【土木計画学研究・講演集 No.18(2) 1995年12月】

Nested LOGIT型交通・立地統合均衡モデルの厳密解法*

Algorithms for Solving Nested LOGIT type Combined Residential-Location and Transportation Network Equilibrium Models

赤松　隆** ・半田正樹***

by Takashi AKAMATSU and Masaki HANDA

1．はじめに

交通と立地の相互作用を扱う交通・立地統合モデルは従来から数多く研究されてきた．その結果，多くの理論的進展がなされ，静的なモデルについては，経済理論の観点から合理的といえるモデリング技術がほぼ確立したといえる．そのような最近の合理的なモデリング方法に基づいた統合均衡モデルでは，内生化する変数に関連する全ての主体の選択行動をランダム効用モデルによって記述し，モデル全体の理論的整合性・一貫性を保つことが意図されている．

しかし，それらの多くの統合モデルでは交通配分サブ・モデルだけは*確定的* 均衡や flow independent なモデルが用いられている．すなわち，交通配分段階まで含めてランダム効用理論と完全に整合的な統合均衡モデルは，ほとんど見当たらない．その理由の一つは，確率均衡配分を含む統合モデルは解法の開発が困難と考えられていたためであろう．

本研究は，最近明らかにされた確率均衡配分の特性を利用すれば，完全にランダム効用理論と整合的な統合モデルも容易に解けることを示すものである．より具体的には， Nested LOGIT 型ランダム効用モデルに基づいた交通統合均衡モデルおよび交通・立地統合均衡モデルの厳密解法を示すことを本稿の目的とする．なお，立地・交通統合均衡モデルは，企業立地，雇用人口，賃金等を内生化した一般均衡モデルへの拡張も可能である[2]．しかし，本稿では*確率均衡型の統合モデルの厳密解法を明確に示すことに重点を置くため*，モデル構造を理解しやすい限定的な住宅立地・交通統合モデルのみを扱い，一般均衡モデル等の拡張モデルに関する議論は割愛する．

---

* Keywords:　住宅立地，発生・分布・配分交通
** 正会員 工博　豊橋技術科学大学　知識情報工学系
(〒441　豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1
E-mail:akamatsu@tutkie.tut.ac.jp)
*** 学生会員　豊橋技術科学大学　知識情報工学専攻

2．Nested LOGIT 型の確率的交通ネットワーク均衡モデル

本節では，Nested LOGIT 型の(需要変動型)確率的交通ネットワーク均衡モデルの解法について考察する．なお，本節で示すモデルは，[1] で示されたものと基本的に同じである（モデルの詳細は[1]を参照）．

(1) 定式化

交通ネットワーク利用者の選択行動が，上位階層を目的地選択，下位階層を経路選択とする Nested LOGIT モデルによって表現されるとする．ここで，目的地選択における効用は "ODペア固有の効用－移動コスト", 経路選択における効用は "－経路コスト" で表されると仮定すると，目的地および経路の選択確率は，それぞれ以下の式で与えられる．

$$P(r|d,o)=\frac{\exp[-\theta\, C_r^{od}]}{\sum_r \exp[-\theta\, C_r^{od}]}\quad \forall r,od \tag{1}$$

$$P(d|o)=\frac{\exp[\zeta(V_{od}-S_{od})]}{\sum_d \exp[\zeta(V_{od}-S_{od})]}\quad \forall od \tag{2}$$

ここで $P(r|d,o)$:経路 r の選択確率， $P(d|o)$:目的地 d の選択確率， C_r^{od} ：ODペア od の経路 r の交通コスト， V_{od} :ODペア固有の効用（魅力度）， $S_{od}(\mathbf{C}^{od})$:ODペア od の期待最小費用， θ,ζ :選択の分散を示すパラメータである．

このとき，発生交通量 O_o を所与とした際のOD交通量の期待値および経路交通量の期待値は，

$$q_{od}=O_oP(d|o)\quad \forall od \tag{3}$$

$$f_r^{od}=q_{od}P(r|d,o)\quad \forall r,od \tag{4}$$

となる．ここで， q_{od} はODペア od の交通量期待値， f_r^{od} はODペア od の経路 r の交通量期待値である．また，リンク変数と経路変数の間には以下の関係が成立する：

$$x_{ij} = \sum_r f_r^{od} \delta_{ij,r}^{od} \tag{5}$$

$$C_r^{od} = \sum_{ij} t_{ij} \delta_{ij,r}^{od} \tag{6}$$

ここで，x_{ij}はリンクijの交通量，$\delta_{ij,r}^{od}$はリンク－経路接続行列（リンクijがODペアodの経路r上にあるなら1,そうでなければ0）．

なお，リンクコストt_{ij}は交通量の単調増加関数：

$$t_{ij} = t_{ij}(x_{ij}) \tag{7}$$

で決定されるものとする．以上の関係式(1)～(7)を同時に満たした状態を Nested LOGIT 型の交通ネットワーク均衡モデル(NL-TNEモデル)と呼ぶ．

(2) 等価な最適化問題

従来の研究[1, 2]により，NL-TNEモデルは以下のような数理計画問題[NL-TNE-Path]と等価であることが知られている：

$$\min. Z_1 \equiv ZV(\mathbf{x},\mathbf{q}) - ZH_f(\mathbf{f},\mathbf{q}) - ZH_q(\mathbf{q}) \tag{8}$$

subject to

$$O_o = \sum_d q_{od} \quad \forall o \tag{9}$$

$$q_{od} = \sum_r f_r^{od} \quad \forall od \tag{10}$$

$$f_r^{od} \geq 0 \qquad \forall r, od \tag{11}$$

where

$$ZV(\mathbf{x},\mathbf{q}) \equiv \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega) d\omega - \sum_{od} q_{od} V_{od} \tag{12}$$

$$ZH_f(\mathbf{f},\mathbf{q}) \equiv -\frac{1}{\theta} \sum_{od} \sum_r f_r^{od} \ln(f_r^{od} / q_{od}) \tag{13}$$

$$ZH_q(\mathbf{q}) \equiv -\frac{1}{\zeta} \sum_o \sum_d q_{od} \ln(q_{od} / O_o) \tag{14}$$

この問題は経路変数を含んでいるため，実際規模のネットワークでは，そのままの形式で扱うことは困難である．しかし，固定需要型の確率的均衡配分の場合[4]と全く同様にして，経路変数をリンク変数に分解した問題を考えることができる．すなわち，[NL-TNE-Path]は，起点別リンクフロー$\{x_{ij}^o\}$で表現された以下の問題[NL-TNE-Arc]と等価である：

$$\min. Z_2 \equiv ZV(\mathbf{x},\mathbf{q}) - ZH_x(\mathbf{x}) - ZH_q(\mathbf{q}) \tag{15}$$

subject to

$$\sum_i x^o - \sum_j x^o + \sum_d q_{od}\delta_{ok} - q_{od}\delta_{dk} = 0 \quad \forall k, o, d \tag{16}$$

$$x_{ij} = \sum_o x_{ij}^o \quad \forall ij, \qquad x_{ij}^o \geq 0 \quad \forall ij, o \tag{17,18}$$

and (9),

where

$$ZH_x(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\theta} \sum_o \{HL(\mathbf{x}^o) - HN(\mathbf{x}^o)\} \tag{19a}$$

$$HL(\mathbf{x}^o) \equiv -\sum_{ij} x_{ij}^o \ln x_{ij}^o \tag{19b}$$

$$HN(\mathbf{x}^o) \equiv -\sum_j (\sum_i x_{ij}^o) \ln(\sum_i x_{ij}^o) \tag{19c}$$

この数理計画問題と NL-TNE モデルの等価性の証明は，固定需要型の確率的均衡配分の場合の証明[4]とほぼ同様であるので，ここでは省略する．

(3) アルゴリズム

数理計画問題[NL-TNE-Arc]は，一般ネットワークでの取り扱いが困難な経路変数を含んでいないため，標準的な network programming のための解法を応用して効率的に解くことができる．以下では，それらの中でも，計算手順が比較的単純でかつ効率的な部分線形化(Partial Linearization)法[9]を適用する場合を考えよう．部分線形化法のアウトラインは，Frank-Wolfe 法とほぼ同じであり，相違点は，降下方向ベクトルを決定するために解く補助問題のみである．Frank-Wolfe 法では，元の問題を線形近似した補助問題を考えるが，部分線形化法では，部分的に線形化された問題を考える．この方法は，非線形項を考慮するため Frank-Wolfe 法よりも収束が速く，また，補助問題が効率的に解けるなら，全体としても効率的であることは明らかである．

[NL-TNE-Arc]の場合，リンクコスト関数積分項のみを線形近似した補助問題を考える．すると，n回目 iteration における補助問題は，flow independent な Nested LOGIT 型確率配分モデルとなり，以下の手順で容易に解けることがわかる：

a) 期待最小費用$\mathbf{S}(\mathbf{C}(\mathbf{t}^n))$を計算する．

b) 式(2),(3)によりODフローを計算．

c) link cost $\mathbf{t}^n$およびb)で求められた OD flow を用いて LOGIT 型確率的配分を行う．

ここで，$\mathbf{t}^n \equiv \mathbf{t}(\mathbf{x}^n)$，$\mathbf{x}^n$はn回目 iteration で得られているリンク・フロー・ベクトルである．

a)で行う期待最小費用の評価には，entropy 関数との共役関係式[7, 1, 2]および経路選択 entropy の分解表現[1, 2, 4]を用いれば良い．この方法を用いれば経路の列挙を避けることができ，大規模ネットワークでも容易に計算可能となる．

ここで，注意すべき点はc) で行うLOGIT型確率的配分である．これは，Dialのアルゴリズムを用いて容易に計算できそうに見えるが，それでは必ずしも厳密解への収束は保証されない（実際，Dialのアルゴリズムを利用する逐次平均法[10]では振動を起こしてしまうことが報告されている）．その理由は以下のとおりである．Dialのアルゴリズムでは，*"efficient paths"* のみに配分対象経路が限定される．この*efficientpaths*は，リンク・コスト・パターンに応じて決まるため，くり返しのたびに配分対象経路が変化する． その結果，アルゴリズム写像の連続性(closedness) が保証されず，一般的にはその収束も保証されないのである．

この問題を回避するためには， Markov 連鎖によるアルゴリズム[3]を利用すればよい．この方法では，配分対象経路はリンク・コスト・パターンによらず一定であるため，収束が保証される． また，計算量もDialのアルゴリズムとほぼ同じ程度で済む．

3．Nested LOGIT型の立地・交通確率均衡モデル

本節では，前節のNL-TNEモデルの拡張とみなすことのできるNestedLOGIT型の立地・交通確率均衡モデルの解法について考察する． そのモデルは，基本的にはAnas[5]の住居立地・交通統合均衡モデルと同一である．ただし，[5]では，居住地および交通経路の２種類の選択行動がLOGIT モデルで同時選択として扱われており，やや不自然な構造となっている．そこで，本稿では，より自然なNestedLOGITモデルに修正した場合を扱う．

(1) 定式化

モデルは，a)消費者の居住地・交通経路選択行動，b)住宅供給者の選択行動， c)交通network条件；の各々を表現する３つのサブ・モデルから成る：

a）消費者の選択行動

消費者の勤務地は所与であるとし，居住地選択と勤務地－居住地間の交通経路選択の２種類の選択行動を考える．そして，第２節で示したNL-TNEモデルでの目的地が居住地に対応するものとする（出発地は所与の勤務地）．このとき， 居住地と経路の選択確率は各々，第２節の式(1),(2)で与えられ，ＯＤ交通量，経路交通量は各々，式(3),(4)で決定される．ただし，各居住地ゾーン内の住宅は均質であると仮定し，式(2)の中のＯＤペア固有の確定的効用V_{od}は，

$$V_{od} \equiv \overline{U}_{od} - \alpha\,\rho_d \tag{20}$$

で与えられるものとする．ここでρ_d：ゾーンdの家賃，α：家賃の限界不効用パラメータ， $\overline{U}_{od}$：ＯＤペアod固有の効用である．

b）住宅供給者の選択行動

住宅を供給する地主は，住宅を貸した場合の利益と空家のままにしておく場合の利益を比較して所有する住宅を貸し出すかどうかを選択する．その選択行動は，以下の二項LOGITモデルで表現されるものとする：

$$p_{dm} = \frac{\exp[\eta\,\pi_{dm}]}{\sum_{m=0}^{1}\exp[\eta\,\pi_{dm}]} \qquad m = 0\ or\ 1,\ \forall d \tag{21}$$

$$\pi_{d0} \equiv -c_{d0}\,,\ \ \pi_{d1} \equiv \beta\,\rho_d - c_{d1} \tag{22}$$

ここで，p_{dm}：住宅を空家にする(m=0) ／貸出す(m=1) 確率， π_{dm}： 空家にする(m=0) ／貸出す(m=1) 場合の確定的利益，c_{dm}：空家にする(m=0) ／貸出す(m=1) 場合の維持費用，β：家賃の限界収益率パラメータ，η：選択の分散パラメータ．従って，居住地ゾーンdに存在する総住宅数（所与の定数)をD_dとすれば， dにおける貸し出しパターンは

$$y_{dm} = D_d \cdot p_{dm} \qquad m = 0\ or\ 1,\ \forall d \tag{23}$$

により与えられる．ここで，y_{d0}:空家である住宅数，y_{d1}:貸し出されている住宅数である．

c）交通ネットワーク(交通供給条件)

交通ネットワークは第２節の設定と全く同じであるため，式(5)～(7) が成立している．

以上のa),b),c) の条件に加え，住宅需要と住宅供給が一致する条件：

$$y_{d1} = \sum_{o} q_{od} \qquad \forall d, \tag{24}$$

が満たされた状態が立地・交通統合均衡状態である．

(2) 等価な最適化問題

非線形連立方程式(1)～(7)および(20)～(24) として定式化された立地・交通統合均衡モデルは，以下の数理計画問題[NL-LTE]と等価である．

$$\min. Z_3 \equiv \{ZU(\mathbf{x},\mathbf{q}) - ZH_f(\mathbf{f},\mathbf{q}) - ZH_q(\mathbf{q})\}/\alpha + \{ZC(\mathbf{y}) - ZH_y(\mathbf{y})\}/\beta \tag{25}$$

subject to (9), (10), (11), (24)

$$D_d = y_{d0} + y_{d1} \ \forall d, \tag{26}$$

where

$$ZU(\mathbf{x},\mathbf{q}) \equiv \sum_{ij}\int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega)d\omega - \sum_{od} q_{od}\overline{U}_{od}, \tag{27}$$

$$ZC(\mathbf{y}) \equiv \sum_d \sum_{m=0}^{1} c_{dm} y_{dm}, \tag{28}$$

$$ZH_y(\mathbf{y}) \equiv -\frac{1}{\eta}\sum_d \sum_{m=0}^{1} y_{dm}\ln y_{dm} \tag{29}$$

上の定式化では，簡単のため経路交通量を用いた表現とした．その目的関数および制約条件式の経路変数は，第２節のモデルと全く同様にして，起点別リンク変数に置き換えられることはいうまでもない．

さて，問題[NL-LTE]は，flow 変数$(\mathbf{x},\mathbf{f},\mathbf{q},\mathbf{y})$のみを未知変数としており，均衡家賃等の price 変数は明示的に現れない．[NL-LTE]の最適化条件から明らかなように，それらは制約条件の Lagrange 乗数となっている．従って，price変数を求めたい場合には，以下の双対問題 [NL-LTE-Dual] を考えればよい：

$$\min. Z_4 \equiv \{ZT(\mathbf{t}) + ZO(\mathbf{t},\boldsymbol{\rho})\}/\alpha + ZD(\boldsymbol{\rho})/\beta \tag{30}$$

where
$$ZT(\mathbf{t}) \equiv \sum_{ij}\int_{t_{ij}(0)}^{t_{ij}} t_{ij}^{-1}(v)dv \tag{31}$$

$$ZO(\mathbf{t},\boldsymbol{\rho}) \equiv \sum_o O_o S_o^{(C)}(\mathbf{t},\boldsymbol{\rho}) \tag{32}$$

$$ZD(\boldsymbol{\rho}) \equiv \sum_d D_d S_d^{(H)}(\rho_d) \tag{33}$$

$$S_{od}(\mathbf{t}) \equiv -\frac{1}{\theta}\ln\sum_r \exp[-\theta\, C_r^{od}(\mathbf{t})] \tag{34}$$

$$S_o^{(C)}(\mathbf{t},\boldsymbol{\rho}) \equiv \frac{1}{\zeta}\ln\sum_d \exp[\zeta\{V_{od}(\rho_d) - S_{od}(\mathbf{t})\}] \tag{35}$$

$$S_d^{(H)}(\rho_d) \equiv \frac{1}{\eta}\ln\sum_{m=0}^{1}\exp[\eta\,\pi_{dm}(\rho_d)] \tag{36}$$

(3) アルゴリズム

[NL-LTE]は，第２節の場合と同様，部分線形化法で効率的に解くことができる．その場合の n 回目 iteration で解く補助問題は，[NL-LTE] においてリンクコストを$\mathbf{t}^n \equiv \mathbf{t}(\mathbf{x}^n)$に固定した形式の問題となる．これは，以下の手順で容易に解くことができる：

a) 部分線形化問題の双対問題：

$$\min. Z_5 \equiv ZO(\mathbf{t}^n,\boldsymbol{\rho})/\alpha + ZD(\boldsymbol{\rho})/\beta$$

を Newton 法で解き，家賃ベクトル$\boldsymbol{\rho}$を求める．

b) a)で求めた$\boldsymbol{\rho}$を式(1)-(6),(20)および式 (21)-(23)に代入しフロー・ベクトルを求める．

上の手順 a)では，まず，第２節のモデルと同様にして期待最小費用$S_{od}(\mathbf{t}^n)$を計算しておけば，特に困難な点のない単純な制約条件無し最適化問題となる．b) では，式(1)-(6),(20)は第２節と全く同様に計算できる．また，b) の結果は必ず許容解となっている．なぜなら，式(9)-(11),(26)は，選択確率式から明らかに満たされ，また，a) の双対問題で得られる最適家賃$\boldsymbol{\rho}$は，需給均衡式(24)を必ず満たすからである．

なお，主問題を解くのではなく，双対問題を最初から直接利用する方法も一考に値する．なぜなら，[NL-LTE-Dual]を解くなら，[NL-LTE]に比べ，計算に必要な記憶容量を大幅に減らすことができ，超大規模問題への適用可能性が高くなるからである．

４．おわりに

本稿では，紙面の制約から，アルゴリズムの詳細な議論，数値計算実験の結果等を示すことはできなかった．これらについては，発表会にて報告したい．

参考文献

[1] 赤松隆・松本嘉司,“需要変動を考慮した交通ネットワーク確率的利用者均衡モデルとその解法”, 土木学会論文集Ⅳ-10, pp.109-118, 1989.

[2] 赤松隆, *確率的均衡アプローチによる交通ネットワーク統合モデル*, 東京大学博士論文, 1990.

[3] T.Akamatsu, “ Cyclic Flows, Markov Process and Transportation Stochastic Assignment”, to appear in *Transportation Research Part B*, 1995.

[4] T. Akamatsu, “ Decomposition of Path Choice Entropy in General Transport Networks”, to appear in *Transportation Science*, 1995.

[5] A.Anas, “ The Combined Equilibrium of Travel Network and Residential Location Markets”, *Regional Science and Urban Economics* **15**, pp.1-21, 1985.

[6] M.Los and S.Nguyen, “ Solution Algorithms for a Combined Residential Location and Transportation Model”, *Environment and Planning* **A15**, pp.515-524, 1983.

[7] 宮城俊彦・加藤晃,“ランダム効用理論を基礎とした交通統合モデル”, 土木計画学研究・論文集, No.1, pp.99-106, 1985.

[8] T.Miyagi, “ A Combined Residential-Location and Transportation Network Equilibrium Model”, *Proc. of the 5 th WCTR*, pp.123-137, 1989.

[9] M.Patricksson, “ Partial Linearization Methods in Nonlinear Programming”, *Journal of Optimization Theory and Applications* **78**, pp.227-246, 1993.

[10] W.B.Powell and Y.Sheffi, “ The Convergence of Equilibrium Algorithms with Predtermined Step Sizes”, *Transportation Science* **16**, pp.45-55, 1982.

[11] A.G.Willson et al., *Optimization in Location and Transport Analysis*, John-Willey & Sons, 1981.