

厚生最大化モデルの導出と適用に関する研究

A Study on the Derivation and Application of the Welfare Function Maximization Model

枝村俊郎*, 川井隆司**, 清水裕文***, 秋山智則****

By Toshiro EDAMURA, Takashi KAWAI, Hirofumi SHIMIZU and Tomonori AKIYAMA

In this paper, we firstly clarify the structural relation between the probabilistic choice model(PCM) and the group surplus maximization model(GSM) through analysis of theoretical connection of attractiveness weights. Owing to elucidation of relation between weights in both models, it becomes feasible to apply GSM to an urban area on strictly theoretical basis. It is also proved that the same model as GSM can be derived by aggregating the utility of households in a region following social welfare economic approach. Hence, we name the model welfare function maximization model (WFM). The effectiveness of the model is demonstrated through application to the city of Kobe.

1. はしがき

ガリン・ローリーモデルLM(Garin Lowry model)¹⁾を発展させたモデルは数多く開発されている²⁾。その中で、リーズ大学のウィルソン、A.G.を中心とした研究スタッフにより開発されたグループ余剰最大化モデルGSM(group surplus maximization model)は、居住者の立地選択行動を確率効用選択理論に基づきながら、数学的厳密性をもつ数理計画問題によって簡潔明瞭に定式化されているところに優れた特徴を有する³⁾。しかし、このGSMを実際の都市の居住立地モデルとして適用するためには、確率効用理論(random utility theory)との論理的

整合性を保持するように魅力度の重みを定める必要がある。なぜならば、GSMは確率効用選択モデルPCM(probabilistic choice model)から導出されたモデルであるために、GSMにはPCMのパラメータと魅力度の重みを使用されているからである。言い換えれば、GSMはモデルの導出上、PCMのパラメータと魅力度の重みにより規定される。またPCMの魅力度の重みは、確率効用関数の確定成分である効用により定義される。この効用は他ゾーンによらない自ゾーンのみにより定まる。これは、エントロピー最大化原理から導出されたLMの重みと比べ、確率効用理論に基づいている点でモデルの適用において注意すべきである。そしてGSMとPCMとの対応関係は、両モデルが確率効用理論に基づいていることから、魅力度の重み間の関係により明確に説明される。よって、GSMの適用においては、GSMとPCMとの魅力度の重み間の関係を明らかにする必要がある。さらに、LMとGSMとのモデ

* 正会員 工博 神戸大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 神戸大学助手 工学部土木工学科
(〒657 神戸市灘区六甲台町1-1)

*** 正会員 工修 西宮市企画局都市計画部都市計画課
(〒662 西宮市六湛寺町10-3)

**** 学生員 神戸大学大学院 修士課程
(〒657 神戸市灘区六甲台町1-1)

ル構造上の関係を考察するために、LMの重みとの対応関係も明確にする必要がある。

本研究では、ウィルソン、A.G.らの研究において明らかになっていなかったGSMとPCM、LMとのモデル構造上の対応関係を、魅力度の重み間の関係を通して明らかにした。これにより、GSMの論理性を損なうことなく、GSMの現実適用が可能となった。また、PCMからGSMを導出する過程において、ウィルソン、A.G.らにより定義されたグループ余剰が個人の効用を集計した社会的厚生関数であることからグループ余剰を社会的厚生関数と再定義した。そしてモデル導出において、社会が社会的厚生関数を最大化すべきであると考えた社会厚生の接近法⁴⁾に従ったことにより、GSMを厚生最大化モデルWFM(welfare function maximization model)と呼ぶ。最後に、WFMの有効性を神戸市への適用を通して実証した。なお、加藤・宮城らの研究⁵⁾は、PCMからGSMをフェンチェルの双対問題(Fenchel's dual problem)⁶⁾を用いて導出したところに特徴がある。だが、この研究でもWFMの適用に際しモデルの論理性を損なっている点に問題があると考えられる。なぜならば、モデル間の構造上の対応関係を明らかにしていないため、キャリブレーション時にPCMのパラメータを使用するにも拘わらず、魅力度の重みとして経験的に地価を用いているからである。

2. ガリン・ローリーモデルLMの基本構成

厚生最大化モデルWFMはガリン・ローリーモデルLMの基本構成を用いて導出される。よって、ここではLMの基本構成をWFM導出の準備として、式(1)から(5)により記述する。

$$T_{ij} = \frac{\eta E_j \hat{W}_i^B \exp(-\beta^W c_{ij}^W)}{\sum_j \hat{W}_j^B \exp(-\beta^W c_{ij}^W)} \quad (1)$$

$$P_i = \frac{\alpha}{\eta} \sum_j T_{ij} \quad (2)$$

$$S_{ij} = \frac{\rho \sigma P_i \hat{W}_j^{NB} \exp(-\beta^S c_{ij}^S)}{\sum_j \hat{W}_j^{NB} \exp(-\beta^S c_{ij}^S)} \quad (3)$$

$$E_j^{NB} = \frac{1}{\rho} \sum_i S_{ij} \quad (4)$$

$$E_j = E_j^B + E_j^{NB} \quad (5)$$

ここで、i：居住地ゾーン、j：従業地ゾーン、

E_j ：ゾーンjの従業者数、 E_j^B ：基幹産業従業者数、 E_j^{NB} ：非基幹産業従業者数、 P_i ：ゾーンiの常住人口、 $\hat{W}_i^B$ ：居住立地ゾーンiに対する魅力度の重み、 $\hat{W}_j^{NB}$ ：非基幹産業立地ゾーンjに対する魅力度の重み、 T_{ij} ：居住地ゾーンiから従業地ゾーンjへの通勤トリップ数、 S_{ij} ：居住地ゾーンiから非基幹産業立地ゾーンjへのサービストリップ数、 σ ：対象圏域での常住人口一人当たり非基幹産業従業者数、 α ：対象圏域での従業者一人当たり常住人口、 η ：対象圏域での従業者一人当たり通勤トリップ数、 ρ ：対象圏域での非基幹産業従業者一人当たりサービストリップ数、 β^W 、 β^S ：パラメータ、 c_{ij}^W 、 c_{ij}^S ：ゾーンiからゾーンjまでの通勤トリップとサービストリップに対する交通費用とする。

また式(1)、(3)より式(6)の関係式が得られる。

$$E_j = \frac{1}{\eta} \sum_i T_{ij}, \quad P_i = \frac{1}{\rho \sigma} \sum_j S_{ij} \quad (6)$$

この式(6)と式(2)、(4)、(5)から P_i 、 E_j 、 E_j^{NB} を消去することにより、式(7)、(8)の関係式を得る。この関係式は、LMの基本構成から得られる解の均衡条件式として、WFMにおける数理計画問題の制約条件式になる。

$$\sum_j T_{ij} - \frac{\eta}{\rho \alpha \sigma} \sum_j S_{ij} = 0 \quad (7)$$

$$\sum_j T_{ij} - \frac{\eta}{\rho} \sum_j S_{ij} = \eta E_j^B \quad (8)$$

ただし以降、 $\lambda_1 = \eta / \rho \alpha \sigma$ 、 $\lambda_2 = \eta / \rho$ とおく。

3. 確率効用選択モデルPCMの導出

ここでは、WFM導出の基礎となるPCMを確率効用理論に基づいて導出する。このPCMは、世帯の選択行動を階層構造として捉え、従業地選択行動を上位、居住地選択行動を中位、非基幹産業のサービス地選択行動を下位として位置付ける。そして、この階層構造において、下の選択行動により享受する期待効用⁷⁾はすぐ上の選択行動の決定に反映されるものとする。すなわち、上位の従業地選択行動の決定には、中位の居住地選択行動により享受する期待効用が反映され、中位の居住地選択行動の決定には、下位のサービス地選択行動により享受する期待効用が反映される。

まず、ゾーンiに居住する世帯がゾーンkへサービストリップを行い、ゾーンkの非基幹産業サービ

スを受けることにより世帯が享受する効用 $U^S(k|i)$ を式(10)と仮定する。

$$U^S(k|i) = u_k^{NB} - c_{ik}^S + \varepsilon^S(k|i) \quad (10)$$

ここで、 u_k^{NB} : ゾーン k の非基幹産業サービスにより世帯が享受する効用、 c_{ik}^S : ゾーン i から k へのサービストリップの交通費用、 $\varepsilon^S(k|i)$: 確率項とする。この式(10)の $\varepsilon^S(k|i)$ にガンベル確率分布を仮定すれば、ゾーン i に居住する世帯がゾーン k へサービストリップを行う確率 $P^S(k|i)$ を式(11)のロジットモデルから得ることができる。

$$P^S(k|i) = \frac{\exp\{\beta^S(u_k^{NB} - c_{ik}^S)\}}{\sum_k \exp\{\beta^S(u_k^{NB} - c_{ik}^S)\}} \quad (11)$$

次に、ゾーン i に居住する世帯主が従業地ゾーン j へ通勤トリップを行い、ゾーン i に居住し享受する世帯の効用 $U^W(i|j)$ を式(12)のように表す。

$$U^W(i|j) = u_i^R + \frac{1}{\lambda_1} \bar{u}_i^S - c_{ij}^W + \varepsilon^W(i|j) \quad (12)$$

ここで、 u_i^R : ゾーン i に世帯が居住し享受する効用、 $\bar{u}_i^S$: ゾーン i に居住する世帯主がサービストリップを行い享受する期待効用($U^S(k|i)$ の k に関する期待値)、 c_{ij}^W : ゾーン i から j への通勤トリップの交通費用、 $\varepsilon^W(i|j)$: 確率項とする。

この式(12)は、居住地から享受する効用だけでなく、非基幹産業のサービス地選択行動を反映した期待効用 $\bar{u}_i^S$ を含む。また、式(12)の $\varepsilon^W(i|j)$ にガンベル確率分布を仮定すれば、ゾーン j に従業する世帯がゾーン i に居住する確率 $P^W(i|j)$ を式(13)のように得る。

$$P^W(i|j) = \frac{\exp\{\beta^W(u_i^R + \frac{1}{\lambda_1} \bar{u}_i^S - c_{ij}^W)\}}{\sum_i \exp\{\beta^W(u_i^R + \frac{1}{\lambda_1} \bar{u}_i^S - c_{ij}^W)\}} \quad (13)$$

ここで、魅力度の重みを式(14)、(15)のように定義する。

$$W_i^R = \exp(\beta^W u_i^R) \quad (14)$$

$$W_k^{NB} = \exp(\beta^S u_k^{NB}) \quad (15)$$

これは、確率効用理論に基づいたPCMの導出過程において、魅力度の重みに対し明確な効用理論からの解釈が可能であることを意味する。すなわち、PCMの魅力度の重みは他ゾーンの影響によらない自ゾーンのみ効用により定まる。換言すれば、PCMの魅力度の重みはゾーン固有の魅力度を意味する。なお以降において、ゾーン j とゾーン k が共に従業地であることから表記上ゾーン j に統一する。

よってLMの基本構成に、世帯の選択行動確率式(11)、(13)と式(14)、(15)を組入れれば、グラビティ

型の配分関数式(16)、(19)が導け、式(16)から(21)で記述されるPCMが導出される。

$$T_{ij} = \frac{\eta E_j W_i^R \exp\{\beta^W(\frac{1}{\lambda_1} \bar{u}_i^S - c_{ij}^W)\}}{\sum_j W_j^{NB} \exp\{\beta^W(\frac{1}{\lambda_1} \bar{u}_i^S - c_{ij}^W)\}} \quad (16)$$

$$\bar{u}_i^S = \frac{1}{\beta^S} \{\ln \sum_j W_j^{NB} \exp(-\beta^S c_{ij}^S) + 1 - \ln \rho \sigma P_i\} \quad (17)$$

$$P_i = \frac{\alpha}{\eta} \sum_j T_{ij} \quad (18)$$

$$S_{ij} = \frac{\rho \sigma P_i W_j^{NB} \exp(-\beta^S c_{ij}^S)}{\sum_j W_j^{NB} \exp(-\beta^S c_{ij}^S)} \quad (19)$$

$$E_j^{NB} = \frac{1}{\rho} \sum_i S_{ij} \quad (20)$$

$$E_j = E_j^R + E_j^{NB} \quad (21)$$

また、ゾーン j に従業する世帯が通勤トリップとサービストリップを行うことにより享受する期待効用を $\bar{u}_j$ とすれば、式(17)と同様に、 $\bar{u}_j$ は確率効用理論と選択行動の階層構造により式(22)のように表せる。

$$\bar{u}_j = \frac{1}{\beta^W} \{\ln \sum_i W_i^R \exp[\beta^W(\frac{1}{\lambda_1} \bar{u}_i^S - c_{ij}^W)] + 1 - \ln \eta E_j\} \quad (22)$$

4. 厚生最大化モデルWFMの導出

WFMの導出は、サービス地選択行動が反映された居住地選択行動により、世帯が享受する効用を集計した社会的厚生関数を、社会が最大化すると考える社会厚生の接近法に基づく。そして、WFMは数理計画問題の主問題から双対問題へ制約条件なしの最適化問題として定式化される。これにより、LMやPCMのような繰り返し計算が伴う居住地選択行動の決定とは異なり、WFMでは確率効用理論とLMの基本構成に基づきながら、通勤トリップとサービストリップの配分を同時決定し、世帯のより現実的な居住地選択行動の定式化を実現している。

最初に、厚生関数を定義する。対象圏域内のゾーン j に従業し、かつ圏域内において居住する世帯が、通勤トリップにより期待効用 $\bar{u}_j$ を享受する。この $\bar{u}_j$ をゾーン j の全従業者について集計した値をゾーン j の厚生 WF_j と定義する。ゆえに、対象圏域における厚生は式(23)になる。

$$WF = \sum_j WF_j = \sum_j D_j^W \bar{u}_j \quad (23)$$

ただし、 D_j^W : 対象圏域内からゾーン j への集中通勤トリップ数とする。

そして、対象圏域内の集中通勤トリップ総数が与

えられたとき、WFMでは式(23)の厚生を最大化することにより、通勤トリップとサービストリップの最適配分を同時決定し、世帯の最適な居住地選択行動を求める。ところで、LMやPCMでは通勤トリップとサービストリップの配分関数が単一制約型のグラビティモデルであった。しかし、WFMでは通勤トリップとサービストリップの配分関数が互いに関係を有することから、二重制約型のグラビティモデルにする必要がある。ゆえに、通勤トリップとサービストリップが互いに関係を持つ部分をバランシングファクター A_i^W , B_j^S とし、PCMの魅力度の重みを式(24), (25)とする。

$$W_i^R = A_i^W \cdot \tilde{W}_i^R \quad (24)$$

$$W_j^{NB} = B_j^S \cdot \tilde{W}_j^{NB} \quad (25)$$

ここで、 $\tilde{W}_i^R$, $\tilde{W}_j^{NB}$ はWFMの魅力度の重みとする。次に式(16), (19)に式(24), (25)を代入することにより、式(26), (27)が得られる。

$$T_{ij} = A_i^W B_j^S \tilde{W}_i^R \exp\{\beta^W(\frac{1}{\lambda_1} \bar{u}_i^S - c_{ij}^W)\} \quad (26)$$

ここで、

$$B_j^S = \eta E_j [\sum_i W_i^R \exp\{\beta^W(\frac{1}{\lambda_1} \bar{u}_i^S - c_{ij}^W)\}]^{-1}$$

$$S_{ij} = A_i^S B_j^S \tilde{W}_j^{NB} \exp(-\beta^S c_{ij}^S) \quad (27)$$

ここで、

$$A_i^S = \rho \sigma P_i \{\sum_j W_j^{NB} \exp(-\beta^S c_{ij}^S)\}^{-1}$$

したがって、式(22), (23)と式(26), (27)より、式(28)と制約条件からなる数理計画問題が定式化される。この問題をWFMの主問題と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \max_{\{T_{ij}, S_{ij}\}} WF = & -\frac{1}{\beta^W} \sum_{ij} T_{ij} (\ln \frac{T_{ij}}{\tilde{W}_i^R} - 1) - \sum_{ij} T_{ij} c_{ij}^W \\ & - \frac{1}{\beta^S} \sum_{ij} S_{ij} (\ln \frac{S_{ij}}{\tilde{W}_j^{NB}} - 1) - \sum_{ij} S_{ij} c_{ij}^S \quad (28) \end{aligned}$$

s. t. 式(7), 式(8)

この主問題からウォルフ(Wolfe, P.)の双対定理を用いて式(29)の双対問題が得られる。この双対問題をWFMの双対問題と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \min U(\nu_i, \gamma_j) = & \frac{1}{\beta^W} \sum_{ij} \tilde{W}_i^R \exp(-\beta^W(\nu_i + \gamma_j + c_{ij}^W)) \\ & + \frac{1}{\beta^S} \sum_{ij} \tilde{W}_j^{NB} \exp\{\beta^S(\lambda_1 \nu_i + \lambda_2 \gamma_j - c_{ij}^S)\} + \eta \sum_j E_j \quad (29) \end{aligned}$$

ここで ν_i , γ_j : 式(7), (8)に付随するラグランジュ乗数とする。

また双対問題の誘導過程において、通勤トリップとサービストリップは式(30), (31)により与えられる。

$$T_{ij} = \tilde{W}_i^R \exp\{-\beta^W(\nu_i + \gamma_j + c_{ij}^W)\} \quad (30)$$

$$S_{ij} = \tilde{W}_j^{NB} \exp\{\beta^S(\lambda_1 \nu_i + \lambda_2 \gamma_j - c_{ij}^S)\} \quad (31)$$

ここでWFMの適用に際して、式(29)の未知パラメータ β^W , β^S がPCMのパラメータであることに注意する必要がある。そして、5. にて明らかにするが A_i^W , B_j^S , や $\tilde{W}_i^R$, $\tilde{W}_j^{NB}$ もPCMの β^W , β^S , $\bar{u}_i$ により定まる。ゆえにWFMの適用において、モデルの論理性を保つため、WFMとPCMとのモデル構造上の対応関係を明らかにする必要がある。

5. LM, PCM, WFMの関係に関する考察

ここでは、WFMの通勤トリップとサービストリップの配分関数である二重制約型グラビティモデルと、PCMやLMの単一制約型グラビティモデルとの対応関係を明らかにすることにより、WFMのモデル構造を明確にする。

(1) LMとPCMの関係

LMとPCMの構造上の関係は、式(1), (3)と式(16), (19)とを比較することにより、式(32), (33)のように魅力度の重み間を通して得られる。

$$\hat{W}_i^R = W_i^R \exp(\beta^W \frac{\bar{u}_i^S}{\lambda_1}) \quad (32)$$

$$\hat{W}_j^{NB} = W_j^{NB} \quad (33)$$

式(32)から、通勤トリップの配分において、LMの重みはPCMの魅力度の重みと、居住地選択行動に影響を与えるサービストリップの期待効用 $\bar{u}_i^S$ による部分から構成されていることが理解できる。また、式(33)よりサービストリップの配分においては、LMの重みはPCMの魅力度の重みと全く同等である。

(2) PCMとWFMの関係

通勤トリップとサービストリップには、式(1), (3)から式(34), (35)の関係がある。

$$\sum_i T_{ij} = \eta E_j \quad (34)$$

$$\sum_j S_{ij} = \rho \sigma P_i \quad (35)$$

よって、式(30), (34)より式(36)が得られ、同様に式(31), (35)より式(37)が得られる。

$$\frac{T_{ij}}{\eta E_j} = \frac{\tilde{W}_i^R \exp(-\beta^W \nu_i) \exp(-\beta^W c_{ij}^W)}{\sum_i \tilde{W}_i^R \exp(-\beta^W \nu_i) \exp(-\beta^W c_{ij}^W)} \quad (36)$$

$$\frac{S_{ij}}{\rho \sigma P_i} = \frac{\tilde{W}_j^{NB} \exp(\beta^S \lambda_2 \gamma_j) \exp(-\beta^S c_{ij}^S)}{\sum_j \tilde{W}_j^{NB} \exp(\beta^S \lambda_2 \gamma_j) \exp(-\beta^S c_{ij}^S)} \quad (37)$$

この式(36), (37)と式(16), (19)とを比較して得ら

れた式(38), (39)と, 式(30), (31)よりラグランジュ乗数 ν_i , τ_j を消去する。そして, 式(17), (22)より得られた式(40), (41)を代入し, PCMとWFMのモデル構造上の関係式を式(42), (43)のように得ることができる。なお, 式(24)と(25)のバランシングファクター A_i^W , B_j^S は式(42), (43)より式(44), (45)のように定まる。

$$\tilde{W}_i^R \exp(-\beta^W \nu_i) = W_i^R \exp(\beta^W \frac{\bar{u}_i^S}{\lambda_1}) \quad (38)$$

$$\tilde{W}_j^{NB} \exp(\beta^S \lambda_2 \tau_j) = W_j^{NB} \quad (39)$$

$$\frac{1}{\beta^S} \ln \frac{S_{ij}}{W_j^{NB}} + c_{ij}^S = \frac{1}{\beta^S} - \bar{u}_i^S \quad (40)$$

$$\frac{1}{\beta^W} \ln \frac{T_{ij}}{W_i^R} + c_{ij}^W - \frac{\bar{u}_i^S}{\lambda_1} = \frac{1}{\beta^W} - \bar{u}_j \quad (41)$$

$$\tilde{W}_i^R = W_i^R \exp(-\frac{\beta^W}{\lambda_1 \beta^S}) \quad (42)$$

$$\tilde{W}_j^{NB} = W_j^{NB} \exp\{\beta^S \lambda_2 (\frac{1}{\beta^W} - \bar{u}_j)\} \quad (43)$$

$$A_i^W = \{\exp(\frac{\beta^W}{\lambda_1 \beta^S})\}^{-1} \quad (44)$$

$$B_j^S = \{\exp\{\beta^S \lambda_2 (\frac{1}{\beta^W} - \bar{u}_j)\}\}^{-1} \quad (45)$$

(3) LMとWFMの関係

式(32), (33)と式(42), (43)より, LMとWFMとのモデル構造上の関係式は式(46), (47)のように得られる。

$$\tilde{W}_i^R = \hat{W}_i^R \exp\{\frac{\beta^W}{\lambda_1} (\frac{1}{\beta^S} - \bar{u}_i^S)\} \quad (46)$$

$$\tilde{W}_j^{NB} = \hat{W}_j^{NB} \exp\{\beta^S \lambda_2 (\frac{1}{\beta^W} - \bar{u}_j)\} \quad (47)$$

(4) $\tilde{W}_i^R$, $\tilde{W}_j^{NB}$ を用いたPCMの T_{ij} , S_{ij}

WFMの二重制約型グラビティモデルの構造を明らかにするため, $\tilde{W}_i^R$, $\tilde{W}_j^{NB}$ を用いたPCMの通勤トリップとサービストリップの配分関数を求める。すなわち, 式(26), (27)に式(44), (45)を代入することにより, 式(48), (49)が得られる。

$$T_{ij} = \frac{\eta E_j \tilde{W}_i^R \exp\{\beta^W (\frac{1}{\lambda_1} \bar{u}_i^S - c_{ij}^W)\}}{\sum_j \tilde{W}_j^{NB} \exp\{\beta^W (\frac{1}{\lambda_1} \bar{u}_i^S - c_{ij}^W)\}} \quad (48)$$

$$S_{ij} = \frac{\rho \sigma P_i \tilde{W}_j^{NB} \exp\{\beta^S (\lambda_2 \bar{u}_j - c_{ij}^S)\}}{\sum_j \tilde{W}_j^{NB} \exp\{\beta^S (\lambda_2 \bar{u}_j - c_{ij}^S)\}} \quad (49)$$

ここで,

$$\bar{u}_i^S = \frac{1}{\beta^S} [\ln \sum_j \tilde{W}_j^{NB} \exp\{\beta^S (\lambda_2 \bar{u}_j - c_{ij}^S)\} + 1 - \ln \rho \sigma P_i]$$

$$\bar{u}_j = \frac{1}{\beta^W} [\ln \sum_i \tilde{W}_i^R \exp\{\beta^W (\frac{1}{\lambda_1} \bar{u}_i^S - \frac{1}{\lambda_1 \beta^S} - c_{ij}^W)\} + 1 - \ln \eta E_j]$$

6. 提案するWFMの適用法

提案するWFMの適用手順を図-1に示す。また, この適用法において, t 期を常住人口および非基幹産業従業者数に配分を定める時間断面とし, $t-1$ 期をモデルのパラメータと魅力度の重みをキャリブレーションする時間断面とする。

WFMの魅力度の重み $\tilde{W}_i^R$, $\tilde{W}_j^{NB}$ の算定法について説明する。 $\tilde{W}_i^R$, $\tilde{W}_j^{NB}$ は式(42), (43)より, PCMの魅力度の重み W_i^R , W_j^{NB} から定まる。これは, W_i^R , W_j^{NB} が自ゾーンのみの要因により定まる効用として定義されることから, $\tilde{W}_i^R$, $\tilde{W}_j^{NB}$ もまた効用となることを意味する。ゆえに, $\tilde{W}_i^R$, $\tilde{W}_j^{NB}$ をLMの重みと同様に適当な指標を用いて決定するのではなく, 確率効用理論と整合するように $\tilde{W}_i^R$, $\tilde{W}_j^{NB}$ を W_i^R , W_j^{NB} より決定する必要がある。また W_i^R , W_j^{NB} はゾーン特性に最も適合させるために, キャリブレーションにより算定する。具体的な手順は, まず初期値として, $W_i^{R(t-1)}$, $W_j^{NB(t-1)}$ に 1 ($u_i^R = 0$, $u_j^{NB} = 0$) を与え, この時の $\beta^{W(t-1)}$, $\beta^{S(t-1)}$ を最尤法により, 数値計算のニュートンラフソン法を用いて推定する。次にこれらの値から, 式(18)により常住人口を, 式(20)により非基幹産業従業者数を求め, それぞれを $P_i^{(t-1)c}$, $E_j^{NB(t-1)c}$ とする。さらに, これらの値を式(50), (51)に代入し新しい魅力度の重み $W_i^{R(t-1)N}$, $W_j^{NB(t-1)N}$ を算定する。

$$W_i^{R(t-1)N} = \frac{P_i^{(t-1)}}{P_i^{(t-1)c}} W_i^{R(t-1)} \quad (50)$$

$$W_j^{NB(t-1)N} = \frac{E_j^{NB(t-1)}}{E_j^{NB(t-1)c}} W_j^{NB(t-1)} \quad (51)$$

これらの計算手順により, 得られた $W_i^{R(t-1)N}$, $W_j^{NB(t-1)N}$ を $W_i^{R(t-1)}$, $W_j^{NB(t-1)}$ と置き, 最初のステップに戻る。そして, この繰り返し計算を $W_i^{R(t-1)}$, $W_j^{NB(t-1)}$ が収束するまで実行し, $\beta^{W(t-1)}$, $W_i^{R(t-1)}$, $\beta^{S(t-1)}$, $W_j^{NB(t-1)}$ を求める。次に, これらの値から $\bar{u}_i^{S(t-1)}$ および $\bar{u}_j^{(t-1)}$ を求め, 式(42), (43)より目的とする $\tilde{W}_i^{R(t-1)}$, $\tilde{W}_j^{NB(t-1)}$ を算定する。

以上により, 得られたパラメータ $\beta^{W(t-1)}$, $\beta^{S(t-1)}$ と魅力度の重み $\tilde{W}_i^{R(t-1)}$, $\tilde{W}_j^{NB(t-1)}$ の値が t 期におい

ても不変であると仮定して、常住人口と非基幹産業従業者数を予測する。すなわち、 t 期の基幹産業従業者数 $E_j^{B(t)}$ と交通費用 $c_{ij}^{W(t)}$ 、 $c_{ij}^{S(t)}$ と与え、式(29)のWFMの双対問題を、ニュートンラフソン法により

解き、最適なラグランジュ乗数 ν_i, γ_j を求める。この得られた ν_i, γ_j の値を式(30), (31)に代入し、通勤トリップ数とサービストリップ数を求める。さらに、この通勤トリップ数とサービストリップ数を、

$$E_j^{NB} = \frac{1}{\eta} \sum_i T_{ij} - E_j^B, \quad P_i = \frac{\alpha}{\eta} \sum_j T_{ij} \quad (52)$$

または

$$E_j^{NB} = \frac{1}{\rho} \sum_i S_{ij}, \quad P_i = \frac{1}{\rho\sigma} \sum_j S_{ij} \quad (53)$$

に代入することにより、常住人口と非基幹産業従業者数を求める。

7. WFMの神戸市への適用結果

(1) 対象圏域と使用データ

本研究では、提案したWFMの適用法を用いて、WFMの有効性を実証するため、図-2の神戸市を対象圏域とした。また、モデルの適用単位として、神戸市の各行政区を1ゾーンとした。なお、WFMの有効性を比較検討するため、LMの神戸市への適用も行った。

WFMとLMともに、昭和55年をパラメータと魅力度の重みのキャリブレーション年次とし、昭和60年を常住人口と非基幹産業従業者数の予測年次とした。そして、神戸市の各行政区における従業地による就業者数(従業者数)と常住人口は、昭和55年度と昭和60年度の国勢調査データを使用した。また、通勤トリップ数とサービストリップ数として、昭和55年度の京阪神都市圏パーソントリップ調査データでの出勤目的と自由目的のトリップデータを使用した。なお、交通費用には所要時間データを用いた。

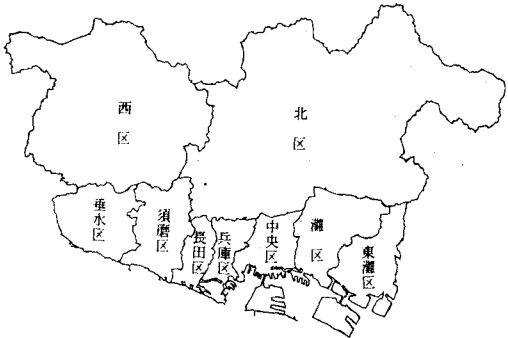


図-2 神戸市の行政区分

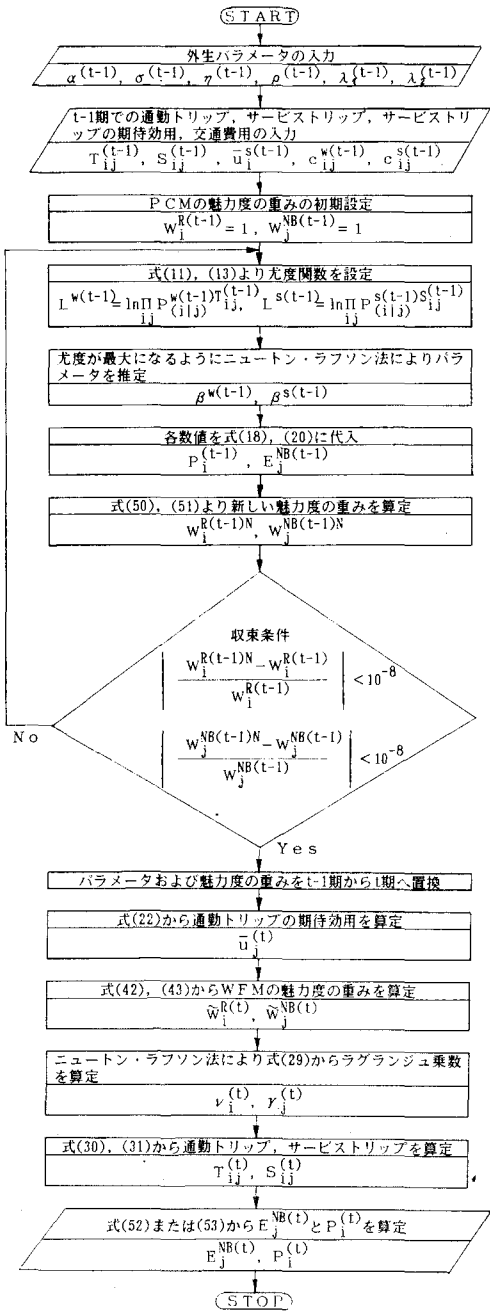


図-1 WFMの適用手順

(2) 最小必要法⁹⁾による基幹産業従業者数と非
基幹産業従業者数の分類

ローリー型の土地利用モデルでは、基幹産業従業者数 E_j^B を外生的に与える必要がある。そして、この E_j^B は特定の産業に従業する全従業者数により与えられることが一般的である。だが、産業構造の変化により、産業ごとに基幹・非基幹の分類を行うことは不適当と考え、本研究では最小必要法による分類法を採用した。次に最小必要法の説明を行う。

非基幹産業従業者数 E_j^{NB} は対象圏域内の需要に応じる品物やサービスを生産する産業の従業者数である。そこで、 E_j^{NB} を対象圏域内で必要な最小の需要に応じる従業者数とし、かつ常住人口と全従業者数の和に比例すると考える。そして、大分類で定めた各産業別に E_j^{NB} を算定する。すなわち図-3より E_j^{NB} は線分 $\overline{AB}$ であり、 E_j^B は線分 $\overline{BC}$ とする。なお、採用する $\tan \theta$ は、複数の都市を対象に図-3の縦軸と横軸に対応する点をプロットし、最小の $\tan \theta$ の値とする。そして、神戸市へ適用した最小必要法の $\tan \theta$ は、京阪神都市圏内で人口15万人以上の都市を対象に求めた。最小必要法の適用により得られた E_j^B および E_j^{NB} を表-1に示す。

(3) WFMの神戸市への適用結果

WFMとLMの神戸市への適用により得られたパラメータと魅力度の重みを表-2、3に示す。なお、LMの魅力度の重みとして、 $\hat{W}_i^B$ に一人当たりの量数、 $\hat{W}_i^{NB}$ に非基幹産業従業者数を用いた。また、表-2、3の魅力度の重みとパラメータを用いたWFMとL

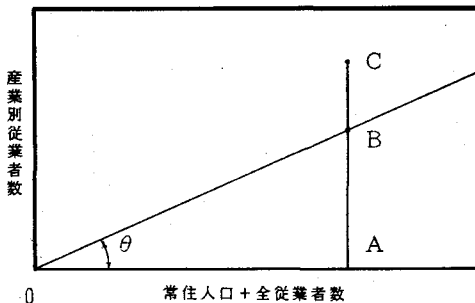


図-3 最小必要法概念図

表-1 最小必要法による E_j^B 、 E_j^{NB} と E_j 、 P_i の実績値

年 度	昭和55年度				昭和60年度			
	E_j^B	E_j^{NB}	E_j	P_i	E_j^B	E_j^{NB}	E_j	P_i
東灘区	26981	36060	63041	183284	28620	36566	65186	184734
灘 区	28880	29353	58233	142313	27613	27665	55278	133745
中央区	172840	49420	222260	115329	176537	50714	227251	119163
兵庫区	64039	35407	99446	142418	60799	32797	93596	130429
北 区	6103	28392	34495	164714	7492	30832	38324	177221
長田区	36172	34320	70492	163949	36309	31710	68019	148590
須磨区	8609	28165	36774	155683	8185	32446	40611	161966
垂水区	573	35403	35976	212756	2837	38081	40918	224212
西 区	16262	17620	33882	86942	17136	21835	38973	110774
合 計	360459	294140	654599	1367390	365510	302646	668156	1410834

表-2 通勤トリップにおけるLMとWFMの魅力度の重みとパラメータ値

モデル	通勤トリップの魅力度の重み ($\hat{W}_i^B, \hat{W}_i^{NB}$)									β^W	α	η
	東灘区	灘 区	中央区	兵庫区	北 区	長田区	須磨区	垂水区	西 区			
LM	1.067	0.971	0.971	0.875	1.067	0.848	1.040	1.012	1.149	0.0485	2.0869	0.5224
WFM	0.733	0.427	0.150	0.304	2.487	0.636	0.916	2.369	0.980	0.0676	2.0869	0.5224

表-3 サービストリップにおけるLMとWFMの魅力度の重みとパラメータ値

モデル	サービストリップの魅力度の重み ($\hat{W}_i^{NB}, \hat{W}_i^{NB}$)									β^S	σ	ρ
	東灘区	灘 区	中央区	兵庫区	北 区	長田区	須磨区	垂水区	西 区			
LM	1.103	0.898	1.512	1.083	0.669	1.050	0.862	1.083	0.539	0.1847	0.2151	1.7508
WFM	0.718	0.782	3.748	1.193	0.361	0.791	0.524	0.507	0.377	0.2013	0.2151	1.7508

Mの予測値、実績値及び的中率を表-4に示す。なお、的中率には式(54)、(55)を用いた。

$$\text{Hit } P = \sum_i \min\left(\frac{\hat{P}_i}{\sum_i \hat{P}_i}, \frac{P_i}{\sum_i P_i}\right) \times 100 (\%) \quad (54)$$

$$\text{Hit } E^{NB} = \sum_j \min\left(\frac{\hat{E}_j^{NB}}{\sum_j \hat{E}_j^{NB}}, \frac{E_j^{NB}}{\sum_j E_j^{NB}}\right) \times 100 (\%) \quad (55)$$

ここで、Hit P、Hit E^{NB} は常住人口と非基幹産業従業者数の的中率とする。

表-4より、 P_i に関してWFMはLMに比べて的中率が12.27%高くなったが、反対に、 E_j^{NB} に関しては、的中率が3.86%低下した。すなわち、WFMはLMに比べ、 P_i については精度が非常に高くなるが、 E_j^{NB} については少し低くなる。ゆえに、二つの的中率を考え合わせるとWFMはLMに比べて、精度が高くなったといえる。これより、神戸市への

表－４ WFMとLMの予測値、実績値、的中率

ゾ ー ン	WFM		LM		実績値	
	P_i	E_j^{NB}	P_i	E_j^{NB}	P_i	E_j^{NB}
東 灘 区	161118	31152	173144	39850	184734	36566
灘 区	135118	30403	184375	35856	133745	27665
中 央 区	84285	22963	229909	50922	119163	50714
兵 庫 区	124026	30044	181857	39234	130429	32797
北 区	177285	35772	108798	22694	177221	30832
長 田 区	165842	34253	151213	33647	148590	31710
須 磨 区	180326	39797	149395	31043	181966	32446
垂 水 区	237159	47817	109448	25385	224212	38081
西 区	118401	26063	98411	19630	119774	21835
合 計	1383560	298264	1386550	298261	1410834	302646
的中率(%)	96.07	88.54	83.80	92.40		

適用を通しWFMの一応の有効性が確認できた。

また、最小必要法を使用しなかった場合(産業大分類において、第1次産業、製造業、公務を基幹産業とし、その他を非基幹産業とした場合)、 P_i に関してはWFMの的中率が94.86%となり、使用した場合に比べ1.21%低下した。さらに、 E_j^{NB} に関してはWFMの的中率が72.76%となり、使用した場合に比べ15.78%低下した。ゆえに、最小必要法を使用しなければ総じてWFMの的中率が低下したことから、最小必要法の有効性が確認された。

表－4より、実績値との差が大きいゾーンは常住人口、非基幹産業従業者数とも中央区であった。これは次の理由によると考えられる。中央区は、神戸市内の他のゾーンと比べ、常住人口に対し基幹・非基幹産業の従業者数が非常に大きい。しかし、この関係をローリー型モデルでは、対象圏域内で一定の α, σ でしか調整することができない。ゆえに、中央区のようなゾーンが存在すると調整が取れなくなり適合度が悪くなると考えられる。このようなゾーンに対し、いかにモデルで対処するかが今後の課題となる。

8. むすび

本研究により得られた主な結論を次に列記する。

- ①グループ余剰最大化モデルGSMと等価な厚生最大化モデルWFMを、社会厚生の接近法により導出した。
- ②提案した厚生最大化モデルWFMの適用法は、確

率効用選択モデルPCMのパラメータと魅力度の重みを使用し、確率選択理論に基づきWFMのパラメータと魅力度の重みを決定する方法である。この適用法により、WFMの論理性を損なうことなく現実の都市への適用が可能となった。

- ③基幹産業従業者数と非基幹産業従業者数との分類法として、産業別に基幹・非基幹産業従業者数の分類を行う最小必要法の有効性を神戸市への適用を通し確認した。
- ④WFMの神戸市への適用結果とガリン・ローリーモデルLMの適用結果とを比較検討することにより、WFMの一応の有効性を確認した。
- ⑤魅力度の重み間の関係により、WFMの通勤トリップとサービストリップの配分関数である二重制約型グラビティモデルとPCM, LMの単一制約型グラビティモデルとの対応関係を明らかにし、WFMのモデル構造を明確にした。

参考文献

- 1) Wilson, A. G. : Urban and Regional Models in Geography and Planning, JHON WILEY & SONS, 1974.
- 2) Foot, D. : Operational Urban Models, Methuen & Co. Ltd, 1981.
- 3) Wilson, A. G., Coelho, J. D., Macgill, S. M. and Williams, H. C. W. L. : Optimization in Locational and Transport Analysis, JHON WILEY & SONS, 1981.
- 4) Varia, H. R. : Microeconomic Analysis, Second Edition, W. W. Norton & Company, 1984.
- 5) 加藤晃・宮城俊彦・中嶋良樹・坪内恭史：余剰最大化モデルの岐阜市への適用，土木計画学研究・講演集，No.10，pp.283～290，1987.
- 6) 福島雅夫：非線形最適化の理論，産業図書，1980.
- 7) Williams, H. C. W. L. : On the Formation of Travel Demand Models and Economic Evaluation Measures of User Benefit, Environment and Planning, A, Vol.9, pp.285～344, 1977.
- 8) Goldberg, M., Chinloy, P. : Urban Land Economics, JOHN WILEY & SONS, 1984.