【土木計画学研究・講演集 No.17 1995年1月】

タブサーチを用いた凹費用関数をもつ施設配置フロー問題の近似解法*

A Tabu Search Algorithm for the Capacitated Facility Location and Network Flow Problem with Concave Costs

片山 直登** 伊豆原 英樹*** 石井 和克****
by Naoto KATAYAMA, Hideki IZUHARA, Kazuyoshi ISHII

1. はじめに

施設配置フロー問題は，需要発生地点と候補施設とこれらの間を連結するリンクからなる最大ネットワークが与えられたときに，諸条件のもとで適切な施設配置とフロー経路を選定する問題である．需要を処理する費用が処理量に対して下に凹である関数によって定まる問題を凹費用関数をもつ問題とよぶ．この凹費用関数は現実に頻繁に現れる問題であり，固定費と変動費をもつ問題や規模とともに処理単価が逓減する問題などは凹費用関数をもつ問題と考えることができる．具体的には，汚水処理施設配置問題，輸送・工場配置問題などの問題が挙げられる．

単一の施設・発生点をもち，リンクと施設上での処理量に制限がない問題は，凹費用ネットワークフロー問題[1]となり，容易に最適解を求めることができる．また，単一施設，少数発生点でリンクと施設上での処理量の制限がない問題も動的計画法[1]を用いて最適解を求めることができる．一方，多施設・多発生点やリンク・施設の処理量に制限をもつ問題はNP完全であり，小規模な問題以外は容易に最適解を求めることができない．Kubo[2]は凹費用関数で容量制約をもつヒッチコック型の施設配置問題に対して，フロー保存制約のラグランジュ緩和と劣勾配法による下界値の解法と，下界値の情報を用いた近似解法を提案している．Balakrishnan[3]は区分的線形関数である凹関数をもつ問題に対して，ラグランジュ緩和法を用いた解法を提案している．

汚水処理施設配置問題はその処理費用関数が凹費用関数で近似できることから，凹費用や固定費付きの問題として数多くの研究が行われている．Phillips[4]およびLeighton[5]は固定費付き費用の整数計画問題として取り扱っている．Joeres[6]およびJarvis[7]は区分的線形問題として，分枝限定法を適用している．また，施設と発生点が一列に配置される問題に対して，Converse[8]およびZhu[9]は動的計画法や双対上昇法を適用している．また，これらの多くは処理量の制限を考慮していないモデルである．

一方，近年，組合最適化問題に対して，多くのメタ解法が適用され，成果を挙げている．Gloverにより発表されたタブサーチ[10]はグラフ分割問題，ジョブショップスケジューリング問題[11]，配送計画問題[12]など多くの問題に適用され成果挙げている．

本研究では，リンクや施設に処理量の制限をもち，その処理費用が処理量に対して凹関数とする条件のもとで，費用最小のフローと施設を選定する問題を取り扱う．

この問題は凹関数の性質から組合最適化の性質と非線形最適化の性質が混在する問題であるため，局所解が存在し，ローカルサーチ的解法では良い解を探索できない．本研究では，この施設配置フロー問題に対して，タブサーチ法を用いた近似解法を提案する．この解法は，データ構造を利用することによって効果的な近傍探索を実現している．

2. 問題の定義

凹費用をもつ容量制約付き施設配置フロー問題の定義を示す．施設候補ノード集合Tと発生ノード集合S，これらを併せたノード集合$N(=T\cup S)$が与えられ，有向であるリンクの集合$L(\subseteq S\times N\backslash T\times T)$から構成されたネットワーク$G(N,L)$が与えられているものとする．発生ノード$s$では単一品種の需要が発生し，単位期間当たりの需要量q^sが与えられているものとする．この需要は直接または他の発生ノードとリンクを経

---

*キーワード：水資源計画，産業立地，物資流動

**正会員 工修 金沢工業大学 経営工学科(〒921 石川県石川郡野々市町扇ヶ丘7番地1,0762-94-6710,0762-94-6711)
***工修 古河インフォメーション・テクノロジー
****工博 金沢工業大学 経営工学科

由して，いずれかの施設で処理されるものとし，分割処理はしないものとする．

ノードi, j間のリンク(i,j)上のフロー量がy_{ij}である場合，リンク(i,j)上のフロー費用関数を$f_{ij}(y_{ij})$とする．施設jでの処理量がx_jである場合，施設jでの処理費用関数を$g_j(x_j)$とする．$f_{ij}(y_{ij})$と$g_j(x_j)$は，それぞれy_{ij}, x_jに関して下に凹で単調増加の関数とする．また，リンク(i,j)には単位期間当たりの処理量の制限である容量r_{ij}，施設jには単位期間当たりの処理容量u_jが与えられている．フロー費用と処理費用の総和である総費用を$h = \sum_{(i,j)\in L} f_{ij}(y_{ij}) + \sum_{j \in T} g_j(x_j)$とする．凹費用をもつ容量制約付き施設配置フロー問題は，需要をすべて処理できる条件のもとで，総費用hを最小にする施設とフローを求める問題である．

3. 実行可能解と解のリスト表現

凹費用関数をもつ容量制約付き施設配置フロー問題は，次の2段階の問題に分割できる．第1は各発生ノードの需要をどの施設で処理するかである施設割当問題，第2は発生ノードと施設間でどのようにフローを流すかであるフロー割当問題である．第1段階では施設の処理容量制約，第2段階ではリンクの容量制約を満足するように解を選ぶことによって，実行可能な解を得ることができる．

発生した需要は分割処理されないので，実行可能解は図1のようにそれぞれの施設を根とする木の集合と考えることができる．ここで，図2のような親ノードへの接続を表すポインタのリストとして，図1に対応した解を一意に表わすことができる．このリストを用いて，各発生ノードから，親ノードや根である施設までたどり，リンクフローや施設処理量およびフロー費用や処理費用も容易に求めることができる．リストとして解が得られたときに，目的関数値は単純には$O(|S|^2+|T|)$で計算することができる．

4. 近傍解

(1) 近傍解の定義

ローカルサーチ法やタブサーチ法などの繰り返し探索法では，近傍解集合の中で最も良い解を探索していくために，近傍解の定義が重要な課題となる．先に示したように，問題の構造を2段階に分割し，それぞれの問題に対して，次のように近傍を定義する．

施設割当問題の近傍解： 1つの発生ノードを他施設に移動した解，および1つの発生ノードとその子孫

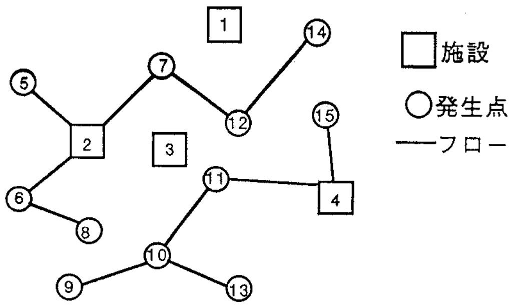

図-1 施設配置フロー問題

1	2	3	4	5	6	7	8
–	–	–	–	2	2	2	6

9	10	11	12	13	14	15
10	11	4	7	10	12	4

図-2 解のリスト表現

ノードを他施設に移動した解．ただし，各施設の処理容量は考慮しない．

フロー割当問題の近傍解： 同一施設に割り当てられた発生ノード内で，発生ノードの親ノードへの接続をその祖先ノードに変更した解，および発生ノードとその子ノードとの接続順序を変更した解

施設割当問題の近傍は1ノードを他施設へ移動する$(1,0)opt$であり，近傍解は$O(|S||T|)$個存在する．また，フロー割当問題の近傍は限定されたリンク交換の$(1,1)opt$であり，近傍解は$O(|S|^2)$個存在する．

(2) 近傍解の解の表現と目的関数値の計算

繰り返し探索法では，近傍解の目的関数値を計算し，最も良い解を選択する必要がある．しかも，この操作を繰り返し行うために，できるだけ簡単に近傍解の目的関数値を計算する必要がある．

施設割当問題における近傍解に対応するリストと目的関数値の計算方法を示す．ある1つの発生ノードsを他施設への移動する場合は，移動先の施設に割り当てられているノードkの中で，リンク(s,k)の費用を$f_{sk}(q^s)$としたときに，最小費用のノードkに接続する．リストでは，ノードsのすべての子のポインタをsの親とし，ノードsのポインタをkにすれば良い．計

算量は$(|S|)$である．また，発生ノードおよびその子孫ノードを他施設へ移動する場合は，移動先の施設に割り当てられているノードkの中で，リンク(s,k)の費用を$f_{sk}(p^s)$としたときの最小費用のノードkに接続する．ただし，p^sは発生ノードsを経由しているフロー量とする．リストでは，ノードsのポインタをkにすれば良い．この計算量も$(|S|)$である．

一方，移動前後のノードsから施設までのフロー，sの子ノードからその新しい親ノードまでのフロー，および施設の処理量のみが変化する．したがって，目的関数値は$O(|S|)$で計算することができる．

次に，フロー割当問題の近傍解に対応するリストと目的関数値の計算方法を示す．発生ノードsの親ノードの接続をその祖先ノードに変更する場合は，ノードsのポインタをsの祖先ノードとすれば良い．この計算量は$(|S|)$である．ノードsとsのある子ノードの接続順を変更する場合には，sと子ノードのポインタを交換すれば良い．この計算量は$(|1|)$である．接続が変化したノード間の費用の変化量を計算すれば良いので，目的関数値の変化量は$O(|1|)$で計算することができる．

以上のことから，すべてのノードに対して近傍探索を行い，目的関数値を計算し，最良の近傍解を求めるためには，施設割当問題では$O(|S|^2|T|)$，フロー割当問題では$O(|S|^3)$の計算量が必要となる．

5. タブサーチ法

ローカルサーチ法は実行可能な近傍解集合内から最良な解を選択し，解が改善されるまでこの操作を繰り返す方法である．このため，ローカルサーチ法では局所解に陥ることになる．タブサーチ法はより大域的な解を得るために，探索済みの解を一定回数探索禁止にしたり，変更済みの変数を一定回数変更禁止にすることによって，禁止解を除いた近傍解の中で，(現在の解よりも悪いかもしれないが)最良の解を探索していく方法である．このために，局所解から脱出し，他の局所解の探索が可能となる．

本研究では，久保[11][12]が提案した実行不可能解も近傍解に含めるタブサーチ法を施設割当問題に適用し，特定の発生ノードを特定の施設に割り当てることを一定回禁止する禁止規則[12]を用いる．また，フロー割当問題にはローカルサーチ法を用いる．

タブ長を $tabu\_length$，タブ長のパラメータを $tabu\_param$，タブサーチの繰り返し回数を ite_limit，実行不可能ペナルティーを $pena$，ペナルティーのパラメータを $pena\_param$ とする．発生ノードs，割当施設jのタブリスト$tabu(s,j)$とする．解を$z=(x,y)$とし，施設割当問題の近傍解集合を$N_1(z)$，フロー割当問題の近傍解集合を$N_2(z)$，rndを0から1の一様乱数とする．また，$tabu(s,j)>k$であるzの近傍解の集合を$E(z,k)$とし，$h(z)$を目的関数値とする．最良解をz_{best}とする．

・タブサーチを用いた解法

[Step 0] $tabu\_length$，ite_limit，$pena\_param$ を設定する．$tabu(s,j):=0$，$k:=0$，$z_{best}:=\infty$，$pena:=0$ とする．

[Step 1] 次の操作をすべての発生ノードに対して行う．ノードsについて，施設jに直送したときの費用$f_{sj}(q^s)$の小さい順にsを施設に割り当てる．施設の処理量がu_jを越える場合には，次に費用の小さい施設に割り当てていく．

次の操作をすべての施設に対して行う．施設jに割り当てられたノード対(s,ℓ)ついて，リンク(s,ℓ)の長さを$f_{s\ell}(q^s)$としたときの最小木を求め，最小木上にフローを流す．この初期解をz_kとする

[Step 2] $N_1(z_k)\backslash E(z_k,k)$である$z$に対して，最小の$h(z)+pena$を求め，$z_{k+1}$とする．この近傍解に対応する$s$，$j$について，$tabu(s,j):=k+tabu_length+tabu_param\times rnd$とする．

[Step 4] zが実行不可能であれば，$pena:=pena+pena\_param$ とし，[Step 7] へ．zが実行可能であれば，$pena:=0$とする．

[Step 5] $h(z_{k+1})<h(z_{best})$ であれば，$h(z_{best}):=h(z_{k+1})$ とする．そうでなければ[Step 7]へ．

[Step 6] $N_2(z_k)$ であるzに対して，実行可能で$h(z_{tmp})$が最小であるz_{tmp}を求め，$z_{k+1}:=z_{temp}$とする．この操作をz_{k+1}が減少する間繰り返す．

[Step 7] $k:=k+1$とする．$k\geq ite\_limit$ であれば終了，そうでなければ[Step 2]へ．

この解法では，$O(ite_limit\times(|S|^2|T|+ite_6|S|^3))$の計算量が必要となる．ここで$ite_6$は[Step 6]において解が更新される回数とする．近似解が更新された場合のみ，$|S|^3$の項に対応する[Step 6]実行されるため，実際に支配的な項は$ite_limit\times|S|^2|T|$である．

6. 数値実験

ノード数10から100までの問題を用いて，数値実験を行った．ノードを100×100の平面上にランダムに発

表-1 初期解からの改善率と計算時間

ノード数	施設数	リンク数	タブサーチ法 (%)	計算時間 (m:s)	ローカルサーチ法 (%)
10	3	63	9.1	0:01	6.5
20	6	329	28.5	0:01	26.7
30	9	609	37.6	0:04	34.2
40	12	1428	49.1	0:11	44.4
50	15	1715	54.1	0:22	43.5
60	18	2478	60.0	0:41	49.0
70	21	3381	57.7	1:10	42.3
80	24	4424	64.1	1:46	43.2
90	27	5607	65.8	2:47	34.3
100	30	6930	67.3	4:03	34.3

生させ，この内，発生ノード数を70％，候補施設数を30％とした．また，すべての需要量を10，施設の処理容量を5 $|N|$，施設での処理費用関数を$g_j = 10|N|\sqrt{x_j}$とした．リンクはすべての発生ノードと施設間に存在するものとし，リンクの容量を150，リンク費用関数を$f_{ij} = (i,j$間のユークリッド距離$) \times \sqrt{y_{ij}}$とした．また，$tabu\_length = |N|$，$tabu\_param = 0.1|N|$，$ite\_limit = 20|N|$，$pena_param = |N|$とした．

IBM互換(i486DX66)コンピュータ上のFORTRANを用いて，各ノード10問づつ計算を行い，平均値を求めた．初期解からの改善率と計算時間，および(1,0)*opt*を用いたローカルサーチ法によって得られた初期解からの改善率を表1に示した．提案した近似解法によって，ローカルサーチ法よりも3％から23％程度，良い解を求めることができた．また，発生ノード数70，候補施設数30までの問題に対して，パソコン上で数分以内で解を得ることができた．

7. むすび

本研究では，凹費用をもつ容量制約付き施設配置フロー問題に対して，タブサーチを用いた効率的な近似解法を提案した．この近似解によって，ローカルサーチ法よりも良い解を求めることができた．

本研究に当たり，多くの資料を提供して頂いた久保幹雄氏(東京商船大学)に対して，感謝の意を表します．また，本研究の一部は文部省科学研究費・一般研究(C)(代表者石井和克)および奨励研究(A)(代表者片山直登)の補助を受けたこと記し，感謝の意を表します．

参考文献

1) Zangwill, W.I. : Mininum Concave Cost Flows in Certain Networks, Manage. Sci., Vol.14, No.7, 1968.

2) Kubo, M. and Kasugai, H. : A Lagrangean Approach to the Facility Location Problem with Concave Costs, *J.Oper. Res.* Japan, Vol.34, No.2, pp.125–136, 1991.

3) Balakrishnan, A. and Graves, S.C. : A Composite Algorithm for a Concave-Cost Network Flow Problem, *Networks*, Vo.19, pp.175–202, 1989.

4) Phillips, K.J. et al. : Optimization of Areawide Wastewater Management, *J.WPCF*, Vol.54, No.1, pp.87–93, 1982.

5) Lenghton, J.P. and Shoemarker C.A. : An Integer Programming Analysis of the Regionalization of Large Wastewater Treatment, *Water Reso. Res.*, Vol.20, No.6, pp.671–681, 1984.

6) Joeres, E.F. et al. : Planning Methodology for the Design of Regional Waste Water Treatment Systems, *Water Reso. Res.*, Vol.10, No.4, pp.643–649, 1974.

7) Jarvis, J.J. et al. : Optimal Design of Regional Wastewater Systems : A Fixed-Charege Network Flow Model, *Oper.Res.*, Vol.26, No.4, pp.538–551, 1978.

8) Converse, A.O. : Optimum number and Location of Treatment Plants, *J.WPCF*, Vol.44, No.8, pp.1629–1636, 1972.

9) Zhu, Z.P., ReVelle, C and Rosing, K. : Adaptation of the Plant Location Model for Regional Environmental Facilities and Cost Allocation Strategy, *Ann.Oper.Res.*, Vol.18, pp.345–366, 1989.

10) Glover, F. : Tabu Search – Part I, *J.Comp.*, Vol.1, No.3, pp.190–206, 1989.

11) 久保幹雄 : Tabu Search and Simulated Annealing, 第30回ORシンポジウム, pp.19–30, 1994.

12) 久保幹雄 : タブサーチを用いた配送経路問題, working paper, 1994.