【土木計画学研究・講演集 №15(1) 1992年11月】

整数2次計画法による 航空機材のスケジューリングモデル

Integer Quadratic Programming Model for Aircraft Scheduling

鬼柳 雄一*, 徳永 幸之**, 稲村 肇***
by Yuichi KIYANAGI, Yoshiyuki TOKUNAGA, Hajime INAMURA

An airline network which links local airports sometimes includes several non-profitable air routes. In this case, it is required to consider the network involving connecting flights to get additional revenue. The purpose of this paper is formulating an aircraft scheduling model which can take into account the transit passengers. Quadratic programming is applied to optimize the aircraft schedule and then the branch-and-bound method is applied to adjust the real number solutions to integer. The network considered here is a general type (called round and robins) which includes the hub and spoke network. The quadratic programming approach makes possible to take into account the transit passengers since it can deal a pair of flights simultaneously. The model is applied the airline network in Tohoku district. It was found that the schedules involving connecting flights can get more profit than those of combination of direct flights.

1. 序論

コミューター航空や開発途上国の国内航空などの比較的小規模な航空ネットワークにおいては、需要が少ないなどの理由により、その採算性が問題となっている。このような状況下では、少しでも採算性が向上するように、直行便に限らず乗り継ぎ便も考慮して保有機材を効率よく運航することが重要である。Wheeler[1] によれば、ハブ&スポーク型ネットワークは、需要の少ない空港間に対してもハブ空港を経由する乗り継ぎ便を運航することにより高頻度のサービスが可能である、といった長所をもつ。しかし本研究が対象としている比較的小規模なネットワークでは、運航頻度が少ない場合や地理的にハブ空港を設定できない場合も多く、ハブ&スポーク型に限定するのが望ましいとは限らない。このような場合には、全ての空港間を結ぶ路線を考えるラウンド&ロビン型ネットワークに対してスケジューリングを考えることが望ましい。

これまでの航空ネットワークのスケジューリングに関する研究は、Etschmaierら[2] により整理されている。すなわち、1950年代以降主に米国において数理計画法によるスケジューリングが研究されてきた。しかし米国の航空ネットワークの規模が大きいことや制約が非常に多いことから、数理計画法によるアプローチは停止し、1960年代以降は旧来の単純なスケジューリング結果について、各部門の専門家が種々の代替案を検討し、フィードバックによる修正によりダイヤを策定する、いわゆるマン・マシン・システムの研究が主流をなしている。しかし本研究で想定しているネットワークは小規模であるため、数理計画法で扱うことが可能であればそのほうが望ま

ｷｰﾜｰﾄﾞ：航空スケジューリング，2次計画，分枝限定法
* 学生員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻
(〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)
** 正会員 東北大学助手 工学部土木工学科
***正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

しい。

Simpson [3] は航空スケジューリングモデルを次のようなサブモデルに分割している。

① 航空機材の保有に関する計画を作成するモデル
② 各路線の最適運航頻度を定めるモデル
③ 各路線の最適出発時刻を定めるモデル
④ 各機材の最適運航計画を定めるモデル
⑤ 機団全体の最適運航計画を定めるモデル

このうち②，③，④については数理計画法によるモデルが数多く構築されている。線形計画法によるモデルでは、Dantzig [4] による航空機の各路線への最適な配分数を求めるモデルや、Handlerら[5] によるハブ＆スポーク型ネットワークにおける乗り継ぎを考慮した運航頻度決定モデルなどがある。また動的計画法によるモデルもSimpson[3] の最適出発時刻を求めるモデルなど数多くある。しかしこれらのモデルは個々のサブモデルを対象としたものであり、全体のスケジュール作成のためにはフィードバックを繰り返す必要がある。②，③を統合したモデルとして、田村ら[6] による列挙法に分枝限定法を用いた機材のスケジューリングモデルや、Daskinら[7] による線形計画法を用いた機材のスケジューリングモデルなどがある。これらはいずれもハブ＆スポーク型ネットワークに限定しておりラウンド＆ロビン型のネットワークには対応していない。

2. 本研究の目的

筆者ら[8] は、ラウンド＆ロビン型のネットワークを対象として運航頻度，出発時刻，運航路線の選定を同時に行うことが可能な航空機材のスケジューリングモデルを提案した。これは航空機材のスケジューリング問題を整数線形計画法を用いて定式化したものである。しかしこのモデルには次のような問題点がある。

①乗り継ぎ利用客の取扱いができない。
②夜間駐機等の空港側制約条件を取り込むことが困難である。
③飛行の連続性が保証されない。

これらの問題点は主に、線形計画法における目的関数が線形であることに起因している。

本研究では、これらの問題点を解決するため、整数線形計画モデルを拡張し、目的関数が２次式である整数２次計画モデルを作成する。また、このモデルを東北地方の航空ネットワークに適用し、検討を行う。

3. ２次計画問題とその最適化の条件

２次計画問題をベクトル表示すると (1)式のもとで (2)式を最小化することと表される（ただし ' は転置を表す）。

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b} \tag{1}$$

$$F(\mathbf{x})=\mathbf{p}'\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x} \tag{2}$$

２次計画問題を解く方法にはいくつかあるが、本研究ではWolfe [9] の方法を用いる。これは、目的関数にラグランジュ乗数を導入して制約条件を取り込み、Khun-Tucher の定理によって最適解を求める方法である。Wolfe の方法は２次計画問題を線形計画法のシンプレックス法に帰着させて解くため、線形計画法の計算プログラムに若干の変更を加えることにより２次計画問題にも適用できることがその長所といえる。

4. ２次計画法による定式化

（１）決定変数

決定変数を導入するにあたり、まず空港運用時間を適当な間隔で分割する。航空機はこの各時間断面においてのみ出発できるものとし、この時間断面を時刻ｋと呼ぶことにする。

ここで、考えられ得る全てのフライト案に対して、各フライト案に機材を割り当てるか否かを表す決定変数 x^{h}_{kij} を設定する。

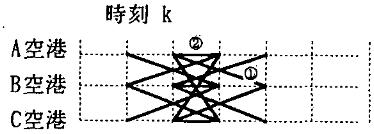
$$x^{h}_{kij}=\begin{cases}1 & \text{（割り当てる）}\\ 0 & \text{（割り当てない）}\end{cases} \tag{3}$$

（ｈ：機材，ｋ：出発時刻，
ｉ：発空港，ｊ：着空港）

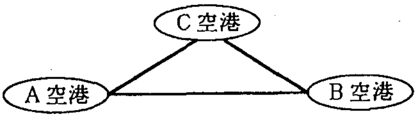
フライト案には、ある空港から他空港に運航する場合の他に、その空港に駐機する場合も含むものとする。このように駐機も一つの決定変数として考え、４－（２）に述べるように制約条件を変更することにより、決定変数の数は増加するが筆者らの研究で課題として残されていた”飛行の連続性”の問題は解決される。

（２）制約条件

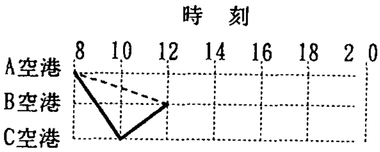
制約条件としては、ある時刻ｋに関係する各フライト案に着目し機材を割り当てることを考える。すなわち、時刻ｋにおいて出発、飛行中、あるいは空



図－４・１　制約条件



図－４．２　乗り継ぎ利用が可能なネットワーク



図－４・３　乗り継ぎ利用が可能なフライト案の組み合わせ

港に駐機するという全てのフライト案のうちただひとつに各機材を割り当てるものとする。図－４・１は時刻ｋにおける全てのフライト案を示している。時刻ｋについては各機材毎に、これら太線で示されたフライト案のうちただひとつを選択することになる。（①はｋ時発Ａ空港→Ｂ空港を表し、②はｋ時にＡ空港に駐機することを表す。）

従って制約条件式は、(4)式で表される。

$$\sum_k\sum_i\sum_j x^h_{kij} = 1 \qquad (4)$$

（３）目的関数

本研究では、各フライト案が実現した場合の航空会社の運航利益の総和を最大化することを目的とする。ここで運航利益とは直行便による利益と乗り継ぎ旅客の発生による利益の増加分の和であると考える。本研究の目的関数は (5)式で表され、１次式と２次式の和の形となっている。

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{p}'\mathbf{x} + \mathbf{x}'P\mathbf{x} \qquad (5)$$

１次式の係数ベクトル$\mathbf{p}'$は各直行便の運航利益を要素としている。また２次式の係数マトリックスPは、乗り継ぎによる利益の増加分、及び制約条件としての機能をもつ罰金、または０を要素とするマトリックスである。

ａ）直行便の運航利益

本モデルでは全てのフライト案についてそのフライトが実現した場合の運航利益を既知としている。これらの値が目的関数の１次式の係数となり、それぞれ対応する変数が１となった場合にだけ、この利益が実現される。なお駐機する場合の運航利益は０とする。

ｂ）乗り継ぎ利用客の発生による利益の増加分

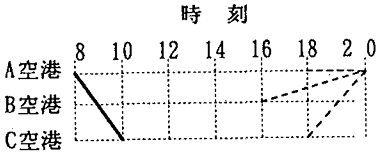
図－４・２は、乗り継ぎ利用が可能なネットワークを示している。ここでＡ空港からＢ空港に向かうフライトを考える。フライトＡＢとフライトＡＣＢの所要時間の差がそれほど大きくない場合には、フライトＡＣＢに乗り継ぎ利用客が発生し、フライトＡＣ，ＣＢの単独の運航利益に加えて、さらに利益の増加が見込めると考える。本モデルでは、直行便ＡＢの潜在需要の一部が乗り継ぎ便を利用すると想定してこの利益増加分を計算した。この値を２次式の係数として与え、乗り継ぎを取り扱う。乗り継ぎ可能な一組のフライト案に対応する変数が同時に１となった場合にこの乗り継ぎによる利益の増分が実現されることになる。

図－４・３は、乗り継ぎ利用が可能なフライト案の組み合わせを示している。すなわち、8:00発ＡＣと10:00発ＣＢが実現するときには、8:00発ＡＢの潜在需要の一部が8:00発ＡＣと10:00発ＣＢの潜在需要に加算されると考えて利益増加分を計算する。

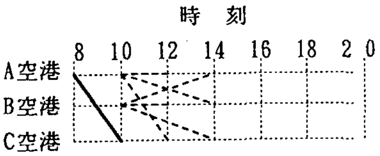
ｃ）母空港の選定と夜間駐機

航空機はその整備や乗務員の宿泊のため、空港運用時間内にその日最初に運航を開始した空港（母空港）に戻ってくることが望ましい。すなわち、その日最初のフライトの発空港と最後のフライトの着空港が一致することが望ましい。一致していない場合には大きな費用がかかると考え、このようなフライトの組み合わせには２次式の係数に費用の値（負の値）を与える。なお、母空港に戻っている場合には０を与える。

図－４・４は、母空港に戻っているフライト案を示している。最初のフライトが8:00発ＡＣだった場合には最後のフライトは点線で示すフライト案のうちから選択することが望ましい。このほかのフライトには費用を与える。



図－４・４　母空港に戻っているフライト案



図－４・５　回送不可能なフライト案

ｄ）回送制約

ある一組のフライト間の回送時間が不足している場合、この変数の２次式の係数に罰金を与え、同時に１とならないようにする。なお、回送可能な場合は０を、乗り継ぎ可能な場合には利益増加分を与える。図－４・５は、回送不可能なフライト案を示している。フライト案8:00発ＡＣについては、同時に点線で示すフライト案が実現されないようにする。

５．　解の整数化

本研究で考える問題は、あるフライト案に各機材を割り当てるか割り当てないかを決定する０－１整数問題である。しかし第４章の定式化によると解は一般に実数解となる。従って本研究では分枝限定法を適用して解の整数化を行った。本研究における制約条件式は、各時刻からフライト案を一つずつ選ぶという内容になっていることより、各時刻毎に、あるフライト案が実現した場合（すなわち各時刻で、ある変数を１とし、他は０とした場合）を子問題として次の手順により分枝操作を行った。

①原問題を最も早い時刻について子問題に分割する。

②各子問題を２次計画法により計算し、最も大きい目的関数値（上界値）をもつものについてさらに次の時刻について子問題をつくり計算する。

③この方法で分枝が最後の時刻まで到達したらそのときの目的関数値を暫定値とし、そのときの解を暫定解とする。

④その暫定値より大きい上界値をもつ子問題を探索し、分枝してゆく。

⑤暫定値より上界値が小さい場合はそれ以上分枝しても解が改良されることはないため分枝を停止する。

⑥最初の暫定値より大きい目的関数値をとる実行可能解が見いだされた場合には、その目的関数値を新しい暫定値とする。

⑦以上の手順により暫定値を更新してゆき最終的な暫定値をもつ解が最適解となる。

６．　２次計画法の適用における問題点とその対策

（１）目的関数の凸性

(2)式の全域的最小（最適解）が保証されるためには、(2)式が凸関数でなければならない。(2)式の１次の項は凸関数であるため、$\mathbf{x'Px}$が凸関数であれば(2)式は凸関数となる。これは、$\mathbf{P}$が正定値行列でなければならないことを意味している。

(5)式を最小化問題として書き換えると(6)式で表される。

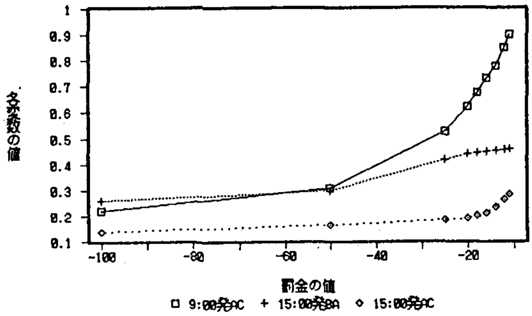
$$\mathbf{f(x)=-p'x-x'Px} \tag{6}$$

本定式化によると行列（$-\mathbf{P}$）は一般に正定値ではない。このため解の最適性が保証されない。これに対する対策として、（$-\mathbf{P}$）の対角要素に着目し、便宜的にこの対角項に一律に負の値を与えた。対角項は同一変数の２乗の項の係数であり、この値は元々全て０である。この操作により（$-\mathbf{P}$）を正定値にすることはできるが、関数形が変化する。しかし、解の整数化により各フライト案の所要時間が一定であれば対角項の和は一定値となるため、導出された解に影響はない。

ここで、罰金の値を一定にして（$-\mathbf{P}$）が正定値となるように対角項の値を上下させてみたところ、対角項の値は罰金の値に依存していることがわかった。よって本研究では対角項を罰金の値のａ倍と仮定し、（$-\mathbf{P}$）が正定値となるようにａを定めた。対角項が罰金のａ倍以上であれば最適性は保証される。しかし対角項の絶対値を罰金に比して大きすぎる値に設定すると、得られる解に影響し、６－（２）で述べるような問題を生じてくるため、対角項の絶対値はできるだけ小さく設定することが望ましい。しかし、それぞれの問題についてその都度ａの値を定めなければならない。

（２）罰金の設定

本研究では２次計画法によって得られた値をもとにして解を整数化するという性格上、最適解として



図－６・１　罰金の変化による実数解の変化

選ばれるべき変数の実数解の値は１に近い方がよい。また２次計画法による解が制約を満たすためには、罰金の絶対値は大きいほうが望ましい。しかし本研究の考え方では、罰金の絶対値を大きくすると得られる実数解が平均化する。

図－６・１は最適解が既知である問題について、罰金の変化による実数解の変化を示したものである。これによると罰金の絶対値が大きい場合は各変数の値に差がみられなくなることがわかる。これは罰金の絶対値の増加に伴って対角項の絶対値も増加するためで、各変数に均等に値を分散させ対角項の影響を少なくした方が目的関数を最大化させることになるためである。実数解が平均化すると整数化する際の分枝の数が増加するため、計算時間が増大するという問題が生じる。

また罰金の絶対値が小さくなるにつれて最適解である”□”と”＋”で表される変数の値が増加するが、罰金を与えて制限している”◇”で表される変数の値も増加する。これは罰金が制約条件としての機能を果たしていないため、罰金を与えて制限している変数が最適解として選ばれてしまう可能性もあるということを示している。

上記の問題点を考慮すると、罰金の絶対値は制約条件としての機能を十分に果たす範囲内で最小とすればよいことがわかる。よって本研究では次のように罰金，対角項を設定した。

①まず罰金の絶対値を小さめに設定しておく。
②（－P）が正定値となるように対角項を定める。
③計算を行ってそれが制約を満たした解であれば最適性が保証される。
④制約を満たさない解となった場合、罰金の絶対値を少しずつ大きくして最適解が得られるまで②③の操作を繰り返す。

ここで①は未だ経験的に定めているという状態である。しかしシミュレーションの結果から、罰金の値は１次式の係数（直行便の運航利益）で負の値をとっているもののうち平均的なものと同程度の値に設定すれば十分その機能を果たすことがわかっている。

７．　適用例

適用例として東北地方の航空ネットワークに本モデルを適用する。空港は図－７・１に示すように４空港、機材はＹＳ－１１型１機（座席数64）を用いるものとする。１日の潜在需要は表－７・１のように仮定した。各時刻ごとの需要は筆者らの研究[8]と同様に算出し、直行便の運航利益を求めた。また乗り継ぎ旅客は、仙台－秋田－青森と新潟－秋田－青森にのみ発生するとした。これによる運航利益の増分については、乗り継ぎ便が運航された場合それに対応する直行便の潜在需要の50％が乗り継ぎ便の需要に加算されると想定して算出した。

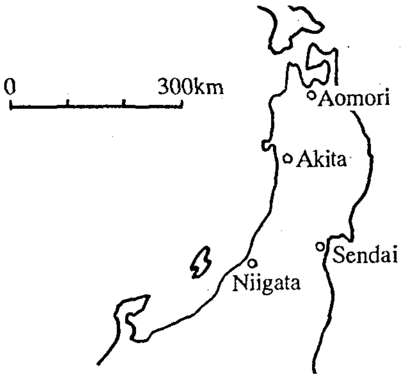
図－７・２は乗り継ぎを考慮せずにスケジューリングした場合、図－７・３は乗り継ぎを考慮した場合の結果を示している。乗り継ぎを考慮しない場合、仙台新潟間の需要が多いため青森方面のフライトは運航されないが、乗り継ぎを考慮すれば、仙台→秋田→青森の乗り継ぎ便が運航されるスケジュールが作成され、乗り継ぎ旅客を考慮した本モデルの効果が確認された。

さらに、新潟が関係する路線を除いて潜在需要を２０％増加させたところ、乗り継ぎを考慮しない場合は図－７・４、乗り継ぎを考慮した場合は図－７・５のようなスケジュールとなった。乗り継ぎを考慮しない場合、仙台弘前間の直行便が運航されるが、乗り継ぎを考慮すれば仙台－秋田－青森間の乗り継ぎ便が運航されることがわかる。

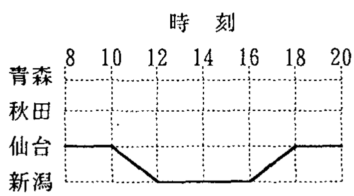
また、各ケース共に、母空港は仙台空港にすればよいこともわかる。

表－７・１　空港間潜在需要（人／日）

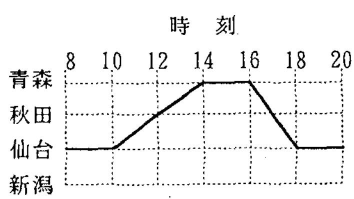
空港	青森	秋田	仙台	新潟
青森		157	168	131
秋田	150		168	130
仙台	170	184		247
新潟	133	138	239	



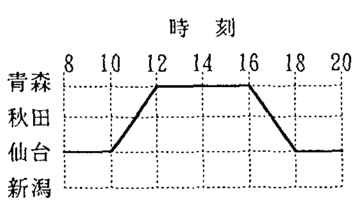
図－７・１　東北地方の仮想航空ネットワーク



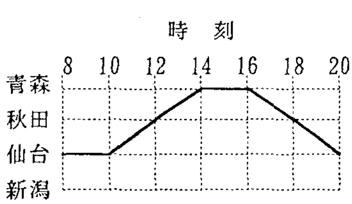
図－７・２　乗り継ぎを考慮しないスケジュール



図－７・３　乗り継ぎを考慮したスケジュール



図－７・４　新潟発着の路線を除いて潜在需要を20%増加させ、乗り継ぎを考慮しない場合



図－７・５　新潟発着の路線を除いて潜在需要を20%増加させ、乗り継ぎを考慮した場合

８．　結論

本研究では、航空機材のスケジューリング問題を、整数２次計画法の適用により定式化し、最適な運航スケジュールを求めることができるモデルを作成した。これによって、線形計画モデルでは考慮することが出来なかった乗り継ぎ利用客の取扱いも可能となった。またこのモデルでは自動的に母空港を定めることが可能となり、夜間駐機の問題についても解決できた。

しかしその反面、制約条件としての罰金の値を決定するのに若干のイタレーションが必要であることなど実用上の問題点も明らかとなった。

今後の課題としては、罰金の値の設定法を確立すること、分枝限定法の分枝操作の効率の向上が挙げられる。

参考文献

1)C.F.Wheeler: "Strategies for Maximizing the Profitability of Airline Hub-and-Spoke Networks" ; Transportation Research Record, No.1214, pp.1-9, 1989

2)M.M.Etschmaier, D.F.X.Mathaisel: "Airline Scheduling : An Overview" ; Transportation Science, Vol.19, No.2, pp.127～138, 1985

3)R.W.Simpson: "Scheduling and Routing for Airline Systems"; MIT Flight Transportation Laboratory Report, R68-3, 1969

4)G.B.Dantig（小山訳）：線形計画法とその周辺；ホルト・サウンダース, pp.705-731, 1983

5)G.Handler, R.W.Simpson: "A Fleet Assignment Model Incorporating Connecting Services"; MIT Flight Transportation Laboratory Memorandum, M74-4, 1974

6)田村，稲野：地域航空における機材の最適スケジューリング；土木計画学研究論文集, No.5, pp.155～162, 1987

7)M.S.Daskin, N.D.Panayotopoulos: "A Lagrangian Relaxation Approach to Assaigning Aircraft to Routes in Hab and Spoke Network"; Transportation Science, Vol.23, No.2, pp.91～99, 1989

8)徳永，稲村：多空港間航空ネットワークのスケジューリング　－ＬＰモデルとＤＰモデルの比較－，土木計画学研究講演集, No.13, pp.607～614, 1990

9)三根：オペレーションズ・リーサーチ（上）；朝倉書店 pp.151-164