

波動理論による系統信号系の衝撃波伝播解析

An Analysis of Shock Wave Propagation in Coordinated Signal Systems

久井 守*
佐々木 聡**

By Mamoru HISAI and Satoshi SASAKI

This paper describes a model which, by applying the wave theory, draws the trajectories of shock waves propagating from link to link of coordinated traffic signal systems. A BASIC program is developed to draw the time-space diagrams of shock waves in each link on the personal computer display in turn under arbitrary road, traffic and signal conditions. In addition, the delay in each link and inflow traffic from main and cross roads at each intersection can be easily calculated. This paper expands the model by Michalopoulos et al., which target is confined to a single signalized link, so as to be able to apply to arterial streets made up of given number of links.

1. はしがき

本研究は、波動理論によって、系統信号系のリンクを次々と伝播していく衝撃波の軌跡を時間距離図上に描いたものである。波動理論はLighthill・Whitham¹⁾以来多くの研究が行われてきた。一般街路についてはStephanopoulos等、Michalopoulos等は単一リンクを対象とした解析的モデル²⁾³⁾を提案し、池之上が過飽和複数リンクへの展開を試みた⁴⁾⁵⁾。しかしMichalopoulos等のモデルにおいては、単一リンクしか対象としておらずこれをそのまま複数リンクに応用することができない。また、池之上のモデルにおいては複数リンクに適用されているが、過

飽和路線しか取り扱っておらず不十分である。福山等は複数リンクについて非定常状態の近似解析を解析を行っている⁶⁾⁷⁾。一方、高速道路については奥谷・井上は事故渋滞について解析を行っている⁸⁾⁹⁾。久井・田村は主にMichalopoulos等および池之上の研究に基づいて、非飽和および過飽和の定常状態の系統信号の両路線について波動伝播モデル¹⁰⁾の開発を試みた。

本研究は、久井・田村の研究を発展させ

- ①交差道路からの右左折流入がある場合とない場合を扱い、
- ②対象路線最上流交差点流入部が過飽和と非飽和の両方を扱う

ことができるようにしたものである。

本研究では、系統信号系における衝撃波の伝播を体系的に表現できる解析的モデルを定式化し、交差点において発生する待ち行列と、リンク間を伝播する衝撃波の軌跡を描く。具体的にはパソコンを用い

キーワード：波動理論，伝播軌跡，複数リンク

*正会員 工博 山口大学助教授 工学部 知能情報システム工学科 (〒755 宇部市常盤台2557)

**学生会員 山口大学大学院 知能情報システム工学専攻 (同上)

て、交差点における待ち行列の伸縮と、各衝撃波が複数リンクにまたがって伝播していく現象をリンクごとに計算し、それを視覚的にとらえやすくするために時間距離図上にグラフィック表示するものである。

本研究では、交通流を圧縮性流体と見なし、密度(K)-速度(u)関係を線形(Greenshieldsの式)と仮定する。これより交通量(q)-密度(K)曲線は、図-1に示すように放物線となる。

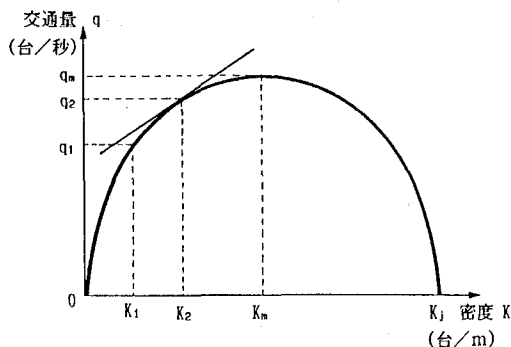


図-1 交通量(q)-密度(K)曲線

2. 衝撃波の伝播軌跡の解法

衝撃波とは、道路上において交通密度が不連続に変化する点である。衝撃波の伝播速度 u_w は、次式で表される。

$$u_w = \frac{K_d u_d - K_u u_u}{K_d - K_u} \quad (1)$$

K_u : 上流側の交通密度

u_u : 上流側の交通流の速度

K_d : 下流側の交通密度

u_d : 下流側の交通流の速度

ここで速度(u)と密度(K)の関係を

$$u = u_f (1 - K/K_j) \quad (2)$$

u_f : 自由速度

K_j : ジャム密度

と仮定すると衝撃波の伝播速度は次式になる。

$$u_w = u_f \left(1 - \left(\frac{K_d}{K_j} + \frac{K_u}{K_j} \right) \right) \quad (3)$$

式(3)は次のように書くことができる。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u_f}{K_j} (K_j - K_d - K_u) \quad (4)$$

ここにxは交通流の方向に測った距離、t時間である。

次に、Stephanopoulos等の衝撃波伝播軌跡の解法の基本的な考え方を示す²⁾。まず連続方程式

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

は、 $q = Ku$ および $u = f(K)$ とすると次のようになる。

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \left[f(K) + K \frac{df}{dK} \right] \frac{\partial K}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

Kはtとxの関数であるから、全微分の時間変化は

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial K}{\partial x} \quad (7)$$

となる。式(6)と式(7)を比較すると、式(6)は

$$\frac{dx}{dt} = f(K) + K \frac{df}{dK} \equiv h(K) \quad (8)$$

の速度で動く点でKの時間変化 dK/dt が0であることを示している¹¹⁾。すなわち式(8)上で密度が一定であり、したがって式(8)は等密度線である。式(8)はq-K曲線の接線の傾き dq/dK に等しく攪乱波の伝播速度を表す曲線で、これを波動方程式の解法では特性曲線(この場合は直線)という。2つの特性直線がt-x平面上で交わると、その交点で2つの異なる密度が存在する、すなわち密度が不連続に変化する。したがってその交点が衝撃波を表すことになる。

3. リンク間の衝撃波伝播

次にリンクからリンクへ伝播する衝撃波の伝播軌跡を解析的に求める。この場合、交差点における上流から下流への流入は、主道路上流からの直進による流入と交差道路から主道路への右左折による流入を考慮する。ただし、交差道路から主道路への右左折による流入は、密度 K_2 ($K_2 \geq 0$) の一様流とし各交差点共通とする。対象路線は、図-2に示すように主道路一方の系統制御路線で最下流リンクを第1リンクとし最上流リンクを第Nリンクとする。交通状態により、非飽和路線と過飽和路線に分け、非飽和リンクと過飽和リンクが混在するような路線については対象としない。

Michalopoulosや池之上等は、青時間中に主道路上流リンクから流入する交通流について密度 K_1 の一様流 ($K_1 > K_2$) を仮定しているが³⁾⁵⁾、ここでは複数リンク間の交通流を扱うのが目的であるから主道路の直進率を100%と仮定し、信号が赤から青に変化したとき、図-3(a)に示すように交通密度が交差点上流で $K_j \rightarrow K_m$ に、交差点下流で $K_2 \rightarrow K_m$ に瞬間

的に変化すると仮定する¹⁰⁾。したがって青信号開始時に停止線上流で $K_j \sim K_m$ 、下流で $K_2 \sim K_m$ の間の任意の密度をとる。したがって図-3 (b)に示すように時間距離図の青開始時点で $K_2 \sim K_j$ の等密度線を放射状に描くことができる。また図-3 (c)に示すように、停止線前後の点A→点B→点Cにおいてそれぞれ密度が $K_2 \rightarrow K_m \rightarrow K_j$ と直線的に変化する。

停止線における密度 K_s は K_m に等しくなるがそれは次のようにして確認できる。

$$K_s = \frac{h(K_2)t}{h(K_2)t - h(K_j)t} (K_j - K_2) + K_2 \quad (9)$$

ここで、

$$h(K) = u_f (1 - 2K/K_j) \quad (10)$$

であるから、

$$K_s = \frac{u_f (1 - 2K_2/K_j)}{u_f (1 - 2K_2/K_j) - u_f (1 - 2K_j/K_j)} (K_j - K_2) + K_2 = \frac{1}{2} K_j = K_m \quad (11)$$

となる。したがって停止線での密度は K_m である。

対象路線の最上流交差点の流入部は非飽和および過飽和の両方を扱えるようにしている。

非飽和の場合、最上流交差点に密度 K_1 の到着交通があり、波動構造は図-4に示すようになる。すなわち停止線上流に行列成長波QBW2と発達波LINE1、行列解消波QDW2ができ、下流には特性直線LINE4、衝撃波WAVE5が発生する。またQDW2の名前を変えて衝撃波WAVE8とする。飽和流が終了する点Bを求めるためにまずQBW2とLINE1の交点である点Aを求める。それには、表-1のQBW2に $x_0=0, t_0=-(C-G_1)$ を代入し、LINE1に $x_0=0, t_0=0$ を代入し連立方程式を解くと

$$t_A = \frac{K_1 (C-G_1)}{K_j - K_1} \quad x_A = -\frac{u_f K_1 (C-G_1)}{K_j - K_1} \quad (12)$$

となる。さらに表-1のQDW2の (t_0, x_0) に (t_A, x_A) を代入し、 $x=0$ において解くと点Bの時刻 t_B は、

$$t_B = \left[\frac{z_2}{h(K_1)} \right]^2 = \frac{q_1 (C-G_1)}{(q_m - q_1)} \quad (13)$$

になる。

過飽和の場合、最上流交差点の波動構造図は図-5に示すようになる。すなわち停止線上流では衝撃波WAVE20と特性直線LINE1が発生し、下流では特性直線LINE4と衝撃波WAVE60が発生する。この場合、青時間の主道路の流入交通量は飽和流となる。

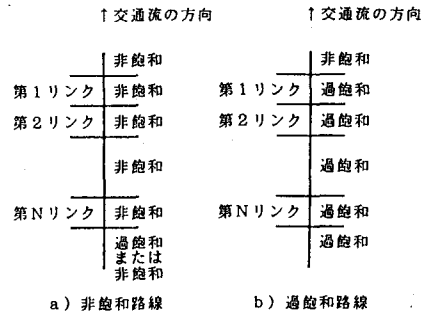


図-2 対象路線

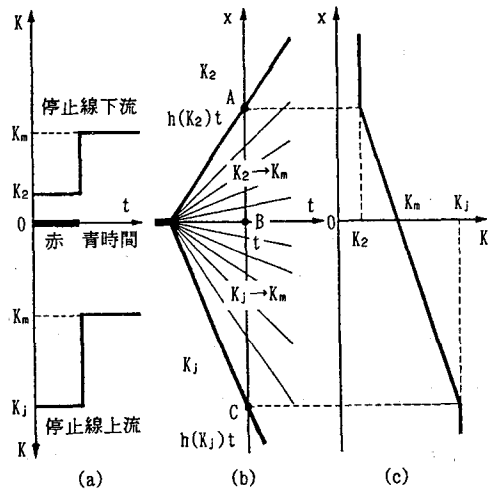


図-3 青信号開始時刻における停止線前後の主道路交通密度

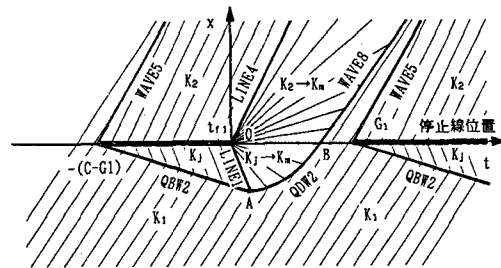


図-4 最上流交差点が非飽和の場合

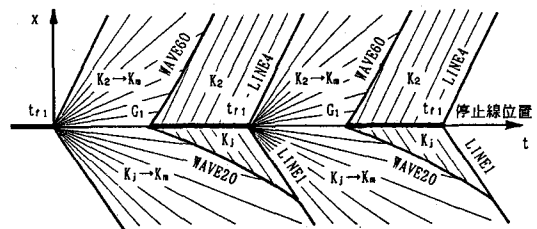


図-5 最上流交差点が過飽和の場合

4. 衝撃波の式と衝撃波行列

単一リンクを対象とした衝撃波の伝播軌跡は、Michalopoulos等が解析的に求めている³⁾。ここでは複数リンクに対応した一般式を求める。まず衝撃波の上流下流とも密度が一定の場合は式(4)を単純に積分して求めることができる。積分定数は衝撃波の始点座標(t_0, x_0)から定まる。衝撃波の上流下流のいずれかまたは両方が密度の過渡領域の場合は、WAVE60を例として示す。

衝撃波WAVE60の上流側の密度 K_u は K_2 で一定であり、一方下流側の密度は $K_2 \rightarrow K_m$ の過渡領域である。その密度 K_d は以下のようにして求められる。すなわち、特性直線上の密度を K_d とすると、その勾配は $h(K_d)$ であるから、特性直線の式は次のようになる。

$$x = h(K_d)(t - t_{r1}) + D_1 \tag{14}$$

ここに(t_{r1}, D_1)はある交差点の青開始時点(特性直線の放射点)の座標である。 $h(K_d) = u_r(1 - 2K_d/K_j)$ を代入すると

$$x = u_r \left(1 - \frac{2K_d}{K_j}\right)(t - t_{r1}) + D_1 \tag{15}$$

になり、これを K_d について解くと

$$K_d = \frac{K_j}{2} - \frac{K_j(x - D_1)}{2u_r(t - t_{r1})} \tag{16}$$

となる。上式と $K_u = K_2$ を式(4)に代入して整理すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x - D_1}{2(t - t_{r1})} + \frac{1}{2} h(K_2) \tag{17}$$

となる。この同時形微分方程式を

$$w = (x - D_1) / (t - t_{r1}) \tag{18}$$

と置いて解けばWAVE60の式が得られる。その他の衝撃波についても同様に求め、それを表-1に示す。

衝撃波および特性直線は12種類あり、それらを

内容によって分類すると以下のようになる。

- A. 成長過程の待ち行列・・・QBW2, QBW3
- B. 解消過程の待ち行列・・・QDW2, QDW3
- C. 上流方向への衝撃波・・・WAVE20, WAVE10
- D. 下流方向への衝撃波・・・WAVE5, WAVE60, WAVE70, WAVE8
- E. 特性直線・・・LINE1, LINE4

表-1 衝撃波および特性直線の一般式

名称	一般式
LINE1	$x = x_0 - u_r(t - t_0)$
WAVE20	$x = z_4(t - t_{r3})^{1/2} - u_r(t - t_{r3}) + D_3$ $z_4 = [u_r + \frac{x_0 - D_3}{t_0 - t_{r3}}](t_0 - t_{r3})^{1/2}$
WAVE10	$x = z_5(t - t_{r1})^{1/2} + \frac{D_2(t - t_{r1})}{t_{r3} - t_{r1}} + \frac{D_1(t - t_{r3})}{t_{r3} - t_{r1}}$ $z_5 = \frac{x_0 - \frac{D_2(t_0 - t_{r1})}{t_{r3} - t_{r1}} - \frac{D_1(t_0 - t_{r3})}{t_{r3} - t_{r1}}}{(t_0 - t_{r1})^{1/2} - \frac{t_{r3} - t_{r1}}{(t_0 - t_{r3})^{1/2}}}$ $t_0 = t_{r1}, x_0 = D_1$ または $t_0 = t_{r3}, x_0 = D_3$ の場合 $x = \frac{D_2(t - t_{r1})}{t_{r3} - t_{r1}} + \frac{D_1(t - t_{r3})}{t_{r3} - t_{r1}}$ $t_{r1} = t_{r3}$ の場合 $x = z_6(t - t_{r3}) + \frac{1}{2}(D_3 + D_1)$ $z_6 = [x_0 - \frac{1}{2}(D_3 + D_1)] / (t_0 - t_{r3})$
LINE4	$x = x_0 + h(K_2)(t - t_0)$
WAVE5	$x = x_0 + h(K_1, K_2)(t - t_0)$
WAVE60	$x = z_7(t - t_{r1})^{1/2} + h(K_2)(t - t_{r1}) + D_1$ $z_7 = -[h(K_2) - \frac{x_0 - D_1}{t_0 - t_{r1}}](t_0 - t_{r1})^{1/2}$
WAVE70	WAVE10と同じ
WAVE8	$x = z_8(t - t_{r1})^{1/2} + h(K_1)(t - t_{r1}) + D_1$ $z_8 = -[h(K_1) - \frac{x_0 - D_1}{t_0 - t_{r1}}](t_0 - t_{r1})^{1/2}$
QBW2	$x = x_0 - \frac{u_r K_2(t - t_0)}{K_j}$
QBW3	$x = z_1(t - t_{r1})^{1/2} - u_r(t - t_{r1}) + D_1$ $z_1 = [u_r + \frac{x_0 - D_1}{t_0 - t_{r1}}](t_0 - t_{r1})^{1/2}$
QDW2	$x = z_3(t - t_{r3})^{1/2} + h(K_2)(t - t_{r3})D_3$ $z_3 = -[h(K_2) - \frac{x_0 - D_3}{t_0 - t_{r3}}](t_0 - t_{r3})^{1/2}$
QDW3	WAVE10と同じ

表-2 衝撃波行列

		下						流					
		LINE1	WAVE20	WAVE10	LINE4	WAVE5	WAVE60	WAVE70	WAVE8	QBW2	QBW3	QDW2	QDW3
上	LINE1												
	WAVE20	WAVE10											
	WAVE10		WAVE20	WAVE10									
	LINE4						WAVE70				QBW3	QDW3	
	WAVE5								WAVE60	QBW2		QDW2	
	WAVE60							WAVE70			QBW2		QDW2
	WAVE70										QBW3		QDW3
	WAVE8							WAVE8			QBW2		QDW2
流	QBW2	QDW2											
	QBW3	QDW3											
	QDW2		QBW2	QDW2									
	QDW3		QBW3	QDW3									

QBW2, QBW3, QDW2, QDW3は、車の待ち行列の最後尾を示す衝撃波である。Cグループの衝撃波は過飽和路線においてのみ現れ、Dグループ衝撃波は非飽和路線においてのみ現れる。

WAVE10は池之上が提案したものと同じであり、WAVE8は本研究で新しく提案するもの、その他の衝撃波はMichalopoulos等が提案した単一リンクのものに対応する。

衝撃波と衝撃波、または衝撃波と特性直線が時間距離図上において交差すると、もとの衝撃波は消滅し新しい衝撃波がその交差した点から発生する。これをMichalopoulos等は単一リンクの衝撃波行列³⁾としてまとめている。それと同様に本研究では複数リンクに対応した衝撃波行列を作成した。それを表-2に示す。

5. 計算例

本研究では横軸を時間、縦軸を距離とし、交通流を上向きにとりグラフィック画面に波動構造を描く。非飽和路線においては最上流リンクから下流に向かって計算を行い、過飽和路線においては最下流リンクから上流に向かって計算を行う。波動構造はリンクごとに計算を行う。このとき次のリンクに伝播する衝撃波と、次のリンクで新たに発生する衝撃波をあらかじめ求めておく。

波動構造図は、まず時間距離図の座標軸を引き、次に衝撃波の軌跡を描く。衝撃波の距離座標は、表-1のように時刻 t の関数としてあらかじめ解析的に求めた式によって、微小時間 Δt ごとに衝撃波の距離座標を計算し、時間距離図上にプロットする。これを信号周期1周期分くり返して波動構造図を描く。

図-6、図-7は非飽和路線の計算例である。図-6は右左折流入がある場合($K_2 > 0.0$)、図-7は右左折流入がない場合($K_2 = 0.0$)である。図-8は過飽和路線の計算例である。これらの図は、リンクごとにグラフィック表示した波動構造図をハードコピーし、それをつなぎ合わせたものである。

ここで用いた計算条件は、自由速度 $u_f = 12.5$ (m/秒)、ジャム密度 $K_j = 0.16$ (台/m)、飽和交通流率 $q_m = 0.5$ (台/秒)である。

さらにこのプログラムを用いて、各リンクごとに

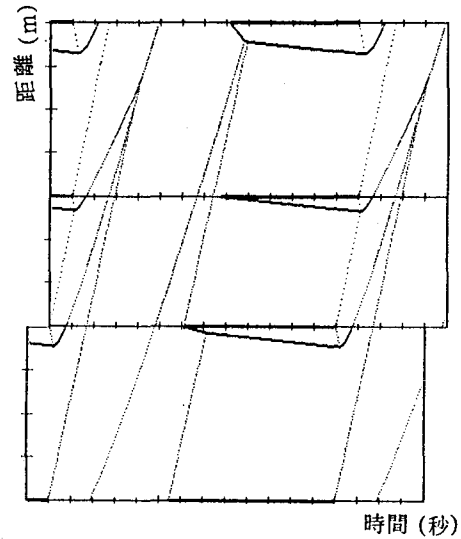


図-6 非飽和路線の波動構造($K_2 > 0$)

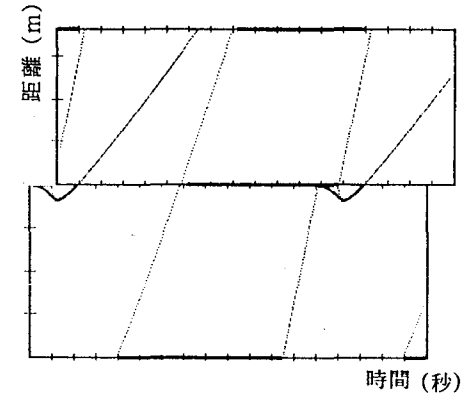


図-7 非飽和路線の波動構造($K_2 = 0$)

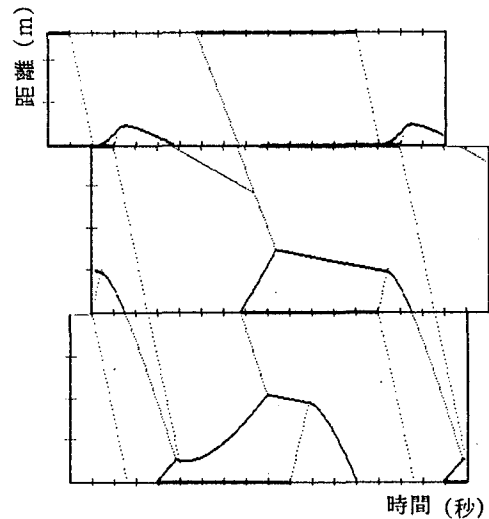


図-8 過飽和路線の波動構造

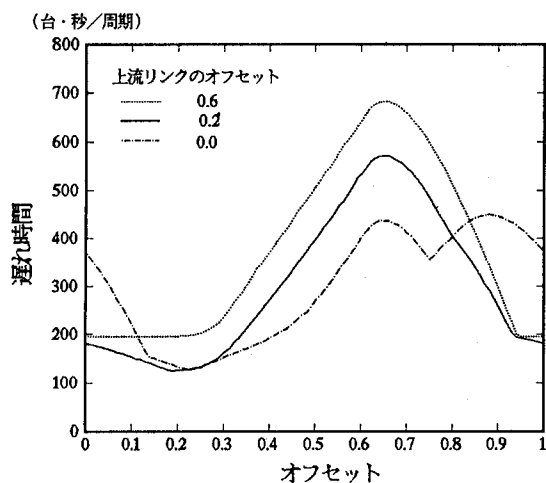


図-9 1リンク1方向の遅れ時間

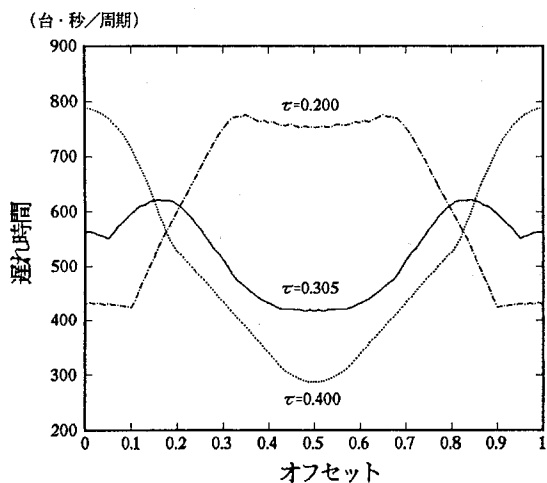


図-10 単一リンクの総遅れ時間

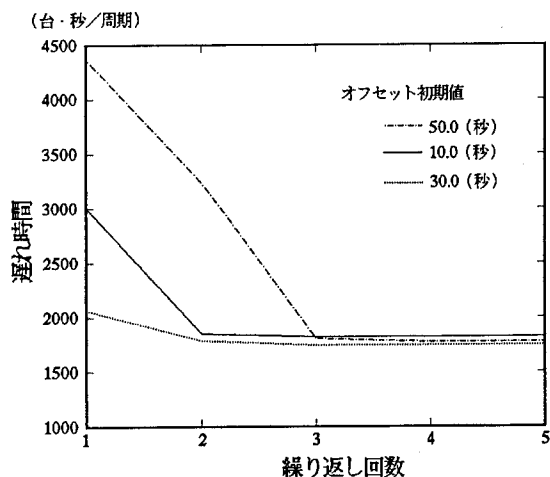


図-11 勾配法によるオフセット最適化

遅れ時間を求めることができる。図-9は隣接上流リンクのオフセットの影響を考慮した遅れ時間とオフセットの関係である。図-10は単一リンクの上下両方向の総遅れ時間とオフセットの関係である。 τ はリンクの時間距離の周期比である。図-11は3リンクからなる系統化路線の総遅れ時間を最小化するように勾配法を用いてオフセットの最適化を行った結果である。

6. むすび

本研究では、非飽和・過飽和交通の衝撃波を視覚的に捉えることのできるプログラムを開発した。今後は、右左折流出がある場合、密度-速度関係が一般の場合についても扱えるようにしていきたい。

参考文献

- 1) M. J. Lighthill & G. B. Whitham: On Kinematic Waves II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads, Proc. R. Soc. of London, series A, vol. 229, pp. 317~345, 1955
- 2) Gregory Stephanopoulos, P. G. Michalopoulos and George Stephanopoulos: Modelling and Analysis of Traffic Queue Dynamics at Signalized Intersection, Trans. Res. A, Vol. 13, No. 5, pp. 295~307, 1979
- 3) P. G. Michalopoulos, Gregory Stephanopoulos and V. B. Pisharody: Modeling of Traffic Flow at Signalized Links, Trans. Sci., Vol. 14, No. 1, pp. 9~41, 1980
- 4) 池之上慶一郎・田島伸裕: 過飽和状態の信号待行列のダイナミクスについて, 科学警察研究所報告交通編, Vol. 23, No. 1, pp. 20~26, 1982
- 5) 池之上慶一郎: 系統信号系における過飽和交通流の波動理論による研究, 科学警察研究所報告交通編, Vol. 24, No. 1, pp. 12~22, 1983
- 6) 福山正治: 波動理論応用による交通流挙動の近似解析, 第5回土木計画学研究発表会講演集, pp. 137~145, 1983
- 7) T. Sasaki, M. Fukuyama and Y. Namikawa: An Approximative Analysis of the Hydrodynamic Theory on Traffic Flow and a Formulation of a Traffic Simulation Model, Ninth international Symposium on Transportation and traffic theory, pp. 1~20, 1984
- 8) I. Okutani and N. Inoue: Estimation of Traveling Time between Ramps and Discharge Control on Expressway, Proc. of JSCE, No. 211, pp. 99~107, 1973
- 9) 井上矩之: 波動理論による事故渋滞の解析, 交通工学, Vol. 9, No. 6, pp. 22~31, 1974
- 10) 久井守・田村洋一: 複数リンクからなる系統信号システムの待ち行列と衝撃波の動的解析, 土木学会論文集, No. 431/IV-15, pp. 87~96, 1991
- 11) 椿東一郎: 水理学Ⅱ, 森北出版, p. 3, 1988