【土木計画学研究・講演集 No.14(1) 1991年11月】

ネットワークトポロジーの考えを用いた最適工期短縮モデルに関する理論的研究

A Study on the Optimum Scheduling model Based on the theory of Network Topology

春名 攻**、原田 満***、荒川和久****

By ,Mamoru HARUNA, Misuru HARADA, Kazuhisa ARAKAWA

In this study the type of optimum scheduling model is developed to realiye effective construction from the view point of practical use because engineering works contain many special and uncertain factors. It is very important to improve the method of replanning in the process of construction considering many practical conditions and requirment. Since it is desired to establish more high level replanning technique development of the new type of follow-up-model is studied adopting Cut-set assingnment and shortest routing techniques based on the theory of network topology.

1. はじめに

近年の建設業をとりまく環境は一段と厳しさを増し、生産性の向上と業務の確実化・迅速化、さらには省力化を目指した合理化への取り組みが以前にもまして必要とされてきている。特に、慢性的な労働力不足が指摘されるなかで、パーソナルコンピュータやデータベースシステムの普及をはじめとする情報処理技術・機器の発展は著しく、現場業務を支援する情報システムの開発並びに、新技術の導入が積極的に進められてきた。そして、多くの分野・業務でひととうりの作業のシステムが行われ、第一段階としての開発目標が達成された今日においては、処理の自動化や作業労力の軽減を目指した、より高度な処理方法の開発が望まれている。

そこで本研究においては、施工管理段階の検討課題に着目して工程短縮問題をとりあげ、計画工程と施工実績との比較検討によって計画の修正が必要と判断された場合における工程フォローアップの方法を中心に検討を行った。そして、数学的理論であるネットワークトポロジーの考えを用いて最小費用で必要日数を短縮する、ことが可能な理論モデルの開発を行った。

2. 工程フォローアップの方法に関する考察

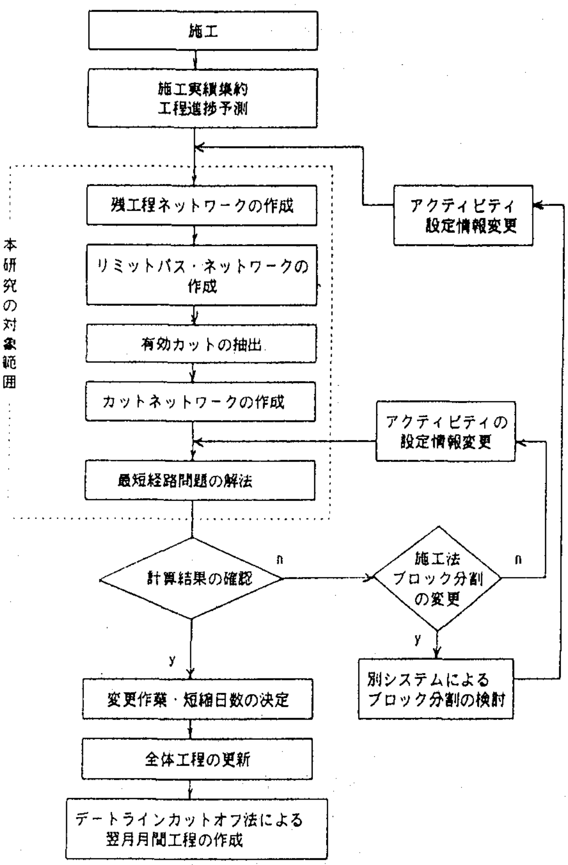
土木工事の場合、現地生産である、施工期間が長い、施工性が自然条件に大きく左右される等の理由から、どうしても不確定な事項や条件を残したまま計画をたてているのが現状である。すなわち、修正が不要である完全な工程計画をたてることは難しく、工事の進捗状況に応じて工程の修正を行う、フォロ

*キーワード：リミットパスネットワーク，カット，ネットワークトポロジー，動的計画法

** 正員 工博 立命館大学理工学部 教授
*** 学生員 立命館大学大学院 理工学研究科
**** 学生員 立命館大学大学院 理工学研究科
（〒603京都市北区等持院北町56－1）

ーアップ作業が不可欠なものとなっている。工事の実施段階において、工程計画の検討成果から要求される工程・工期より著しく工事進捗の遅れが認められる場合には、全体工期，工事進捗状況の遅れ，工事用資源の調達・運用方針，各作業における処理能力の変化、施工計画の変更、関連工事や周辺環境からの制約を考慮して、工程計画の更新処理、計画工程のフォローアップを行なう必要がある。

現状の施工管理業務においては、全体、月間、日常の管理レベルが存在しており、工事全体を対象とする全工事期間、暦日による月間、週間といった管理期間を設定し、それぞれの管理期間に対応した工事工程表を作成して施工の進捗を管理するのが通常となっている。計画工程どうり進行しない施工が余儀なくされ、契約工期をうわまわったり、過剰投入資源の必要性が予測される場合には、全体・月間・



図ー1　工程フォローアップのプロセスと本研究の対象範囲

週間・日々工程レベルのうち最も適切なレベルを選定して、フォローアップを行わなければならない。工程案の見直しにあたっては、翌日・翌月など比較的早い時期に施工する作業を対象に、短縮がはかられていたが、より増加費用が少なく短縮効果の高い修正案を策定するためには、図－2に示すような残工程すべてを対象にフォローアップ作業を行ない、その結果をデートラインカットオフ法によって、月間工程計画表としてとりまとめることが望ましいと考える。

また、これまでにフォローアップ作業の実現を目指した研究事例は数多く存在しており、施工能力の限界や短縮にともなう短縮費用の増加を捉えた方法、必要短縮日数を段階的に短縮していく方法等があげられる。

前者は、ＣＰＭ(Critical Path Method)と呼ばれ、同時に時間短縮が可能な作業の組合せであるカットを用いて、短縮コストの最も安い、単独のあるいは組合せとなった最小カットを探索することで短縮案を策定している。しかし、コンピュータ利用を前提としていることから機械的な処理が可能なものの、そのアルゴリズムは非常に難解なものとなっているため、安価であり、普及率の高いパソコン上での運用が不可能であり、個別現場で対応していくことが、難しいのが実状である。

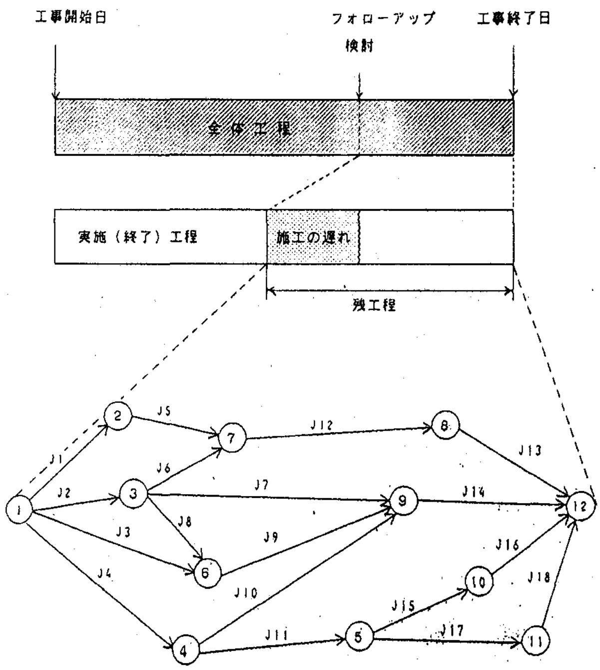
一方、後者は、大成リミットパスと呼ばれ、ロジカルに計画者が短縮する方法を示している。通常、トータルフロートが０日である作業は、クリティカルパスであることを示すが、このクリティカルパスの短縮だけでは、必要な日数を完全に短縮することは不可能である。この方法では、最終作業の最遅終了時刻を工期として後進計算を行ない、マイナスフロートの発生する作業を工程短縮の対象作業として捉えている。そして、これらの作業を用いてリミットパス・ネットワークを作成しており、マイナスフロートが消失するように逐次短縮していく方法をとっている。しかし、短縮過程においては、費用の概念まではとりいれられおらず、最適短縮問題にはいたっていない。

個別現場において、現場職員が容易に取り扱うことが可能なフォローアップシステムを開発するためには、ＣＰＭの持つカット（費用）概念と、リミッ

トパスのような短縮対象作業を明確にした単純さとを合わせ持つことが必要である。

3．短縮カットの探索に関する検討

前述のようなフォローアップシステムを開発するにあったて、まず、同時に短縮を行う作業の集合である短縮カットの自動探索方法について以下に検討を行った。



図－2　残工程ネットワーク

グラフ理論では、工程ネットワークは有向グラフと同様のものとして考えることができるが、この有向グラフには、ノードの順序関係を示す接続行列、ネットワークのループを示す閉路行列、カット行列が存在している。これら3つの行列には、

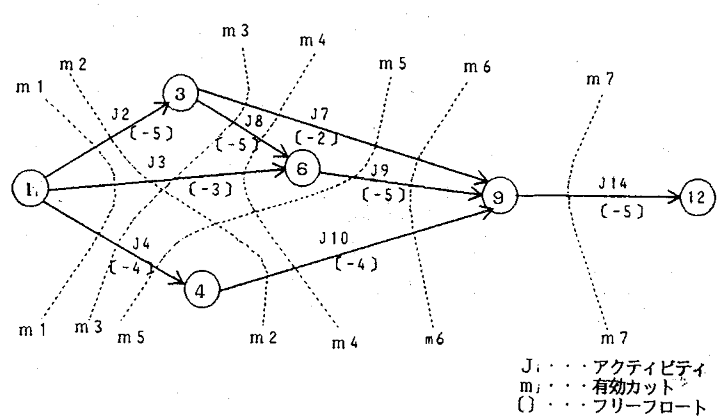
接続ベクトル・閉路ベクトル＝0

閉路ベクトル・カットベクトル＝0

の相互関係があり、ネットワークの順序関係を示す接続行列さえわかっておれば、閉路行列およびカット行列の自動探索が可能である。

しかし、作業間ではなくノード間の関係を示す接続行列はアロー型ネットワーク固有の関係行列であるため、他のプロジェクトグラフ等の工程表に適用は不可能である。本研究では、工事の検討レベルによっては、工程表の種類も異なることが多いと判断して、凡用性のある短縮カットの自動探索方法について検討を行った。

カットの成立する条件を整理すると、まず任意のカット m_iは、つねに工程ネットワークを2分するものでなくてはならない。すなわち、任意のカットに含まれる全作業の先行集合（先行作業の集合）と可達集合（後続作業の集合）の和集合は、工程ネットワークを構成する全作業を含んでいる必要がある。ここで、順序行列および可達行列とは、ともに各作業の順序関係を示す行列でるが、要素ｉｊが1であれば作業ｊは作業ｉの後続関係であることを示している。両者の違いは、順序行列が直接的な作業の順序関係を示したものであるのに対して、可達行列では直接的な関係にとどまらず、間接的な順序関係をも示している点である。工事の工程である限り作業間の順序関係があり、これら行列は、工程表の種類に関係なく、必ず存



図－3　対象工事のリミットパス・ネットワークとカット

在している。先の条を証明すると、次のようになる。

〔証明〕

カット行列Cの列と、可達行列M'の行・列がともに工程ネットークの作業 J_i に対応するように配列されている時、Cの行をi，M'の列をj，M'の行をk とすると

$\langle m_j' | = [m_{1j}', m_{2j}', \cdots m_{nj}']$

$\langle m_k' | = [m_{k1}', m_{k2}', \cdots m_{kn}']$

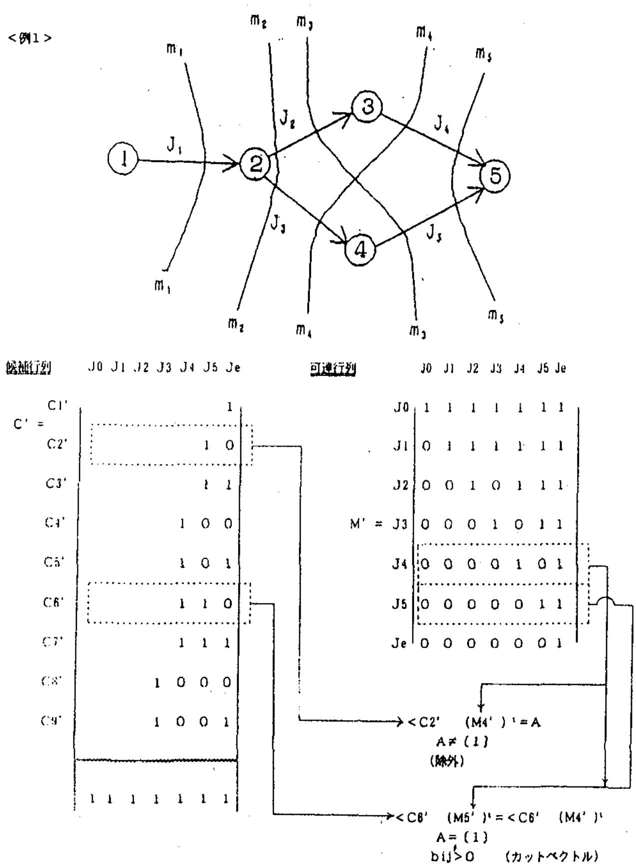
とおいた時，（k＝j）

$\sum_j (\langle m_k' | + (\langle m_j' |)^t)$ となる候補行列A を考えた場合、

Aの要素は、$\sum_j^p (m_{kL}+m_{Lj})$ となる。

p＝（$C_{iL}=1$ をみたす要素の数）

ここで、$C_{iL}=1$ をみたすLが、



図－4 短縮カットの自動探索の方法例

$\langle m_j' |$ のj，$\langle m_k' |$ のkに等しい場合においては、

$a_{ij}>0$ （j＝1～n）が成立する。

$\langle mj' |$ は、作業の先行集合A（J_i），

$\langle mk' |$ は、作業の可達集合R（J_i），に等しく

カットiに含まれる全作業のAとRの和集合は、全作業の全体集合に等しい。

$U = A(J_i) \cup R(J_i)$

〔証明終わり〕

この条件に従って探索すれば、自動的にカット行列を求めることが可能である。

しかし、この方法で求めたカット行列には、CPMと同様に逆向き作業を持つカットが含まれている。逆向き作業の短縮を行う場合には、短縮とは反対に所要日数を長くすることが必要であり、難解なアルゴリズムを持つこととなる。本研究がモデル開発の初期段階であることを考慮して、今回はこの逆向き作業を含むカットを除外することとした。カット上の作業が全て同じ向きを持つためには、カット上の作業間には順序関係が成立しないことに着目すれば、任意のカット m_i に含まれる作業 J_j の可達集合R（J_j）には、作業 J_j 自身以外、カットに含まれる作業は存在しないという条件を用いることが可能である。この証明は、次のようである。

〔証明〕

カット行列Cの列と、可達行列M'の列がともに工程ネットワークの作業 Jiに対応するように配列される時、カット行列Cの行をi 、可達行列M'の行をjとして、

$\langle C_i | = [C_{i1}, C_{i2}, \cdots\cdots C_{in}]$

$\langle M_j' | = [mj1, mj2, \cdots\cdots mjn]$

とおけば

$\langle C_i | (\langle m_j |)^t = A$

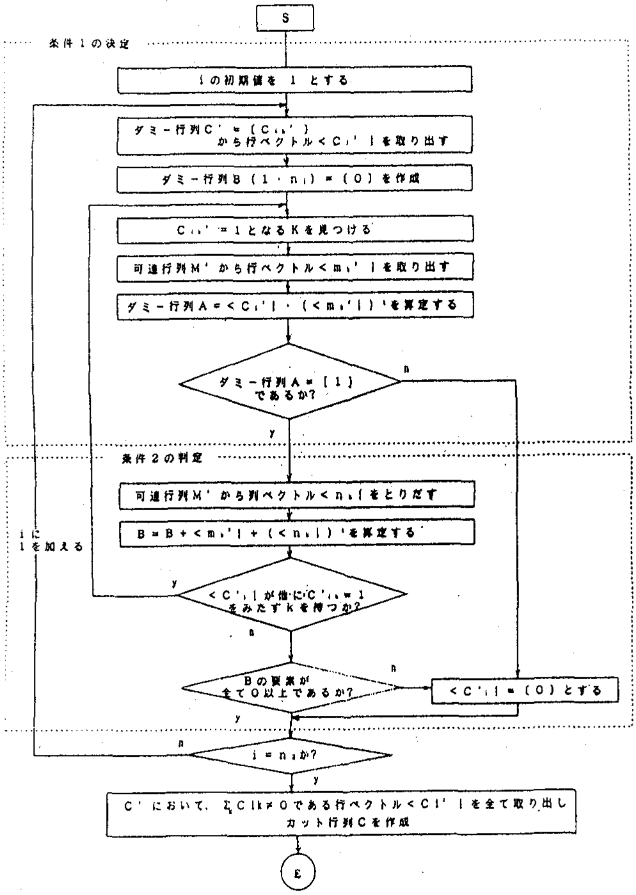
となるAの要素は、

$\sum_{k=1}^{m} C_{ik} \cdot m_{jk}$

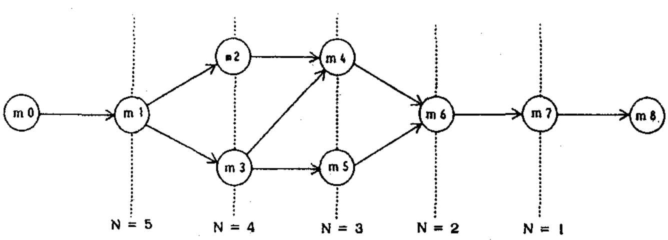
ここで、$C_{i1}=1$ をみたす1が $\langle m_j |$ のjに等しい場合 、

A＝［1］が成立する

$C_{ik}=m_{jk}=1$ となるのは、k＝jの場



図－5　有効カット探索プロセス



図－6　対象工事のカットネットワーク
（プロジェクトグラフ）

合のみであり、他は、$C_{ik} \cdot m_{jk}=0$となる。

上記の事は、可達行列M'の列を行におきかえ先行集合として考えても成立する。

〔証明終わり〕

これらの条件をまとめると、短縮カットの自動探索の手順は、図－5のようにとりまとめることができる。

なお、短縮カットの探索の一例を図－4に示した。図中にある候補行列は、行ベクトルの要素全体を1つのnケタの整数として考えると、2進法の連続数となっている行列である。カットベクトルは必ずこの行ベクトルに含まれており、カットベクトルの候補として事前に求めている。例えば、図－4のC2'ベクトルは工程ネットワークを2分せず除外され、C6'ベクトルは工程ネットワークを2分するとともに、逆向き作業を含まないカットベクトルとして決定される。

4．カットネットワークの作成に関する検討

従来、カットは同時に短縮が可能な作業集合としてのみ捉えられており、カット間の有機的な関係までは考慮されていない。工程短縮に有効なツールであるカットは、理論的なものとして重々しく捉えられ、現場技術者に受け入れられにくいものであるが、カットそのものはあくまでも作業の集合であることに着目すれば、非常に単純なものである。すなわち、カット間の関係は、作業集合間の関係として考えることができる。

例えば、カットの定義ではカットに含まれる作業間には順序関係がないことを条件としていたが、逆を返せば、異なるカット間においては、作業の順序関係が成立することを立証するものである。工

程ネットワークにおける作業の順序関係はそのままカット間の関係においても成立が可能であり、この関係を用いればカットも工程ネットワークと同様に１つのネットワークとして描くことが可能である。また、定義されたカットが工程ネットワーク上で交錯する場合は、カット間で順序関係を持たず、ネットワーク上で並行する。カットネットワークは、工程ネットワークの始点から交錯しないカットを順にとりだした複数の経路を重ね合わせたものとなる。

以上のことから、このカットネットワークは、複雑な工程ネットワークの特性を保持したまま単純化されたものであることが言え、ネットワークトポロジーの考え方を適用することが可能である。本研究では、カットネットワーク上での最小カット短縮問題は、どの作業を中心に短縮するかといった問題に等しいものと考え、カットネットワークにおける最小費用を与える経路探索とその経路での短縮日数の割り合て問題として捉えることが可能であると判断した。

なお、カットネットワークの作成するにあたって、各カット間の順序関係はカット行列と作業の可達行列との関係から機械的に算出することが可能である。すなわち、カットm_iが所有する全ての作業が、カットm_jの所有する作業の可達集合にすべて含まれる場合、m_iはm_jの後続関係にあるという条件を用いればよい。そして、順序行列をもとに構造化することでネットワークを自動的に描くことが可能である。

５．Ｄ．Ｐ．を用いた工期短縮モデルの定式化

前述のように本問題は、最小費用を与える経路の選択問題および、その経路のでの短縮日数の割当問題として捉えることができる。本研究では、その解法に、Ｄ．Ｐ．（動的計画法）を用いることとした。

また、本研究では、リミットパスネットワークを対象として短縮問題を考えているが、ａ日の短縮問題を考える場合、現在工期λ日を（λ－ａ）日とおいて求められるネットワーク中のマイナスフロートの最大値は、ａ日となる。したがって全カットの短縮日数の和は、ａ日となり、（１）式のような制約条件式が必要である。

さらに、リミットパスネットワークにはａ日以外のマイナスフロートb_Kを持つ経路があり、この経路上にあるカットの短縮日数の和は、b_K（$k=0$～マイナスフロートの種類数）以上でなければａ日の短縮を達成することが不可能である。（（２）式）

$$A:\sum_{i=1}^{n_1} X_i = a \quad \text{—— (1)} \quad (n_1 = \text{カットの本数})$$

$$B:\sum_{k=1}^{n_2} X_k \geqq b_k \quad \text{----- (2)} \quad (n_2 = m_k\text{の本数})$$

つまり、これらの制約条件と各カットに含まれる作業のフロートによって、各カットの短縮にかかる費用Ｇｉが決定される。

カットｍｉに含まれる作業のうちで、フロートの小さい順に

0，d_1，d_2，・・・，d_nとし、また、これに対応して、C_0，C_1，C_2，・・・，C_nを一日当りの短縮費用とすると、カットｍｉにおける短縮費用Ｇｉは、次のように表すことができる。

$$0 \leqq Xi \leqq d_1 \cdots \quad Gi = C_0 \times Xi$$

$$d_1 < Xi \leqq d_2 \cdots Gi = C_0 \times Xi + C_1 \times (Xi - d_1)$$

$$d_2 < Xi \leqq d_n \cdots Gi = C_0 \times Xi + C_1 \times (Xi - d_1) + C_2 \times (Xi - d_2)$$

$$\vdots$$

$$d_n < Xi \leqq a \ \cdots Gi = C_0 \times Xi + C_1 \times (Xi - d_1) + C_2 \times (Xi - d_2) + C_n \times (Xi - d_n)$$

また、本問題では、カットの可達行列から構造化手法を用いてつくられた各カットの階層構造（カット・ネットワーク）における各レベルを段階数として捉えている。

ｎを段階数とすると、各段階においてのX_nのとりうる範囲は全て

$$0 \leqq X_i \leqq a$$

であり、また、目的関数は、総短縮費用として、以下のように定式化できる。

$$C(X_1, X_2, \cdots, X_n) = G_1(X_1) + G_2(X_2) + \cdots + G_i(X_i) \rightarrow \min. \quad \text{----- (4)}$$

$$(i = 1 \sim n)$$

さらに、各段階での短縮日数をK_jとすると

$$0 \leqq K_j \leqq a$$

となることから、D．Pの関数方程式は

$$C_N(K_n)=\min.\{G_n(X_i)+C_{N-1}(K_n-X_i)\} \quad \text{-----}(5)$$

となる。

6．仮想工事への適用による実証的検討

本研究で、開発した工期短縮モデルの有効性を実証するために、図－2に示すような、仮想工事を対象にして、運用実験を行った。仮想工事における各作業の施工能力および、短縮費用データは、表－2に示すとうりである。短縮費用データについては、短縮日数との間に線形性を仮定している。フォローアップの検討対象となる全残工程は、図－2のように18のアクティビティを持ち、当初計画時の施工能力を用いて工程計算（ＰＥＲＴ計算）を行った結果は、計算工期λ＝50日であった。約定工期を45日と定めることにより、5日の短縮日数が必要である。次いでλ＝45日とおいて後進計算した結果、8つのアクティビティのトータルフロートがマイナスとなった。

このマイナスフロートを持つ作業だけを抜きだし、図－3に示すような、リミットパス・ネットワークを得た。”J0→J2→J8→J9→J14→JE”の経路はマイナスフロートが－5日であり、従来のクリティカルパスを示している。この他に、

”J0→J4→J10→J14→JE”の経路で4日

”J0→J3→J9→J14→JE”の経路で3日

”J0→J2→J7→J14→JE”の経路で2日

の短縮が必要である。

このリミットパス・ネットワークを対象に、図－5に示すプロセスに従って全ての短縮カットを、抽出すると、図－3に示す結果を得た。

この全てのカット間には、先述のように順序関係があり、構造化手法を用いて対象工事のカットネットワークを作成すると、図－6に示すようなプロジェクトグラフとなる。

表－1　仮想工事の工程計算結果

アクティビティ	施工数量 m³	施工能力 m³／日	標準所要日数	最早開始日	最遅開始日	トータルフロート	短縮日数
J1	200	28.5	7	0	9	9	4
J2	300	27.2	11	0	0	0	-5
J3	450	20.5	22	0	2	2	-3
J4	150	15.0	10	0	1	1	-4
J5	350	27.0	13	7	16	9	4
J6	250	21.0	12	11	17	6	1
J7	400	20.0	20	11	14	3	-2
J8	230	17.7	13	11	11	0	-5
J9	280	28.0	10	24	24	0	-5
J10	500	22.0	23	10	11	1	-4
J11	300	25.0	12	10	16	6	1
J12	250	22.7	11	23	29	6	1
J13	150	15.0	10	34	40	6	1
J14	300	21.5	16	34	34	0	-5
J15	350	38.9	9	22	31	9	4
J16	200	20.0	10	31	40	9	4
J17	200	18.0	11	22	28	6	1
J18	300	27.3	11	23	39	6	1

リミットパスネットワークに存在する作業

※注．　短縮日数とは、最終アクティビティの終了時刻に工期を代入した場合のトータルフロートである。マイナスは、短縮の必要性を示す。

表－2　仮想工事の費用データ

アクティビティ	施工数量 m³	標準施工能力 m³／日	標準所要日数	最大施工能力	最小所要日数	追加費用 円／日
J1	200	28.5	7	40.0	5	30.0
J2	300	27.2	11	37.6	8	[illegible]
J3	450	20.5	22	26.0	17	60.0
J4	150	15.0	10	21.5	7	50.0
J5	350	27.0	13	35.0	10	65.0
J6	250	21.0	12	25.0	10	55.0
J7	400	20.0	20	23.6	17	50.0
J8	230	17.7	13	23.0	[illegible]	40.0
J9	280	28.0	10	40.0	7	35.0
J10	500	22.0	23	26.3	19	80.0
J11	300	25.0	12	30.0	10	70.0
J12	250	22.7	11	27.8	9	80.0
J13	150	15.0	10	16.7	9	70.0
J14	300	18.7	16	23.0	13	160.0
J15	350	38.9	9	43.7	8	45.0
J16	200	20.0	10	25.0	8	65.0
J17	200	18.0	11	22.2	9	55.0
J18	300	27.3	11	33.3	10	35.0

リミットパスネットワークに存在する作業

次に、計算過程は省略するが動的計画法（D、P）を用いて、このカットネットワークを経路網とする最小費用経路探索問題を解いたところ、短縮に要する総費用は３９０万円となり、次のような経路が最適経路として算出された。

”$m_1 \rightarrow m_3 \rightarrow m_5 \rightarrow m_6 \rightarrow m_7$”

また、各カットの短縮日数および、短縮費用は、以下のとうりである。

m_1・・・１日短縮で、費用が　９５ 万円
m_3・・・１日短縮で、費用が１４０ 万円
m_5・・・１日短縮で、費用が　８５ 万円
m_6・・・２日短縮で、費用が　７０ 万円
m_7・・・０日短縮で、費用が　　０　円

短縮作業とその短縮日数は、以下のようである。

J_2・・・１日	J_8・・・１日
J_4・・・３日	J_9・・・３日
J_7・・・１日	J_{10}・・１日

となり、この結果を図－７に示す。
本研究では、費用データを線形として取り扱ったが、D．Pを用いていることから、２日目と３日目とは短縮費用が異なるような非線形のデータに対しても適用が可能である。

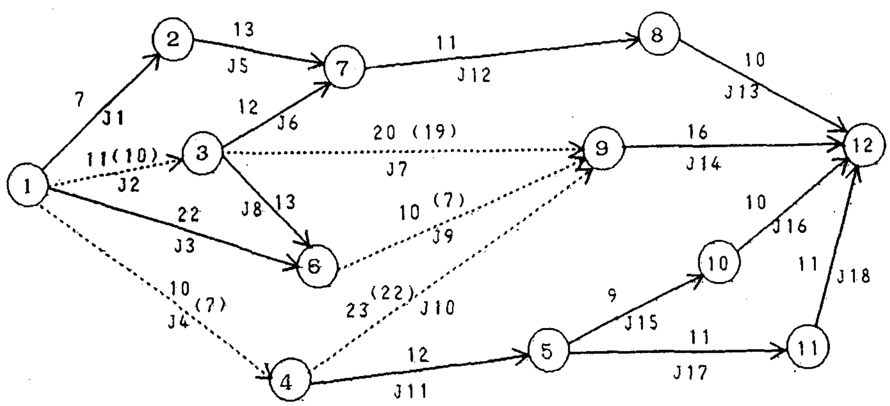
さらに、費用データさえ整備されておれば、計画段階においても有効な手法であると考えられる。

７．おわりに

本研究では、ネットワークトポロジーの考え方を用いて、複雑な工程ネットワークを単純化したカットネットワークを対象としたフォローアップ方法について検討を行った。そして、D．P．を用いて最小費用経路探索問題を解く、工期短縮モデルの開発を行った。本モデルは、従来からあったＣＰＭの短縮モデルより簡素化されたものであると考えている。

しかし、本研究が開発の初期段階であることから、仮想工事に対して理論の有効性を検証したにとどまっており、今後はこの理論モデルを実用化するためにも、モデルケース工事を対象に実務への適用をはかりたいと考えている。また、処理技術・方法の高度化を図ることを念頭においた理論的研究も同時に進め、幅広く検討して行きたいと考えている。

［参考文献］
１）吉川和宏；土木計画学 計画の手順と手法、森北出版
２）春名　攻；建設工事における施工管理に関するシステム論的研究、学位論文（京都大学工学博士）1971年7月
３）尾崎 弘，白川 功；グラフとネットワークの理論、 コロナ社
４）加藤昭吉；ＰＥＲＴの知識、　日本経済新聞社



図－７　短縮作業と所要日数