【土木計画学研究・講演集 No.17 1995年1月】

ラムゼイ価格均衡モデルとその計算法 *

Ramzey price equilibrium model and computing method *

宮城俊彦** ・鈴木崇児***

By Toshihiko MIYAGI** and Takaji SUZUKI***

1. はじめに

多くの公益企業は異なるサービスを異なる価格で提供している。交通企業に限定してみた場合でも、ピーク時／オフピーク時サービス、物流と旅客サービス、鉄道とバスサービスなどがある。異なるサービスに対しては異なる料金システムが用いられるのが普通である。一つの企業が複数のサービスを提供している場合の次善価格を決定する一つの方法がラムゼイ価格基準である。これは、サービスを提供する企業のゼロ利潤を前提に価格を決定する方式であり、規模の経済が働くサービスの場合で、単一サービスを提供する場合には、価格=平均費用という決定方式を導く。しかし、複数サービスの場合には、ゼロ利潤を満足する価格の組み合わせは、無数に存在する。その中で社会的厚生関数を最大にするように価格を決定する方法がRamsey(1927)[1]によって提案された。彼は最適な課税額を決定するためにこのモデルを考えたが、Baumol and Bradford (1970)[2] は、このモデルが次善価格の決定に利用できることを明らかにした。

宮城、早川 (1992)[3] は、ラムゼイ価格基準を用いた新交通システムの料金決定問題に適用し、ラムゼイ価格均衡モデルを提案している。すなわち、ラムゼイ基準を都市交通の料金決定問題に応用した場合、ラムゼイ基準を用いた公共輸送機関の料金決定は、利用者の交通モード選択に影響を与えるため、上位問題をラムゼイ価格決定問題、下位問題を機関分担・配分同時モデルとする2レベル最適化モデルとなる。

本研究は、宮城・早川によるラムゼイ価格均衡問題の解法を提案することを目的としている。本研究で提案する手法は、Kim and Suh (1988)[4] による最適交通網設計問題の解法に準拠している。すなわち、上位問題は下位問題の最適解の関数として表現される非線形最適化問題となるため、これを効率的に解くためには、下位問題の変数の関数として、上位問題の勾配を得ることができれば、上位問題はその勾配を情報として、各種の降下方向法で解くことができる。このような勾配は、Fiacco (1976)[5] あるいはTobin (1986)[6] によって確立された非線形感度分析を用いて求めることができる。以下ではラムゼイ価格均衡モデルの定式化及びラムゼイ価格決定法の概略を示し、その後、計算法に触れる。

2. ラムゼイ価格均衡モデル

（1）問題設定

宮城・早川によるラムゼイ価格均衡モデルは、以下に示すような2レベルNLP問題で与えられる。

［U1：ラムゼイ価格決定問題］

$$\max.\ F(\mathbf{p},\mathbf{q},\hat{\mathbf{q}}) = \sum_{rs} CS^{rs}(\mathbf{p},\mathbf{q},\hat{\mathbf{q}}) \tag{1a}$$

$$\text{s.t.}\ -\sum_{rs}\sum_{i\in R_{rs}} p_i^{rs}\hat{h}_i^{rs}(\mathbf{p}) + C(\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{p})) \le K \tag{1b}$$

$\{q_i^{rs}\}$ は[L1]の最適解

［L1：機関分担・配分統合モデル］

$$\min.\ f(\hat{\mathbf{q}},\hat{\mathbf{h}},\mathbf{h},\mathbf{x},\mathbf{p}) = \sum_{a\in A}\int_0^{x_a} t_a(x)\,dx + \sum_{b\in B}\int_0^{\hat{x}_a} \hat{t}_b(x)\,dx$$

$$+\frac{1}{\theta}\sum_{rs}\left\{\hat{q}^{rs}\left[\ln\frac{\hat{q}^{rs}}{q^{rs}} + \psi_{rs}\right] + (q^{rs}-\hat{q}^{rs})\ln\frac{(q^{rs}-\hat{q}^{rs})}{q^{rs}}\right\} \tag{2a}$$

＊キーワード：ネットワーク交通量、交通手段選択、応用ネットワーク均衡分析

＊＊正員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科
＊＊＊正員 工修 岐阜大学助手 工学部土木工学科
（〒501-11 岐阜県岐阜市柳戸1番1 TEL 058-230-1111
FAX 058-230-1528）

$$\text{s.t.} \sum_{k\in R_{rs}} h_k^{rs} + \sum_{i\in \hat{R}_{rs}} \hat{q}_i^{rs} = \overline{q}^{rs} \quad (2b)$$

$$\sum_{i\in \hat{R}_{rs}} \hat{h}_i^{rs} = \hat{q}^{rs} \quad (2c)$$

$$x_a = \sum_k \delta_{a,k}^{rs} h_k^{rs} \quad (2d)$$

$$\hat{x}_a = \sum_i \hat{\delta}_{a,i}^{rs} \hat{h}_i^{rs} \quad (2e)$$

$$h \geq 0, \hat{h} \geq 0, \hat{q} \geq 0, \mathbf{x} \geq 0, \hat{\mathbf{x}} \geq 0 \quad (2f)$$

ここに、

$CS^{rs}\{u(\mathbf{p},q,\hat{q}), \hat{u}(\mathbf{p},q,\hat{q})\}$
　：ＯＤペア間の消費余剰関数

$\mathbf{p} = \{\hat{p}_i^{rs}\}$：ＯＤペアｒｓのマストラのｉ番目路線の料金

$\mathbf{q} = \{q^{rs}\}$：ＯＤペアｒｓの自動車利用ＯＤトリップ数

$\overline{q}_{rs}$：ＯＤペアｒｓ間の総トリップ数

$\hat{\mathbf{h}} = \{\hat{h}_i^{rs}\}$：ＯＤペアｒｓ間のマストラのｉ番目路線利用者数

$C(q)$：マストラの結合費用関数

Ｋ：補助金

$\mathbf{h} = \{h_k^{rs}\}$：ＯＤペアｒｓ間の自動車台数のうちｋ番目のルートを利用する台数

$\mathbf{x} = \{x_a\}$：自動車ネットワークのリンクａの交通量

$\hat{\mathbf{x}} = \{\hat{x}_b\}$：マストラネットワークのリンクｂの交通量

$t_a(x_a)$：道路のリンクパフォーマンス関数

$\hat{t}_b(\hat{x}_b)$：マストラのリンクパフォーマンス関数

A：自動車ネットのリンク集合

B：マストラネットのリンク集合

R_{rs}：ＯＤペアｒｓ間の自動車の経路集合

$\hat{R}_{rs}$：ＯＤペアｒｓ間のマストラの経路集合

なお、[L1]において、一般性を失うことなく、乗用車の平均乗車は１人／台と仮定している。また、マストラに関係する変量は「∧」で自動車モードと区別する。リンクパフォーマンス関数は、時間と費用を線形結合した一般化費用で定義されているものと仮定する。

（２）ラムゼイ価格決定問題

[U1]は、マストラを運営する交通企業の赤字をある限度額Ｋ以下にするという条件で、次式に定義する利用者余剰を最大化する問題となる。

$$CS^{rs}(\mathbf{P}) = \int_p^0 \sum_{rs} \hat{q}^{rs}(\mathbf{p})\, dp_i^{rs} \quad (3)$$

ここに、$\hat{q}^{rs}$はマストラの需要関数

利用者の交通手段選択がランダム効用理論で記述できるものとし、所得レベルがｔである集団の余剰関数を次式で与える。当分の間ＯＤペアを記述する記号を省略する。

$$u_i^t = y^t - u_i + \varepsilon_i \quad (4)$$

ここに、

u_i^t：所得層ｔのグループがモード集合Ｍからモードｉを選択するときの知覚効用

y^t：所得層ｔの所得水準

ε_i：ランダム効用

u_i：モードｉの一般化費用は次式で定義される。

$$u_i = p_i + \omega t_i \quad (5)$$

ω：時間価値　t_i：所要時間

今、ある期間におけるｔグループのトリップ数をn^tとおき、ε_iが二重指数分布に従って分布すると仮定したときの期待効用ＥＵは次式で与えられる。

$$EU = \sum y^t n^t + \sum n^t \log \sum_{i\in M} \exp(-u_i) \quad (6)$$

式(6)の右辺の第２項は、負の値をとるので、これを

$$\overline{u} = -\sum_t n^t \log \sum_i \exp(-u_i) \quad (7)$$

とおきかえ、ＯＤペアトリップ数で式(6)を書き改めると、

$$\begin{aligned} EU &= Y - \sum_{rs} u^{rs} \\ &= Y - \sum_{rs} \overline{q}^{rs} \log \sum_{i\in M} \exp(-u_i^{rs}) \end{aligned} \quad (8)$$

となり、Ｙは定数なので[U1]は次のようになる。

[U1']

$$\min.F(\mathbf{p}) = -\sum_{rs} \overline{q}^{rs} \log \sum_{i\in M} \exp(-u_i^{rs}(\mathbf{p})) \quad (1a')$$

$$\text{s.t. (1b)} \quad (1b')$$

今、単一ＯＤペアを考え、ｉ=2（i∈M）の場合を考えると、[U1']の最適解は、図１のように与えられる。

すなわち、利用者の消費者余剰を大きくするためには、トリップに消費するコストを小さくすればよく、$\bar{u}_1$は$\bar{u}_2$よりもより大きな消費者余剰を与える。uは、pに関し単調増加関数であり、原点に関し凹関数である。従って、原点に近づけば近づく程に$\bar{u}$は小さく、しかし、ある範囲を超えるようなpの設定は、制約条件を満足しない。(1b)で与えられる制約集合は、原点に関する凸集合であり、図の斜線部分で与えられる。

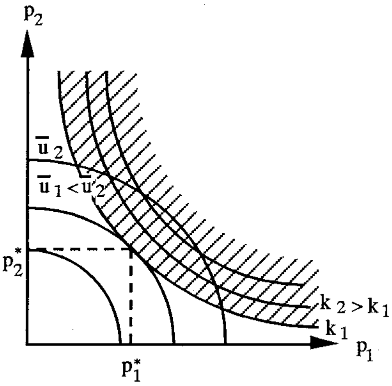

図１［U1'］の最適解

（３）機関分担・配分モデルの解の特性

[L1]の最適解が満足すべき条件は以下のようである。

$$\frac{1}{\theta}\ln\frac{\hat{q}^{rs}}{q^{rs}-\hat{q}^{rs}} - u_{rs} + \psi_{rs} + \hat{u}_{rs} = 0 \tag{9a}$$

$$\left(\hat{c}_l^{rs} - \hat{u}^{rs}\right)\hat{h}_l^{rs} = 0 \tag{9b}$$

$$\hat{c}_l^{rs} - \hat{u}^{rs} \geq 0 \tag{9c}$$

$$\left(c_k^{rs} - u^{rs}\right)h_k^{rs} = 0 \tag{9d}$$

$$c_k^{rs} - u^{rs} \geq 0 \tag{9e}$$

and　(2b)～(2f)

式(11a)は次のように書き改めることができる。

$$\hat{q}_{rs}^{rs} = \frac{\hat{q}^{rs}}{1+\exp\left(\hat{u}_{rs} - u_{rs} + \psi_{rs}\right)} \tag{10}$$

３．ラムゼイ価格均衡モデルの解法

（１）２レベル最適化問題

２．で定式化されたラムゼイ価格均衡問題を再掲する。

[U2]　　$\min_{\mathbf{p}} F(\mathbf{z}(\mathbf{p}),\mathbf{p})$

$\qquad$ s.t. $G(\mathbf{z}(\mathbf{p}),\mathbf{p}) = \mathbf{0}$

ここに、$\mathbf{z}(\mathbf{p})$は[L1]の最適解である。

[L2]　　$\mathbf{z}(\mathbf{p})$; $\min_{\mathbf{z}} f(\mathbf{z},\mathbf{p})$

$\qquad$ s.t. $g(\mathbf{z},\mathbf{p}) = \mathbf{0}$

$\qquad$ $\mathbf{z} \geq 0$

上の問題において、$\mathbf{z}$ は前の問題のフロー変数$\left[\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{h}}, \mathbf{h}, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}\right]$に対応している。この種の問題は２レベル最適化問題あるいはシュタケルベルグのリーダー・フォロワー問題と呼ばれ、解の特性はBard (1983)[7]や志水 (1982)[8]によって与えられている。[U2]は交通政策決定者の意志決定を定式化しており、ラムゼイ価格決定では$\mathbf{p} \in R^{n_1}$をコントロールする。一方、下位問題は交通ネットワーク利用者の意志決定構造を反映しており、$\mathbf{p}$を与えられたときの$\mathbf{z} \in R^{n_2}$をコントロールする。交通政策に関連する意志決定問題は、ネットワーク構造を前提にしたとき、上記のような２レベル最適化問題となるので、この種の問題を応用ネットワーク分析と呼ぶことができる。応用ネットワーク分析のよく知られた典型的な問題はネットワーク設計問題（朝倉(1988)[9]、河上・溝上(1985)[10]）である。ネットワーク設計問題の場合には$\mathbf{z}$ は必ずしも連続変数とは限らず、離散変数として定義されることもある。

また、下位問題についても[L2]は変分不等式(VI)問題として一般化される場合もある。本研究で対象とする２レベル問題は[U2]が連続変数として定義され、[L2]がＮＬＰで与えられる場合に限定しているが、[L2]が変分不等式問題として定式化される場合にも適用可能である。

（２）非線形感度分析の応用

非線形感度分析については、ＮＬＰに対しFiacco (1976)[5]及びＶＩに対しTobin(1986)[6]の研究がある。Kim and Suh (1988)[4]及びKim (1990)[11]はＮＬＰ感度分析が２レベル最適化問題に利用できることを示した。ここでは、[L1]に対応したアルゴリズムを示す。今、$\mathbf{p}$を摂動変数とするＮＬＰである[L1($\mathbf{p}$)]を考える。なお、以下においては、[L1]がFrank-Wolfeのアルゴリズムで解けることを前提に、最適解が非負であることを仮定し、また、経路集合R_{rs}、$\hat{R}_{rs}$の要素が識別できるものと仮定する。すなわち、(11c)、(11e)で等号の成立する経路は分かっている。これらの路線集合をR_{rs}^*、$\hat{R}_{rs}^*$とおく。

$$\nabla_{\hat{q}}L(\mathbf{y},\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{\theta}\ln\frac{\hat{q}^{rs}}{\bar{q}^{rs}-\hat{q}^{rs}} - u_{rs}(\varepsilon) + \hat{u}_{rs}(\varepsilon) + \psi_{rs} = 0 \quad (11a)$$

$$\nabla_{\hat{h}}L(\mathbf{y},\boldsymbol{\varepsilon}) = \hat{c}_i^{rs}\left(\hat{\mathbf{h}}(\varepsilon)\right) - \hat{u}^{rs}(\varepsilon) = 0,\ i\in\hat{R}_{rs}^{*} \quad (11b)$$

$$\nabla_{h}L(\mathbf{y},\boldsymbol{\varepsilon}) = c_k^{rs}\left(\mathbf{h}(\varepsilon)\right) - u^{rs}(\varepsilon) = 0,\ k\in\hat{R}_{rs}^{*} \quad (11c)$$

$$\nabla_{\hat{u}}L(\mathbf{y},\boldsymbol{\varepsilon}) = \hat{q}^{rs}(\varepsilon) - \sum_{i\in\hat{R}_{rs}^{*}} \hat{h}_i^{rs}(\varepsilon) = 0 \quad (11d)$$

$$\nabla_{u}L(\mathbf{y},\boldsymbol{\varepsilon}) = \bar{q}^{rs} - \hat{q}^{rs}(\varepsilon) - \sum_{k\in R_{rs}^{*}} h_k^{rs}(\varepsilon) = 0 \quad (11e)$$

ただし、上式の引数は$\mathbf{y} = \left(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{h}}, \mathbf{h}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}\right)$ である。$\nabla L(\mathbf{y}, \boldsymbol{\varepsilon})$ の$\boldsymbol{\varepsilon}$に関するヤコビアンが正則であるためには、［L1］の目的関数が$\boldsymbol{\varepsilon}=0$で厳密な凸関数である必要がある。今、摂動$\boldsymbol{\varepsilon}$に対する各モードのＯＤトリップ数$\{\mathbf{q}, \hat{\mathbf{q}}\}$ の変化量が分かるならば、R_{rs}^{*}、$\hat{R}_{rs}^{*}$ は判断されているので、各経路のフローの変化量、したがって、$\{\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}\}$ の変化量を求めることができる。この推測をＮＬＰ感度分析を応用して数学的に記述すると以下のようである。以下の展開において次の定義式を用いる。

$$\nabla_{xz}L(x, z) = \frac{\partial L_x(x, z)}{\partial z} \quad (12)$$

$$\nabla_{xz}L(\mathbf{0}) = \nabla_{xz}L(x, \mathbf{0}) \quad (13)$$

$$\nabla_{yy}L(\mathbf{O}) = \left(\begin{array}{ccc|cc} \frac{1}{\theta}\,\mathbf{dig.Q} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{o} & \Delta\hat{C}(\hat{\mathbf{h}}, 0) & \mathbf{o} & -\mathbf{I} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \Delta C(\mathbf{h}, 0) & \mathbf{o} & -\mathbf{I} \\ \hline \mathbf{I} & -\hat{\Lambda} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{o} & -\Lambda & \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{array}\right) \quad (14)$$

dig.Q は、$\left[\dfrac{\bar{q}^{rs}}{\hat{q}^{rs}(0)\left(\bar{q} - \hat{q}^{rs}(0)\right)}\right]$ を対角要素とするｍ×ｍ行列$\boldsymbol{\Lambda}$は次式で定義されるＯＤペア経路行列

$$\boldsymbol{\Lambda} = \left\{\Lambda^{rs}\right\},\ \Lambda^{rs} = \begin{cases} 1, & k\in R_{rs}^{*} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (15)$$

$\hat{\boldsymbol{\Lambda}}$ についても同様である。

$$\Delta C(\mathbf{h}, 0) = \sum_{k\in R_{rs}^{*}} \delta_{a,k}^{rs}\frac{dt_a(x_a, 0)}{d\,x_a} \quad (16)$$

$$\Delta\hat{C}(\hat{\mathbf{h}}, 0) = \sum_{i\in\hat{R}_{rs}^{*}} \delta_{a,i}^{rs}\frac{d\hat{t}_b(\hat{x}_b, 0)}{d\,\hat{x}_b} \quad (17)$$

とおいている。また、

$$\nabla_{yy}L(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\theta}\mathbf{1} \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \\ -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{1} \\ \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (18)$$

，$\mathbf{1}$は全ての要素が１である列ベクトル

を得る。したがって、ＮＬＰ感度分析の結果より、

$$\left[\nabla_{yy}L(0)\right]\frac{\partial\mathbf{y}(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p}} = -\left[\nabla_{yp}L(0)\right] \quad (19)$$

が成立し、

$$\left[\frac{\partial\mathbf{y}(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p}}\right] = -\left[\nabla_{yy}L(0)\right]^{-1}\left[\nabla_{yp}L(0)\right] \quad (20)$$

として、$\mathbf{p} = \{p_i^{rs}\}$ の変化に対応した［L1］の変量の勾配を求めることができる。［Ｕ1］は、$\mathbf{y} = \left(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{h}}, \mathbf{h}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}\right)$ の関数であるから、$d\mathbf{y}(\mathbf{p})/d\mathbf{p}$の情報を用いて降下方向法を用いた手法で解くことができる。

参考文献

1)Ramsey, F. : A contribution to the theory of taxation, Economic Jaurnal, 37(1), 47-61, 1927.

2)Baumol, W. and D. Bradford : Optimal departure from marginal cost pricing, Americal Economic Review, 60(3), 265-283, 1970.

3)宮城俊彦・早川清史：ラムゼイ価格均衡モデルとガイドウェイバスの料金決定問題, 土木計画額研究・講演集, No15(1), 451-456, 1992, 11.

4)Kim,T.J. and Suh, S. : Toward developing a national transportaion planning model ; A bilevel programming approach for Korea. The annals of Regional Science, 65-80, 1988.

5)Fiacco, A.V.: Sensitivity analysis for nonlinear programming, 10, 287-311, 1976.

6)Tobin, R, L. : Sensitivity analysis for variational inequalities, Journal of Optimization Theory and Application, 48(1), 191-204, 1986.

7)Bard, J, F. : An algorithm for solving the general bi-level programming problem. Mathematics of Operations Research, 8 : 260-272.

8)志水清孝：多目的と競争の理論, 共立出版, 1982.

9)朝倉康夫：利用者均衡を制約とする交通ネットワークの最適計画モデル, 土木計画学研究・論文集, No.6, 1-19, 1988, 11.

10)河上省吾・溝上章志：分担・配分過程結合交通需要予測モデルとそれを用いた最適バス輸送計画策定手法の開発, 土木学会論文集, 第353号/IV-2, 105-109, 1985, 1.

11)Kim, T. J. : Advanced Transport and Spatial System Models, Springer-Verlag, New York, 1990.