【土木計画学研究・講演集 No.18(2) 1995年12月】

ネスティィド・エントロピーモデルとその応用

Nested Entropy Models and Its Applications

宮城俊彦

Toshihiko Miyagi

1. はじめに

エントロピー最大化モデルは地域計画研究では良く利用されるモデルである。しかし、エントロピーモデルの行動論的含意が不明確であるとの理由で、ロジットモデルほど行動モデルとして認知されていない。その一方で、交通統合モデルの作成にはエントロピー関数を目的関数にもつモデルも幅広く利用されてきた（例えば、Sheffi,1985）。最近、Fernandez et al. (1994)、宮城・水口(1995) によって複合交通手段を含むネットワーク均衡モデルが提案された。このモデルは、いわばネスティッド型のエントロピーモデルを目的関数に持つモデル構造になっている。

本小稿の目的は、ネスティッド型のエントロピーモデルの誘導根拠とその応用法の一部を示すことである。

2. ネスティドエントロピーモデル

2.1 ロジットモデルと選択公式

個人の代替案の集合を I とおき、選択肢 $i \in I$ の効用は eq.(1)のような加法的効用関数で表現されると仮定する。

$$u_i^t = v_i^t + \varepsilon_i^t,\ i \in I \qquad (1)$$

ここに、v_i^t は選択肢 i の測定可能効用、ε_i^t は測定不可能な効用でランダム変数である。ε_i^t は分散が次式で与えられる独立なガンベル分布に従うと仮定する。

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2}{6\theta^2}$$

このとき、選択肢 i が選択される確率は次式で与えられる。

$$P_i = \frac{\exp(\theta v_i)}{\sum_{i \in I} \exp(\theta v_i)} \qquad (2)$$

最大効用の期待値 V(EMU) は

$$V = E[\max_{i \in I} u_i = \frac{1}{\theta} \log \sum_{i \in I} \exp(\theta v_i) \qquad (3)$$

EMUがエントロピーと密接な関係を持つことを示すことができ、また、選択の多様性の効用を計る尺度となりうること、そして、オプション値との関係も議論されている。(Miyagi;1983,1986,1995). 宮城は、EMUとエントロピーの関係を表す式を選択の基本公式と呼び、次のように表現できることを示している。

$$V = \sum_{i \in I} P_i v_i - \frac{1}{\theta} \sum_{i \in I} P_i \log P_i \qquad (4)$$

選択公式が意味することは概ね次のようである。最大期待効用は期待効用の上限値を与える。その乖離はエントロピーで与えられ、エントロピーは選択の多様性によってもたらされる効用増加分を表す。選択肢の数が増加すれば、効用Vは増加するが、増加幅は選択肢の数が増加するにつれて減少する。エントロピーは個人の所得が変化しない場合のオプション価値を表す(Miyagi, 1995)。選択公式は EMUの共役関数を求める結果として得られる。 すなわち、凸関数f(x) の共役関数は次式で定義できる。

$$f^* = \sup_x \cdot [\langle x, x^* \rangle - f(x)]$$

or

$$-f^* = \inf_x \cdot [\, f(x) - \langle x, x^* \rangle\,]$$

ここに、f^* は f の共役関数と呼ばれる(Luenberger,1969)。

2.2 ネスティドロジット

ここではWilliams(1977)に従ってネスティッドロジットモデルの概要を示す。まず、2次元選択肢空間(I, J) における効用を次式で定義する。

$$U(I,J) = U^I + U^J$$

交通行動分析、配分交通、交通手段選択

正会員、工博、岐阜大学工学部

（岐阜市柳戸１－１、０５８－２９３－２４４２）

Uの要素で表現すると、

$$u_{ij}=u_i+u_{ij}$$
$$=v_i+v_{ij}+e_i+e_{ij},i=1,\ldots n,j=1,\ldots.m. \quad (5)$$

ここに、v_i と v_{ij} は測定可能効用を表し，e_i と e_{ij} はランダム効用を表す。分離可能な加法的効用は必然的に図ー１に示すような階層構造の選択を表すことになる。個人tはまず下位レベルの選択肢集合　J={j}から効用を最大にする選択肢を選択する。

$$u^t_{i*}=\max_{j\in J} u^t_{ij} \quad (6)$$

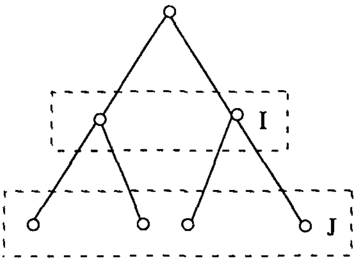

Fig.1　Nested structure

さらに、合成された効用によって上位レベルの選択肢集合I={i} から効用を最大にする選択肢を選ぶ。

$$u^t_i+u^t_{i*}=\max_{k\in J}\{u^t_k+u^t_{k*}\} \quad (7)$$

$\{u_{ij}\}$　は次式で示される標準偏差を持つガンベル分布に従うと仮定すると、

$$\sigma_{IJ}=\frac{\pi}{\sqrt{6\theta_2}} \quad (8)$$

条件付き選択確率 P_{ij} は次式で与えられる。

$$P_{ij}=\frac{\exp(\theta_2 v_{ij})}{\sum_{j\in J}\exp(\theta_2 v_{ij})} \quad (9)$$

$u_{i*}=\max_{j\in J} u_{ij}$　の分布も平均値、標準偏差が各々次のように表されるガンベル分布に従うと仮定する。

$$v_{i*}=\frac{1}{\theta_2}\log\sum_{j\in J}\exp(\theta_2 v_{ij}) \quad (10)$$

$$\sigma_{I*}=\frac{\pi}{\sqrt{6\theta_2}}$$

周辺確率分布 P_i を求めるには u_i と u_{i*} の和の分布を決定するする必要がある。　u_i とu_{i*} は互いに独立に分布しているので、

$$\tilde{u_i}=u_i+u_{i*} \quad (11)$$

の平均値と分散を次のようにおくことができる。

$$\tilde{\sigma}^2_{i*}=\left(\frac{\pi}{\sqrt{6\theta_2}}\right)^2+\sigma_i^2$$

$$\tilde{v_i}=v_i+\frac{1}{\theta_2}\log\sum_{j\in J}\exp(\theta_2 v_{ij})$$

$\tilde{u_i}$が上式で与えられる平均値と分散をもつガンベル分布に従うと仮定すると、同時確率　ρ_{ij}　は次式で与えられる。

$$\rho_{ij}=P_iP_{ij}=\frac{\exp[\theta_1(v_i+v_{i*})]}{\sum_{i\in I}\exp[\theta_1(v_i+v_{i*})]}\frac{\exp(\theta_2 v_{ij})}{\sum_{j\in J}\exp(\theta_2 v_{ij})} \quad (12)$$

ここに、

$$v_{i*}=\frac{1}{\theta_2}\log\sum_{j\in J}\exp(\theta_2 v_{ij})$$

$$\theta_1=\frac{\pi}{\sqrt{6}}\left(\sigma_i^2+\frac{\pi^2}{6\theta_2}\right)^{-\frac{1}{2}}\leq\theta_2 \quad (13)$$

このとき、総効用（合成効用）は次式で与えられる。

$$V=\frac{1}{\theta_1}\log\sum_{i\in I}\exp[\theta_1(v_i+v_{i*})]$$
$$=\frac{1}{\theta_1}\log\left\{\sum_{i\in I}\left\{\sum_{j\in J}\exp[\theta_2(v_i+v_{ij})]\right\}^{\frac{\theta_1}{\theta_2}}\right\} \quad (14)$$

2.3 ネスティドエントロピー関数

総効用（１４）に対応した共役関数は選択公式の形で次式で与えられる。

$$V=\sum_{i\in I}P_i(v_i+v_{i*})-\frac{1}{\theta_1}\sum_{i\in I}P_i\log P_i \quad (15)$$

また、条件付き効用に対する選択公式は次のようである。

$$v_{i*}=\sum_{j\in J}P_{ij}v_{ij}-\frac{1}{\theta_2}\sum_{j\in J}P_{ij}\log P_{ij} \quad (16)$$

式(16)は次のように変形できるので、

$$\sum_{i\in I} P_i v_{i\bullet}=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} P_i P_{ij} v_{ij}-\frac{1}{\theta_2}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} P_i P_{ij}\log P_{ij} \quad (17)$$

これを用いて総効用を書き改めると、

$$V=\sum_{i\in I} P_i v_i+\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} P_i P_{ij} v_{ij}-\frac{1}{\theta_1}\sum_{i\in I} P_i\log P_i -\frac{1}{\theta_2}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} P_i P_{ij}\log P_{ij} \quad (18a)$$

or

$$V=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \rho_{ij}(v_i+v_{ij})-\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_1\theta_2}\sum_{i\in I} P_i\log P_i -\frac{1}{\theta_2}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \rho_{ij}\log\rho_{ij} \quad (18b)$$

式(18a)から式(18b)を得る過程で、$\rho_{ij}=P_iP_{ij}$ という関係を用いている。効用関数が選択確率に関して凹関数であるためには、$\theta_2\geq\theta_1$とい条件が満たされる必要がある。この条件はネスティッドロジットモデルの誘導において必要とされた条件、式(13)、とも整合する。選択公式から選択確率を求めるには、以下に示すような、制約条件付きの効用最大化問題を解けばよい。以降、このモデルをエントロピー最大化問題と呼ぶことにする。

$$\max V(P_i,\rho_{ij}) \quad (19a)$$

s.t.

$$\sum_{i\in I} P_i=1 \quad (19b)$$

$$\sum_{j\in J} \rho_{ij}=P_i \quad (19c)$$

意思決定者の総数 q が与えられている場合には、総効用は個人効用の総和として$qV(P_i,\rho_{ij})$で与えられる。また、選択者の周辺分布q_i、条件付き分布q_{ij}は、各々、$q_i=qP_i$、$q_{ij}=q\rho_{ij}$で与えられるので、エントロピー最大化問題は、$\{q_i,q_{ij}\}$を変数として書き改めることができる。

式 (15) から (18)への過程は如何にしてネスティッドエントロピー (NE) を得るのかを示している。 式(15)は意思決定樹の最上位レベルでの選択公式である。上位レベルの効用は下位レベルの選択確率と条件付き効用を含み、また、条件付き効用に対しては、上位レベルと全く同様にし選択公式を得ることができる。この結合は、式（１７）で見たように容易に行える。 NEモデルを３次元の選択肢空間に拡張することは、次節の例で示すように容易に行うことができる。

3. NE関数の応用

NEモデルを作成するためには、まず、選択樹を作成する事から始まる。そして、作成された選択樹に対応するNLモデルを構築し、そのMEU関数の共役関数を求めることによって得られるが、NEの構造の特徴が分かれば、直接的にネスティッド選択に対応したNEモデルを求めることができる。
NEモデル作成の一般的手順は次のようである。
①選択樹を作成する。
②選択樹に対応したネスティッド効用関数を作成する。
③効用関数の定数項を必要ならば別の関数に置き換える。
④ODトリップ数を乗ずることによって総効用を求める。
⑤適当な制約条件を負荷し、数理最適化問題として定式化する。解の必要十分条件を求める。

宮城・水口（１９９５）は複数の交通モードを利用するトリップを複合交通モードと呼び、自動車利用のような単一モードトリップとの競合を考慮したネットワーク均衡モデルを提案した。このモデルでは複合交通モードの選択を図－２に示すような３段階のネスティッドロジットモデルとして構成している。すなわち、最下位レベルの選択肢は端末交通手段選択、次に駅選択、そしてそれらの結果として単一交通手段（自動車）を選択するか複合交通手段を選択するかという構造である。図－２及び以下の説明において、"∧"は複合交通モードであることを示す記号である。

手順１）選択樹の作成

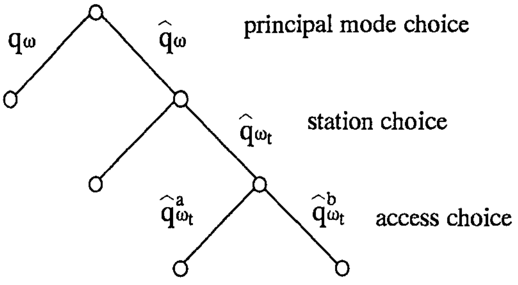

Fig.2 Nested structure of a mixed mode choice

手順２）効用関数の作成

$$V=\sum_{w\in W} \bar{q}_w V_w=$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{w\in W}(q_w v_w+\hat{q}_w\hat{v}_w)-\frac{1}{\theta_1}\sum_{w\in W}\{q_w(\log q_w-1)+\hat{q}_w(\log\hat{q}_w-1)\}\\
&\quad+\frac{1}{\theta_1}\sum_{w\in W}\hat{q}_w(\log\hat{q}_w-1)+\sum_{w\in W}\sum_{t\in T_w}(\hat{q}_{wt}\hat{v}_{wt})\\
&-\frac{1}{\theta_2}\sum_{w\in W}\sum_{t\in T_w}\hat{q}_w(\log\hat{q}_w-1)+\frac{1}{\theta_3}\sum_{w\in W}\sum_{t\in T_w}\hat{q}_{wt}(\log\hat{q}_{wt}-1)\\
&\quad+\sum_{w\in W}\sum_{t\in T_w}(\hat{q}^a_{wt}\hat{v}^a_{wt}+\hat{q}^b_{wt}\hat{v}^b_{wt})\\
&\quad-\frac{1}{\theta_3}\sum_{w\in W}\sum_{t\in T_w}\{\hat{q}^a_{wt}(\log\hat{q}^a_{wt}-1)+\hat{q}^b_{wt}(\log\hat{q}^b_{wt}-1)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

ここに、

$W=\{w\}$: O-D ペア集合

$T_w=\{t\}$: O-D ペア $w\in W$の複合モードトリップに利用される駅の集合。

$\bar{q}_w$: O-D ペア $w\in W$の交通量。

q_w, v_w: 自動車のO-D トリップと平均効用

$\hat{q}_w, \hat{v}_w$; 複合モードのO-D トリップと平均効用

$\hat{q}_{wt}$:駅$t\in T_w$での乗り換えトリップ数

$\hat{q}^a_{wt}, \hat{q}^b_{wt}$: 駅 $t\in T_w$ への自動車およびバスアクセストリップ数

$\hat{v}^a_{wt}, \hat{v}^b_{wt}$: 駅 $t\in T_w$ への自動車およびバスアクセストリップの平均効用

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$: 分散パラメータ

手順３）定数項の置き換え

$$
v_w=-\frac{\displaystyle\sum_{a\in A}\int_0^{x_a}t_a(\omega)\,d\omega}{q_w}\ ,
$$

$$
\hat{v}_w=\hat{\alpha}_w-\frac{\displaystyle\sum_{a\in M}t^m_a x^m_a}{\hat{q}_w}\ ,
$$

$$
\hat{v}_{w_t}=\hat{\alpha}_{w_t},\ \hat{v}^a_{wt}=0,\ \hat{v}^b_{wt}=\hat{\alpha}^b_{wt}-\hat{c}^b_{wt}
$$

ここに、 $\hat{c}^b_{wt}$ はO-D ペア wの駅$t\in T_w$ へのバスアクセス費用を表す。

手順４）数理最適化問題の定式化

以下では目的関数のみを示す。

なお、次のような変数を用いている。

A: 自動車ネットットのリンク集合

M: トランシットネットワークのリンク集合

$t_a(\cdot)$: 自動車のリンクパフォーマンス関数

t^m_a: マストラのリンクパフォーマンス関数

x_a: 自動車リンクの交通量

x^m_a: マストラリンクの交通量

$$
\begin{aligned}
\min Z=&\sum_{a\in A}\int_0^{x_a}t_a(\omega)\,d\omega+\sum_{a\in M}\hat{t}^m_a\hat{x}^m_a\\
&+\sum_{w}\int_0^{\hat{q}_w}\left(\frac{1}{\theta_1}\ln\frac{\omega}{\bar{q}_w-\omega}+\alpha_w\right)d\omega\\
&-\frac{1}{\theta_2}\sum_{w}\hat{q}_w\ln\left(\hat{q}_w-1\right)\\
&+\sum_{w}\sum_{t\in T_w}\int_0^{\hat{q}^b_{wt}}\left(\frac{1}{\theta_3}\ln\frac{\omega}{\hat{q}_{wt}-\omega}+\hat{\alpha}^b_{wt}+\hat{c}^b_{wt}\right)d\omega\\
&+\left(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{\theta_3}\right)\sum_{w}\hat{q}_{wt}\ln\left(\hat{q}_{wt}-1+\hat{\alpha}_{wt}\right)
\end{aligned}
\tag{21}
$$

5. REFERENCES

Fernandez, E., D. C. Joaquin, M. Florian and C. Enrique(1994) :Network equilibrium models with combined modes. *Transpn. Sci.*, Vol.28, No. 3, pp. 182-192.

Luenberger, D.G. (1969): *Optimization by Vector Space Method*. John Wiley & Sons, New York.

Miyagi, T. (1983): Dual approach to the modal equilibrium problem. Working paper at Gifu University, 83-TE-MT2-5.

Miyagi, T. (1986): On the formulation of a stochastic user equilibrium model consistent with the random utility theory: A conjugate dual approach. *Proc. of WCTR '86*, pp.1619-1635.

Miyagi, T. and H. Morisugi (1995): A direct measure of the value of choice-freedom. To be appeared in *Papers of Regional Science International.*

Miyagi, T. and H. Minakuchi (1995): A transportation equilibrium assignment model with mixed modes. *Journal of Infrastructure Planning and Management, JSCE*, No. 512/IV-27,pp.25-33.

Sheffi, Y. (1985) : *Urban Transportation Networks*. Prentice Hall, New Jersey.

Willams,H.C.W.L. (1977): On the formulation of travel demand models and economic evaluation measures of user benefit. *Environment and Planning,* 9A(3), pp.285-344.