# 一般均衡型立地分析モデルにおけるパラメータ推定と将来予測に関する考察*

# A Study on the Parameter Estimation and Forecast Method of Location-Choice Model based on General Equilibrium

堤 盛人**
by Morito TSUTSUMI

## 1．はじめに

都市整備による諸影響の定量的分析手法の一つとして、ワルラス的な他市場同時均衡理論に基づく立地分析モデル[1) 2)]（以下、単に「一般均衡型モデル」と呼ぶ）が提案されており、いくつかの地域で適用されている。

この一般均衡型モデルは、経済学の最も基本的な概念である「一般均衡」をベースに組み立てられており、個々の需要関数・供給関数等にはなお工夫の余地が残されているものの、その理論的なフレームは極めて明解である。このモデルは、連立方程式体系として定式化された地域モデルであり、空間相互作用を内生変数を用いて表現している。奥村ら[3)]は、この種のモデルを連立型地域モデルと分類し、直接最小二乗法（OLS）を用いてモデルを推定した場合の問題点を明らかにしたうえで、新たな推定方法を提案している。

本研究も奥村と同じ問題意識に基づき、一般均衡型モデルのパラメータ推定について考察を行う。また、パラメータの有する分散が将来予測値の分散に与える影響についても併せて考察する。

## 2．一般均衡型立地分析モデルの定式化

以下、本稿では次式で表されるような一般均衡型モデルを扱う。

立地均衡

$$n_i = N \cdot \frac{\exp(\theta \cdot v_i(R_i))}{\sum_{i'} \exp(\theta \cdot v_{i'}(R_{i'}))} \quad \text{(for all } i\text{)} \qquad (1)$$

建物市場均衡

$$n_i(R_i) \cdot q_d(R_i) - Q_{si}(R_i, P_i) = 0 \quad \text{(for all } i\text{)} \qquad (2)$$

土地市場均衡

$$L_{di}(R_i, P_i) - L_{si}(P_i) = 0 \quad \text{(for all } i\text{)} \qquad (3)$$

$i, i'$：ゾーン番号 $(i, i' = 1, \cdots, m)$

$n_i$：ゾーン $i$ での立地量

$R_i$：　〃　建物地代

$P_i$：　〃　土地地代

$N$：全地域における総立地量

$v_i(R_i)$：ゾーン $i$ での立地余剰（立地魅力度）関数

$q_d(R_i)$：立地者１人当たりの建物床需要関数

$Q_{si}(R_i, P_i)$：ゾーン $i$ での建物床供給関数

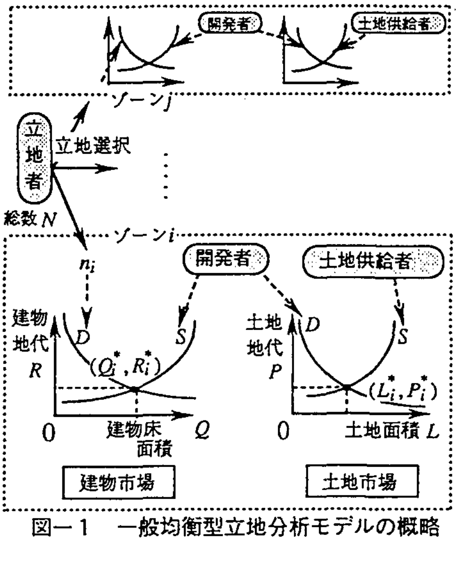
$L_{di}(R_i, P_i)$：　〃　土地需要関数

$L_{si}(P_i)$：　〃　土地供給関数

$\theta$：パラメータ

尚、立地余剰関数、建物床・土地の需要関数・供給関数の具体的な定式化等、詳細については原論分1)・2)を参照されたい。簡単のため立地者のタイプは１つとしている。

ところで、建物及び土地の市場ではそれぞれ価格と量の２種類、計４種類の変数（建物地代 $R_i$，建物面積 $Q_i$，土地地代 $P_i$，土地面積 $L_i$）が観測される。建物に関するデータを得るのは困難であるため、実際のパラメータ推定に当たっては、式(1)〜(3)の建物




図ー１　一般均衡型立地分析モデルの概略

キーワード　：地域計画、一般均衡、パラメータ推定

学生員　工修　東京大学大学院工学系研究科
文京区本郷7-3-1　TEL:03-3812-2111(代) ext.6128
FAX:03-3812-4977

地代$R_i$に代えて土地面積$L_i$を用いた次のような均衡式を考える。

<u>立地均衡</u>

$f_i(n_i,P_1,\cdots,P_i,\cdots,P_m,L_1,\cdots,L_i,\cdots,L_m)=0$ (for all $i$) (1)'

<u>建物市場均衡</u>

$g_i(n_i,P_i,L_i)=0$ (for all $i$) (2)'

<u>土地市場均衡</u>

$h_i(n_i,P_i,L_i)=0$ (for all $i$) (3)'

## 3、一般均衡型モデルにおけるパラメータ推定上の問題

本研究では、パラメータの推定方法として最も一般的に用いられる最小二乗法を用いる。しかしながら、本稿で対象としている一般均衡型立地分析モデルは、同時方程式体系として定式化される空間相互作用モデルであり、次の(1)〜(3)に述べるような特徴を持つため、いわゆる直接最小二乗法（OLS）を用いると統計学的な意味でのバイアスが生じることが知られている。

(i)分散不均一性[3),5)]

一般均衡型モデルにおける内生変数である立地量・建物地代・土地地代は、一般にその種類・ゾーンにより精度が大きく異なると考えられる。

(ii)空間的自己相関[3),5)]

空間相互作用モデルは、ゾーン間の相互作用を明示的に考慮するものであるが、それでもなお各ゾーンはモデルにおいて除外された変数からの影響をうけるため、残差に空間的な自己相関が生じる。

(iii) 内生変数と撹乱項の相関[3),4)]

これは、同時方程式体系に起因する問題であり、定式化により撹乱項と内生変数に相関が生じるものである。

まず、(i)(ii)は、

$\Sigma=E\{\varepsilon\varepsilon^t\}$ （$t$は転置を表す） (4)

（$\varepsilon$：観測値の真の誤差ベクトル　$\Sigma$：分散共分散行列）とすれば、OLSの仮定である$\Sigma=\sigma^2 I$　（$I$：単位行列）を満たさないことが問題となる。これに対しては、誤差の分散共分散行列$\Sigma$が既知であれば、残差ベクトルを$V$として$V^t\Sigma^{-1}V$を最小にする一般化最小二乗法（GLS）を用いることができる[3)]。

しかしながら、実際には多くの場合$\Sigma$は未知である。そこで、ある条件を満たす$\Sigma$の推定量$\bar{\Sigma}$が得られれば、これを$\Sigma$の代わりに用いることができる（feasible GLS）[6)]。また、$\bar{\Sigma}$によって得られる残差に基づき誤差項の分散共分散行列を推定し、これを$\Sigma$として再び推定し直すという手続を推定値が収束するまで繰り返す方法もある（Cochrane-Orcuttの方法）[4)]。

次に(iii)の内生変数と撹乱項の相関について説明するため、簡単な線形の連立方程式モデル

$y_1=\beta_1 y_2+\beta_2 x_1$ (5)

$y_2=\beta_3 y_1+\beta_4 x_2$ (6)

$y_1,y_2$：内生変数　$x_1,x_2$：外生変数

$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$：パラメータ

を考える。$i(>3)$回の観測により、次のような方程式を得る。

$y=X\beta+u$ (7)

$$y=\begin{bmatrix}y_{11}\\ \vdots\\ y_{1i}\\ y_{21}\\ \vdots\\ y_{2i}\end{bmatrix},X=\begin{bmatrix}y_{21}&x_{11}&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ y_{2i}&x_{1i}&0&0\\ 0&0&y_{11}&x_{21}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&y_{1i}&x_{2i}\end{bmatrix},\beta\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \beta_4\end{bmatrix}=,u=\begin{bmatrix}u_{11}\\ \vdots\\ u_{1i}\\ u_{21}\\ \vdots\\ u_{2i}\end{bmatrix}$$

$u_{11},\cdots,u_{2i}$：撹乱項

(7)について　min $u^t u$　を解くことにより、$\beta$の推定量$\bar{\beta}$は

$\bar{\beta}=(X^tX)^{-1}X^ty$ (8)

と求められる。(8)に(7)を代入すると、

$\bar{\beta}=\beta+(X^tX)^{-1}X^tu$ (9)

連立方程式体系では単一方程式の場合と異なり、$X$に内生変数が入る。そして、$X$と$u$が相関を持つため、例えば(9)について両辺の期待値をとると、右辺第２項が必ずしも零行列にならない。実際、(5),(6)に誤差項を仮定した

$y_1=\beta_1 y_2+\beta_2 x_1+u_1$ (10)

$y_2=\beta_3 y_1+\beta_4 x_2+u_2$ (11)

の(11)において、一見$y_1$と相関を持たない撹乱項$u_2$が、誘導型にすることにより$y_1$と相関を持つことを確かめることができる。従って、このままではパラメータの不偏推定量が得られない。このような場合には、一旦、内生変数を誤差項と無関係な変数について回帰する方法が多く使われる[4)]。

奥村ら[3)]は(i)〜(iii)の特徴を持つ連立型空間相互作用モデルを対象としたパラメータ推定法として２段階一般化最小二乗法（2SGLS）を提案し、線形モデルを対象とした適用を示している。

奥村の方法はまず第１段階において、内生変数を誤差項と独立な外生変数に回帰し、操作変数を得る。そして第２段階において、誤差項の分散共分散行列の初期値を用いて一般化最小二乗法を適用し、求められた残差から推定される分散共分散行列を用いて再度最小二乗推定するという手順を、推定値が収束するまで繰り返すというものである。

本研究の目的の一つは、奥村と同じ問題意識に立ったうえで、より一般的な連立型<u>非線形</u>モデルを対象としたパラメータ推定法を開発することである。

## 4．混合方程式を用いたパラメータの推定

本稿で扱う一般均衡型モデルは、複数の観測量と未知のパラメータが同一の方程式に混在しており、次のような連立方程式体系として表される。

$$F(Y,\beta,X)=0 \tag{12}$$

（$F$は(1)'～(3)'をそれぞれゾーンの数$m$だけ、縦に並べた列ベクトル）

$$Y=(n_1,\cdots,n_m,R_1,\cdots,R_m,P_1,\cdots,P_m)^t \tag{13}$$

：内生変数ベクトル

$$\beta=(a,b,\cdots,\theta,\eta)^t \quad \text{：パラメータベクトル} \tag{14}$$

$$X=(T_{11},\cdots,P'_m)^t \quad \text{：外生変数ベクトル} \tag{15}$$

ここで、外生変数は誤差を持たないものとする。さて、本稿で扱う一般均衡型モデル(12)は、内生変数についてのみならず、パラメータに関しても非線形である。パラメータに関して非線形な構造方程式を対象としたパラメータ推定法には、Amemiyaの非線形２段階最小二乗法(NL2SLS)やJorgeson&Laffontの非線形３段階最小二乗法(NL3SLS)がある[6]。これらの推定法の詳細はここでは省くが、いずれも次のように誤差項を仮定している。

$$y_i=f_i(Y,X,\beta)+u_i \tag{16}$$

$$\text{or} \quad f_i(Y,X,\beta)=u_i \tag{17}$$

これに対し、本研究では次に示すように、誤差項を内生変数自体に仮定することを考える。

$$f_i(Y+v,X,\beta)=0 \tag{18}$$

例えば、(11),(12)に対しは、

$$y_1+u_1=\beta_1(y_2+u_2)+\beta_2x_1 \tag{19}$$

$$y_2+u_2=\beta_3(y_1+u_1)+\beta_4x_2 \tag{20}$$

のように誤差項を置く。これは誘導形において

$$y_i=\varphi_i(X,\alpha)-v_i \tag{21}$$

のような誤差項を仮定しているのに等しい。これにより、誤差項と内生変数が相関をもつという問題を回避することができる。

無論、実際には非線形の連立方程式(12)を解析的に解くことは一般にできないため、誘導形は求まらない。そこで、パラメータの近似値$X_0$をなんらかの方法で得ることができたものとして、近似値$X_0$及び観測値$Y_b$のまわりでテイラー展開して１次近似する。

$$BV+A\delta+W=0 \tag{22}$$

$$B=\left.\frac{\partial F}{\partial L}\right|_{Y=Y_b},A=\left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{\beta=\beta_0},W=F(Y_b,\beta_0,X) \tag{23}$$

$Y_a,\beta_a$ ：$Y,\beta$の最確値ベクトル

$Y_b$ ：$Y$の観測値ベクトル

$\beta_0$ ：$\beta$の近似値ベクトル

$\delta=\beta_a-\beta_0$ ：偏差ベクトル

$V$ ：$Y_a=Y_b+V$を満たす補正値ベクトル

（$-V$が、通常残差ベクトルと呼ばれているもの）

この(9)は測量学の分野において、観測方程式と条件方程式を統合したものという意味で<u>混合方程式</u>[7]と呼ばれるものである。

本研究において、$F$,$L$はそれぞれ$3m$行の列ベクトルであり、従って$B$は$3m\times3m$の正方行列であるから、$B$が正則であるとすると(22)より

$$V=-B^{-1}(A\delta+W)=-B^{-1}A\delta-B^{-1}W \tag{24}$$

さて、$Y=G(\beta,X)$というモデルにおいて観測方程式が

$$V=C\delta+L \qquad (L=Y_0-Y_b,Y_0=G(\beta,X_0)) \tag{25}$$

$C$:計画行列

と表されるとき、偏差ベクトル$\delta$の最確値$\hat{\delta}$が、

$$\hat{\delta}=-\left(C^t\Sigma^{-1}C\right)^{-1}C^t\Sigma^{-1}L \tag{26}$$

となることを利用すれば、(24)について、$V^t\Sigma^{-1}V$を最小にするような偏差ベクトル$\delta$は、次のように計算される[7]。

$$\begin{aligned}\hat{\delta}&=-\left(\left(-B^{-1}A\right)^t\Sigma^{-1}\left(-B^{-1}A\right)\right)^{-1}\left(-B^{-1}A\right)^t\Sigma^{-1}\left(-B^{-1}W\right)\\&=-\left(A^t(B^{-1})^t\Sigma^{-1}B^{-1}A\right)^{-1}A^t(B^{-1})^t\Sigma^{-1}B^{-1}W\\&=-\left(A^tM^{-1}A\right)^{-1}A^tM^{-1}W\end{aligned} \tag{27}$$

$$\text{ただし、}\quad M=B\Sigma B^t \tag{28}$$

よって、パラメータの最確値ベクトル$\beta_a$及び残差から計算される誤差の分散共分散行列の不偏推定量$\Sigma_e$は次のように計算される。

$$\beta_a=\beta_0+\hat{\delta} \tag{29}$$

$$\Sigma_e=\frac{V^tV}{r-u} \tag{30}$$

$r-u$ ：自由度

$r$ ：$F$の行の数 $(=3m)$

$u$ ：パラメータの数

(28)から、$\beta$の分散共分散行列$\Sigma_\beta$は誤差伝播の公式（法則）を用いると

$$\Sigma_\beta=\left[\left(A^tM^{-1}A\right)^{-1}A^tM^{-1}\right]\Sigma_W\left[M^{-1}A\left(A^tM^{-1}A\right)^{-1}\right] \tag{31}$$

ここで、$\Sigma_W$は$W$の定義$W=F(Y_b,\beta_0,X)$において、$\beta_0$が定数ベクトルであることを考慮して再度誤差伝播の公式を用いると、

$$\Sigma_W=\left[\left.\frac{\partial F}{\partial Y}\right|_{Y=Yb}\right]\Sigma\left[\left.\frac{\partial F}{\partial Y}\right|_{Y=Yb}\right]^t=B\Sigma B^t=M \tag{32}$$

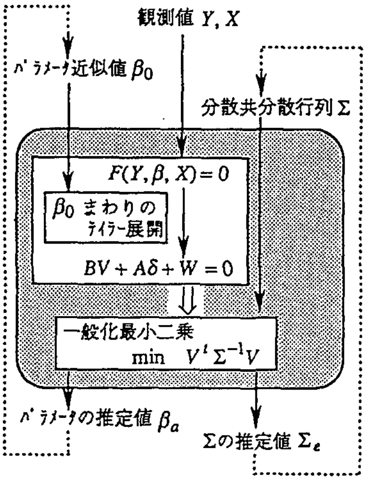
(31)(32)より、

$$\begin{aligned}\Sigma_\beta&=\left[\left(A^tM^{-1}A\right)^{-1}A^tM^{-1}\right]M\left[M^{-1}A\left(A^tM^{-1}A\right)^{-1}\right]\\&=\left(A^tM^{-1}A\right)^{-1}\end{aligned} \tag{33}$$

実際の計算においては、次の(A),(B)の収束条件が同時に満たされるまで、繰り返し計算を行う（図－２）。

(A)パラメータの初期値を与えて得られる最確値とその初期値との乖離が収束する

(B)初期値として与える誤差の分散共分散行列$\Sigma$とこれにより得られる残差から計算される誤差の分散共分散行列の不偏推定量$\Sigma_e$との乖離が収束する




図－2　混合方程式を用いたパラメータ推定の概略

## 5．将来予測値の推定と誤差伝播

混合方程式を用いた一般化最小二乗法により、真のモデル　$F(Y^*, \beta^*, X) = 0$　に対応した

$$F(Y_a + U, \beta_a, X) = 0 \tag{34}$$

が推定される（$U$はこれまで$V$と記した補正ベクトル）。

パラメータの最確値$\beta_a$が得られれば、外生変数ベクトル$X$を将来の$X_f$に代えて、

$$F(Y_a + U, \beta_a, X_f) = 0 \tag{35}$$

を解くことにより、

$\overline{Y+U}(=\overline{Y}+\overline{U})$（$^-$は推定値を示す）を求めることができる。ここで、撹乱項$U$に関する仮定より、

$$E(Y+U) = E(Y) + E(U) = E(Y) + O = E(Y) \tag{36}$$

となるから、式（35）の解は将来予測値$Y_f$の不偏推定量である。そして、その分散は

$$V(Y+U) = V(Y) + V(U)$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\Big/\frac{\partial F}{\partial \beta}\right) V(\beta) \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\Big/\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)^t + V(U) \tag{37}$$

従って、

$$B_f = \frac{\partial F}{\partial Y}\bigg|_{Y=Y_f},\ A_a = \frac{\partial F}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=\beta_a} \tag{38}$$

とおけば、将来予測値の分散$\Sigma_{Y_f}$はつぎのように計算される。

$$\Sigma_{Y_f} = B_f^{-1}A_a\Sigma_{\beta a}(B_f^{-1}A_a)^t + \Sigma \tag{39}$$

## 6．おわりに

本研究では、一般均衡型立地分析モデルを対象に、そのパラメータ推定と将来予測について考察を行った。ここで用いた一般均衡型モデルは、パラメータに関して非線形な連立方程式系で表される空間相互作用モデルであり、OLSを用いてパラメータ推定を行うと推定値にバイアスが生じる。そこで本稿では、測量学の分野で混合方程式と呼ばれる形式を用いて一般化最小二乗法を適用する方法を示した。また、このようにして求められたパラメータの最確値と分散を用い、将来予測値の分散を求める方法にういて考察した。

しかしながら本研究は、連立型空間相互作用モデルを適用する際におけるパラメータ推定の一方法を示したに過ぎず、実際のデータを用いた有効性の確認が不可避である。また理論的にも検討すべき課題が多い。

(1)　図－2で示した方法で解を求めるに際し、

(イ)パラメータ及び誤差の分散共分散行列の初期値をどのように与えるかについて検討する必要がある。

(ロ)本稿では解の一意性について触れていないため、実際のデータを用いる上で検討が必要となる。

(2)　本稿では、外生変数に誤差がないものと仮定しているが、経済社会データを外生変数として用いる以上、その誤差も無視し得ない。そこで、外生変数が誤差を持つ場合についての理論的拡張を行いたい。

## 参考文献


1)　平谷浩三･中村英夫･上田孝行･堤盛人：土地と建物の他市場同時均衡に基づく土地利用モデル,土木計画学研究･講演集No.16(1),pp.545-552,1994

2)　上田孝行･中村英夫･赤土大介･M. Hasib：交通･立地分析モデルによる鉄道新線整備の影響分析,土木計画学研究･講演集No.17,pp.131-134,1995

3)　奥村誠･足立康史･吉川和広：空間相互作用をとりいれた地域モデルの推定法,土木計画学研究･論文集No.7,pp.115-122,1989

4)　佐和隆光：数量経済分析の基礎,筑摩書房,1974

5)　佐々木公明：モデル推定に関する計量経済学的課題,第18回土木計画学シンポジウム,pp.121-124,1984

6)　T. Amemiya：Advanced Econometrics,Harvard University Press,1985

7)　田島稔･小牧和雄共著：最小二乗法の理論とその応用,東洋書店,1986