum_d q_{od}\delta_{d,k} = 0 \quad \forall o, \forall k \quad (4.2)$$

$$x_{ij} = \sum_o x_{ij}^o \quad \forall ij, \quad x_{ij}^o \geq 0 \quad \forall o, \forall ij \quad (4.3,\ 4.4)$$

ここで $HL(\mathbf{x}^o) = -\sum_{ij} x_{ij}^o \ln x_{ij}^o$,

$$HN(\mathbf{x}^o) = -\sum_j (\sum_i x_{ij}^o) \ln(\sum_i x_{ij}^o).$$

さらに，flow dependent な場合（i.e. 確率的均衡配分）は以下の問題[SUE-arc]と等価である[2]：

$$\min. Z(\mathbf{x}) = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega) d\omega - \frac{1}{\theta} \sum_o \{-HN(\mathbf{x^o}) + HL(\mathbf{x^o})\}$$

subject to (4.2), (4.3) and (4.4).

(2) アルゴリズム

等価最適化問題[SUE-arc]は経路変数を含まない標準的なnetwork programming形式の問題である．従って，射影 Newton 法[7,8]等を適用することによって効率的に解くことができるだろう．しかし，LOGIT 型の確率的配分モデルの性質を生かした，より簡単で効率的なアルゴリズムを開発することも可能である．そのために，部分線形化法[9]を用いる．この方法のアウトラインは，Frank-Wolfe法と同じであり，異なるのは許容降下方向を求めるために解く補助問題のみである． 部分線形化法では，もとの目的関数を部分的に線形近似した補助問題を解く．［SUE-arc］にこの方法を適用する場合，目的関数第一項を線形近似した補助問題を考えれば，それは，［SA-arc］と同一形式の問題となる．従って，補助問題は，第３節で示したマルコフ配分法で効率的に解くことができることがわかる．

この方法は，従来提案されている確率的均衡配分のための逐次平均法[10]とは異なり，必ず厳密解に収束する（逐次平均法ではDialのアルゴリズムにより降下方向を求めているため，各繰返しで，配分対象経路の“switching”現象が生じ，収束が保証されない）．なぜなら，マルコフ配分ではコスト・パターンにかかわらず配分対象経路は一定であり，アルゴリズム写像の連続性が保証されるからである．

5．おわりに

本稿では，経路を限定しない確率的利用者均衡配分について考察し，その厳密解法を示した．より効率的な方法[3,5]への拡張や数値実験結果等については，誌面の制約のため述べられなかったが，発表会において報告する予定である．

参考文献

[1] T.Akamatsu, “Cyclic Flows, Markov Process and Transportation Stochastic Assignment”, to appear in *Transportation Research Part B*, 1995.

[2] T.Akamatsu, “Decomposition of Path Choice Entropy in General Transport Networks”, to appear in *Transportation Science*, 1995.

[3] Y.Arezki and D. Van Vliet, “A Full Analytical Implementation of the PARTAN / Frank-Wolfe Algorithm for Equilibrium Assignment”, *Transportation Science* 24, 58-62, 1990.

[4] M.G.H.Bell, “Alternatives to Dial’s LOGIT Assignment Algorithm”, to appear in *Transportation Research Part B*, 1995.

[5] R.S.Dembo and U.Tulowitzki, “Computing Equilibria on Large Multicommodity Networks: Application of Truncated Quadratic Programming Algorithms”, *Networks* 18, 273-284, 1988.

[6] R.B.Dial, “A Probabilistic Multipath Traffic Assignment Algorithm Which Obviates Path Enumeration”, *Trnspn.Res.* 5, 83-111, 1971.

[7] R.Katsura, M.Fukushima and T.Ibaraki, “Interior Methods for Nonlinear Minimum Cost Network Flow Problems”, *J. of the Operations Research Society of Japan* 32, 174-199, 1989.

[8] J.G.Klincewicz, “A Newton Method for Convex Separable Network Flow Problems”, *Networks* 13, 427-442, 1983.

[9] M.Patricksson, “Partial Linearlization Methods in Nonlinear Programming”, *J. of Optimization Theory and Applications* 78, 227-246, 1993.

[10] W.Powell and Y.Sheffi, “The Convergence of Equilibrium Algorithm with Predtermined Step Sizes”, *Trnspn.Sci.* 16, 45-55, 1982.

[11] 佐々木綱，“吸収マルコフ過程による交通量配分理論”，土木学会論文集 No.121, 28-32, 1965.

[12] A.Takayama, *Mathematical Economics*, Cambridge University Press, New York, 1985.

[13] D.Van Vliet, “Selected Node-Pair Analysis in Dial’s Assignment Algorithm”, *Trnspn.Res.* 15B, 65-68, 1981.