

道路網の信頼性解析に対するモンテカルロ法の適用

Some Aspects of the Application of Monte Carlo Methods
to a Road Network Reliability Analysis

若林 拓史*, 飯田 恭敬**, 福島 博***

By Hiroshi WAKABAYASHI, Yasunori IIDA and Hiroshi FUKUSHIMA

Terminal reliability between given two nodes of a road network is evaluated by Monte Carlo methods. Two Monte Carlo methods are introduced and compared; One is a traditional Monte Carlo method with direct sampling, and the other is an improved Monte Carlo method with restricted sampling. The restricted-sampling method can reduce computational time by its variance reducing technique, while the direct sampling method is very time-consuming to obtain the same accuracy for reliability as that of restricted-sampling method. Numerical examples of small size networks are executed to examine the validity of the restricted sampling method, and the merit and defects of both Monte Carlo methods are discussed.

1. はじめに

道路網整備水準の一指標として信頼性を考える。筆者らはこれまで、交通量配分を用いた方法¹⁾、信頼性グラフ解析に基づき、ミニマルパス・カットを用いた信頼性評価手法²⁾⁻⁴⁾を提案している。本論文では、これらの解析手法とは原理的にまったく異なる手法としてモンテカルロ法をとりあげ、道路網信頼性解析に対する適用性を検討する。モンテカルロ法には、従来広く知られている直接サンプリング法の他に、精度の向上や計算時間の短縮のために種々

の手法が開発されている。本論文では、限定サンプリングによるモンテカルロ法をとりあげ、直接的モンテカルロ法との比較を行う。さらに、モンテカルロ法そのものの道路網信頼性解析に対する適用性を考察する。

2. 変数の定義

本研究では、交通ネットワークの任意の2地点間において、円滑な走行移動が保証される確率をノード間信頼度と定義する。そして、リンク信頼度を既知とし、リンク信頼度からノード間信頼度を求める。変数を以下に定義する。

X_a : リンク a の状態を表す確率変数

$$= \begin{cases} 1 & : \text{リンク } a \text{ での円滑な走行移動が可能} \\ 0 & : \text{そうでない場合} \end{cases} \quad (1)$$

$X = (X_1, \dots, X_L)$: リンクの状態を示す二値ベクトル

$b = (b_1, \dots, b_r)$: リンクの状態を示す二値ベクトル
(実現値ベクトル)

* 正会員 工修 大阪府立工業高等専門学校 助教授
(〒572 寝屋川市幸町26-12)

** 正会員 工博 京都大学工学部 教授
(〒606 京都市左京区吉田本町)

*** 正会員 工修 近畿日本鉄道
(〒543 大阪市天王寺区上本町6-1-55)

c_v : 直接的モンテカルロ法で用いる X に対する
サンプルベクトル ($v=1, \dots, N$)

s_v : 分散減少法によるモンテカルロ法で用いる X
に対するサンプルベクトル ($v=1, \dots, N$)

$\phi(X)$: 構造関数

$$= \begin{cases} 1: \text{対象とする2点間で円滑な走行移動が可能} \\ 0: \text{そうでない場合} \end{cases} \quad (2)$$

l : リンク総数

N : 試行回数

R : ノード間信頼度の厳密値

ここに, R は, 次式で求められる.

$$R = \Pr\{\phi(X)\} \quad (3)$$

$$= \sum_b \phi(b) \Pr\{X=b\} \quad (4)$$

$$= E[\phi(X)] \quad (5)$$

3. 直接的モンテカルロ法

(Crude Monte Carlo Method)

このモンテカルロ法は, 直接サンプリングによる最も基本的なモンテカルロ法であり, 乱数発生の際のサンプリング領域を単純に $[0, 1]$ の区間にとるものである. まず, X に対して $c_1, \dots, c_N$ という N 個の統計的に独立なサンプルベクトルを発生させる. ここに, c_v の要素 c_a は, 上述のサンプリング領域に対して, 各リンクの信頼度 $r_a = E[X_a]$ にしたがって決定される. ノード間信頼度 R_c は,

$$R_c = N^{-1} \sum_{v=1}^N \phi(c_v) \quad (6)$$

で求められる. また, R_c の分散は,

$$\text{Var}(R_c) = N^{-1} R(1-R) \quad (7)$$

で与えられる. なお添字の C は, Crude Monte Carloを表している.

4. 分散減少法を取り入れたモンテカルロ法

(Restricted-sampling Monte Carlo Method)

(1) 直接法の問題点と分散減少法

前節で述べた直接的モンテカルロ法は, 計算が非常に簡略であるという利点を有している. その反面, システム信頼度が非常に高い場合には所定精度を得るために試行回数がきわめて多くなるのが欠点である. すなわち, 直接的モンテカルロ法による不信頼度 $F = 1 - R$ の推定値 $\hat{F}$ の分散は,

$$\text{Var}\{\hat{F}\} = (1-F)F/N \quad (8)$$

で与えられるので, 相対誤差は,

$$\sqrt{\text{Var}\{\hat{F}\}}/F = \sqrt{1-F}/\sqrt{NF} \quad (9)$$

となる. したがって, 所定精度に対する試行回数は式(9)で決定でき, システム信頼度が高信頼度になるほど, また, 要求精度が高くなるほど試行回数ひいては計算時間が増大する.

また, 道路網を対象とした場合, システム規模が大きくなるため, 1回の試行に要する計算時間が増加する. したがって, 試行回数を節約できる手法が有効となる. 本節でとりあげる限定サンプリングによるモンテカルロ法は, R の推定値の分散を減少させることができる. したがって直接法と同一の試行回数でも結果の精度向上が期待できる.

(2) 分散減少法(variance-reducing technique)の基本的考え方と数学的記述

分散減少法の基本的な考え方は, 対象とする値について既にわかっている値(本例では上・下限値)を利用してサンプリング領域を限定し(これを限定サンプリングという), 結果的に推定値の分散を減少させることによって, 推定値の精度の向上あるいは試行回数の節約を図ろうとするものである. 分散減少法の概念は従来から知られているものであるが⁵⁾, ここでは, Kumamoto・Tanaka・Inoueによって開発された方法^{6), 7)}を取り上げる. 本節では手法の理解を助けるために紙面の許す範囲でこの手法の紹介と解説を行う.

最初に, 信頼度の上・下限値を R_U, R_L と定義し, R_U, R_L を規定する二値構造関数を ϕ_U, ϕ_L とする. ϕ_U, ϕ_L は,

$$\phi_L(b) \leq \phi(b) \leq \phi_U(b), \text{ for all } b \quad (10)$$

$$\phi_L(b) \neq 0, \phi_U(b) \neq 1 \quad (11)$$

を満たす. また, すべての a ($0 \leq a \leq l$) に対して,

$$R_{L,a}(b_1, \dots, b_a) = \sum_{b_{a+1}, \dots, b_l} \phi_L(b) \Pr\{X=b\} \quad (12)$$

$$R_{U,a}(b_1, \dots, b_a) = \sum_{b_{a+1}, \dots, b_l} \phi_U(b) \Pr\{X=b\} \quad (13)$$

と定義する. $R_{L,a}$ と $R_{U,a}$ は, 限定サンプリングによるサンプルベクトル s の発生に利用する補助変数である. ϕ_L と $\phi_U, R_{L,a}$ と $R_{U,a}$ の構成法はAppendix 1で述べる.

$R_{L,0}$ と $R_{U,0}$ をそれぞれ R_L, R_U とすれば, 次の不等式が成立する.

$$0 < R_L \leq R \leq R_U \leq 1 \quad (14)$$

もし $R_U = R_L$ という等式が成り立つとすれば $R = R_U = R_L$ であり、信頼度 R はシミュレーションによらずとも求めることができる。したがって以降は、

$$R_U - R_L > 0 \quad (15)$$

という仮定に基づいて考えることにする。

式(4)を変形すると次式を得る。

$$R = \sum_b [\phi(b) - \phi_L(b)] \Pr\{X=b\} + \sum_b \phi_L(b) \Pr\{X=b\} \quad (16)$$

$$= \sum_b [\phi(b) - \phi_L(b)] \Pr\{X=b\} + R_L \quad (17)$$

ここで、 $\Pr\{X=b\}$ とは違った確率を持ったランダムなサンプルを発生させることを考える。ここで次の範囲を定義する。

$$Z \equiv \{b \mid \phi(b) - \phi_L(b) = 1\} \quad (18)$$

$$Y \equiv \{b \mid \phi_U(b) - \phi_L(b) = 1\} \quad (19)$$

式(17)を $Z \subset Y$ を考慮して変形すると、

$$R = \sum_{b \in Z} [\phi(b) - \phi_L(b)] \Pr\{X=b\} + R_L \quad (20)$$

$$= \sum_{b \in Y} [\phi(b) - \phi_L(b)] \Pr\{X=b\} + R_L \quad (21)$$

を得る。次に、 Y に含まれる新たなランダムベクトルとして、 $y = (y_1, \dots, y_t)$ を導入する。そして、 $\Pr\{y=b\}$ という確率を、 $b \in Y$ という条件で次のように定義する。

$$\Pr\{y=b\} \equiv \Pr\{X=b\} / (R_U - R_L) \quad (22)$$

サンプリング領域が、 R_U と R_L の間で定義されていることに着目すれば、式(21)は次のように書き直すことができる。

$$R = (R_U - R_L) \sum_{b \in Y} [\phi(b) - \phi_L(b)] \Pr\{y=b\} + R_L \quad (23)$$

式(10),(19)から、 $\phi_L(b) \equiv 0$ であるから Y に含まれるすべての b について、

$$R = (R_U - R_L) \sum_{b \in Y} \phi(b) \Pr\{y=b\} + R_L = (R_U - R_L) E[\phi(y)] + R_L \quad (24)$$

となる。式(24)の期待値は、領域 Y でランダムなサンプリングを行なうことによって推定することができる。

この式(24)が分散減少法の基本式である。すなわち、 Y に含まれる y のうち統計的に独立な N 個のサンプルベクトル $s_1, \dots, s_N$ を考える。分散減少法によるモンテカルロ法によって評価される信頼度 R

を R_R と表す。ここでの添字 R は、限定サンプリング (Restricted sampling) を表す。すなわち、 R_R は、

$$R_R = (R_U - R_L) N^{-1} \sum_{i=1}^N \phi(s_i) + R_L \quad (25)$$

で求められる。 $s_1, \dots, s_N$ というランダムなサンプルベクトルは、Appendix 2で述べる方法によって簡単に求めることができる。

分散減少法によって求められたシステム信頼度の推定値の分散は、次式で与えられる。

$$\text{Var}(R_R) = N^{-1} (R_U - R) (R - R_L) \quad (26)$$

直接法の分散と分散減少法による分散とを比較すると、

$$\text{Var}(R_C) \geq \text{Var}(R_R) \quad (27)$$

が常に成立する。したがって、分散減少法によるシステム信頼度の推定値の分散は、同一試行回数で直接法によるものより常に小さい。図-1は、両手法の分散をグラフに示したものである。

5. モデル計算

本節では、前節までに述べた2種類のモンテカルロ法を仮定のネットワークに適用してその有効性を検討する。対象とするネットワーク形状は、図-2,3

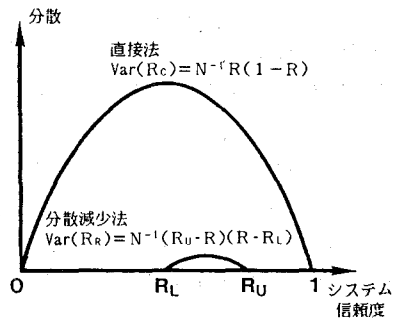


図-1 モンテカルロ法の分散の比較

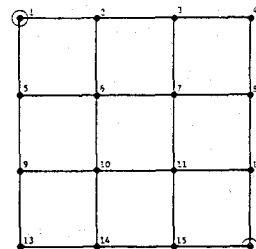


図-2 4×4のネットワーク (16ノード24リンク)

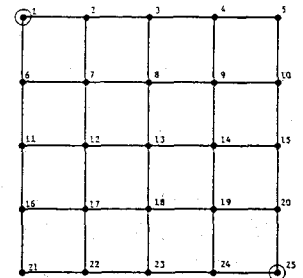


図-3 5×5のネットワーク (25ノード40リンク)

表-1 リンク信頼度一律の場合の計算結果

ネットワーク形状 とリンク信頼度		厳密値		モンテカルロ法 (直接法)			モンテカルロ法 (分散減少法)		
		厳密値	CPU-TIME	推定値 (誤差)	CPU-TIME	分散 ($\times 10^{-6}$)	推定値 (誤差)	CPU-TIME	分散 ($\times 10^{-6}$)
4×4	0.9	0.97505	738.082	0.97770 (+0.00265)	5.683	2.4327	0.97542 (+0.00037)	6.698	0.054064
	0.5	0.19844	737.886	0.19170 (-0.00674)	3.989	15.906	0.19818 (-0.00026)	5.545	4.4658
5×5	0.9	-----	-----	0.97730 (+0.00213)	13.937	(2.2185)	0.97517 (-----)	16.194	(0.034769)
	0.5	-----	-----	0.15400 (+0.00244)	9.202	(13.028)	0.15156 (-----)	12.425	(4.3706)

CPU-TIME：単位（秒）

※ 5×5のネットワークでの分散値や誤差は、厳密値が求められないためモンテカルロ法（分散減少法）による推定値を基準値とした値である。

に示す4×4、5×5ネットワークである。リンク信頼度を一定値(0.9,0.5の2ケース)および乱数発生によって与え、両ネットワークの対角線ノードペアを対象に計算を行った。

最初に、4×4ネットワークで、リンク信頼度が一定値の場合を述べる。表-1上段では、厳密値、直接法および分散減少法によるモンテカルロ法の結果とそれぞれのCPU-TIMEを示している。厳密値は事象空間法（総当たり法）にて求めている。計算は京都大学大型計算機センターにて行い、厳密値のCPU-TIMEはバクトルプロセッサFACOM VP-400Eによるもの、その他はFACOM M-780によるものである。また、モンテカルロ法の分散は、厳密値から計算したものである。

ここで、分散減少法での ϕ_U 、 ϕ_L の構成法を述べる。数学的記述はAppendix 1で述べているので省略し、 ϕ_U 、 ϕ_L を構築するミニマルパス、カットの選択法を述べる。限定サンプリングでは、上限値 R_U 、下限値 R_L の差が小さい方が良好な近似値を得ることができる（図-1参照）。部分的なミニマルパス・カットを利用して効率的に上・下限値を得る方法は、ミニマルパス・カットをその生起確率の順に順序づけ、その上位からパス、カットを選択すればよいことが明らかとなっている³⁾。これを利用して、本ケースでは、パス、カットとも4本ずつを選択した。このとき、カットによる上限値は、0.97913（リンク信頼度0.9）、0.50391（同0.5）、パスによる下限値はそれぞれ、0.84254、0.052246であった。

両モンテカルロ法による厳密値への接近の様子（試行回数1万回まで）を図-4に示す。図-4から、直

接法では厳密値になかなか収束しないが、分散減少法では良好な収束をし、分散の減少効果が現れていることがわかる。分散を比較すると、リンク信頼度0.9の場合で約45分の1、0.5の場合で約4分の1になっている。これに対して計算時間は、それぞれ約1.2倍、約1.4倍にしかなっていない。計算効率を、計算時間と分散の積で定義すると、分散減少法は直接法に比べて、リンク信頼度0.9の場合で約38倍、0.5の場合で約2.6倍の計算効率を持つことを示している。厳密値との誤差も、直接法よりも1桁小さくなっている。このように分散減少法は、きわめて高い計算精度を有することがわかる。しかしながら、直接法における誤差はそれぞれ+0.00265、-0.00674であり、道路網信頼度を対象とした場合、実用上は直接法で十分であろうと考えられる。

次に各リンク信頼度を0.5～1.0の乱数で与えてリンク信頼度の組合せを発生させる（これをパターンとよぶ）。そして、パターン数を30とし、ノードペア(1,16)間の信頼度を計算する。ここでそれぞれの

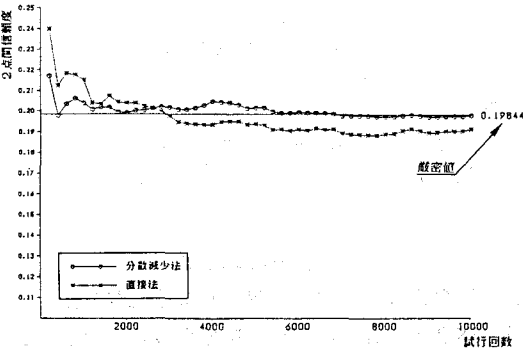


図-4 モンテカルロ法によるシミュレーションの様子
(4×4のネットワーク、リンク信頼度0.5の場合)

厳密値を求めることは、膨大なCPU-TIME（1パターンあたり約700 秒）を要する。一方、リンク信頼度が0.9 および0.5 の計算で、分散減少法による推定値がきわめて精度の高い近似値を与えることがわかったので、以下は分散減少法による推定値（試行回数1万回）を基準値として、これとの比較を行うことにする。30パターンでの計算結果を表-2に示す。直接法による推定値と基準値との誤差は、最大0.00766、最小0.00021であった。これより直接法は、精度が高く、安定した結果を示すことがわかる。

一方、分散減少法の分散は、厳密値が求められな

表-2 乱数パターン1～30での計算結果
(4×4のネットワーク)

		モンテカルロ法 (分散法)		モンテカルロ法 (直接法)	
		基準値	推定値	基準値との誤差	
乱数	1	0.85218	0.85610	0.00392	
	2	0.84666	0.84870	0.00204	
	3	0.85966	0.86060	0.00094	
	4	0.91302	0.91080	-0.00222	
	5	0.95913	0.96230	0.00317	
	6	0.64155	0.64340	0.00185	
	7	0.76183	0.75980	-0.00223	
	8	0.90937	0.90820	-0.00117	
	9	0.77338	0.76760	-0.00578	
	10	0.89991	0.89790	-0.00201	
パ	11	0.71889	0.71910	0.00021	
	12	0.82807	0.82480	-0.00327	
	13	0.81475	0.81890	0.00415	
	14	0.81884	0.81330	-0.00554	
	15	0.67754	0.67450	-0.00304	
	16	0.63784	0.63680	-0.00104	
	17	0.94150	0.93870	-0.00280	
	18	0.80479	0.80670	0.00191	
	19	0.75008	0.74710	-0.00298	
	20	0.69900	0.69930	0.00030	
タ	21	0.91840	0.91730	-0.00110	
	22	0.80870	0.80370	-0.00500	
	23	0.79638	0.79960	0.00322	
	24	0.79471	0.79540	0.00069	
	25	0.76464	0.76920	0.00456	
	26	0.80045	0.80450	0.00405	
	27	0.73414	0.73590	0.00176	
	28	0.69154	0.69920	0.00766	
	29	0.81820	0.81550	-0.00270	
	30	0.71920	0.72130	0.00210	
平均		0.79181	0.79186	0.00005	
誤差の絶対値の平均		---		0.00279	
平均CPU-TIME		6.56	5.40		

CPU-TIME: 単位 (秒)

いので試行1万回での推定値によって計算すると、平均 2.4468×10^{-6} となり直接法の約6分の1となった。これに対しCPU-TIMEは平均6.56秒と、直接法の約1.2 倍であった。したがって計算効率は直接法の約5.3 倍となる(表-3)。

次に、5×5ネットワークで同様の計算を行う。ここで厳密値の計算は、以下の理由で行っていない。すなわち、厳密値の計算は事象空間法で行っているためリンク数が1本増えるごとに計算時間は約2倍となる。上述の4×4ネットワークは構成リンク数が24であり、本ネットワークでは構成リンクは40となる。したがって、16リンク増加するので4×4ネットワークの場合の2¹⁶倍のCPU-TIMEがかかることとなる。厳密値を求めるためには、およそ 740×2^{16} 秒の計算時間を要することが予想され、これは事実上不可能といえる。したがって4×4ネットワークの乱数の場合と同様に、分散減少法による推定値を基準値として、これとの比較を行う。結果を表-1,3の各下段に示す。

これらの結果から、直接法と分散減少法との差や分散の値は4×4ネットワークの場合とほぼ同程度であり、計算精度は保たれているといえる。CPU-TIMEについても、分散減少法は直接法の1.2～1.4倍であり4×4ネットワークの場合と同程度であることがわかる。しかし、両モンテカルロ法ともCPU-TIMEは、4×4ネットワークの場合に比較して2～3倍必要となり、リンク数(24から40に増加)の増加以上に増加する。このことは、後述するように、大規模ネットワークを対象とする場合、モンテカルロ法にも適用限界があることを示している。

6. 道路網信頼性解析に対するモンテカルロ法の適用性～その長所と短所

直接法では、シミュレーションによって各リンクの状態(円滑な走行移動が可能かどうか)を決定し

表-3 乱数パターン1～30での平均分散値、平均CPU-TIME、計算効率

ネットワーク形状	直接法			分散減少法			計算効率比 C/N
	分散	CPU-TIME	計算効率 C	分散	CPU-TIME	計算効率 N	
4×4	15.722	5.40	84.90	2.4468	6.56	16.05	5.3
5×5	14.932	13.46	200.98	3.0143	15.99	48.20	4.2

計算効率=分散×CPU-TIME。 分散: $\times 10^{-6}$, CPU-TIME: 秒

たあと、ネットワークの連結データ（インシデンス行列など）によって2点間の連結状態を判定し、この手順を繰り返すことによって信頼度を求めている。この方法による長所は、計算が極めて単純な繰り返し計算であることである。得られる精度も、道路網の信頼度評価にとっては十分であると考えられる。これは、道路網の信頼性評価では他のシステムに比べて要求される有効桁数が少ないと考えられるからである。

分散減少法の長所は、直接法に比べると4～5倍の計算効率をもっており、極めて高信頼度（あるいは低信頼度）のシステムにも対応できることである。しかしながら、段階的に行われるサンプリングの領域設定のため、シミュレーション以前に経路探索によってパス・カットを抽出し、ブール演算による項の整理を行ない、構造関数の構築を行なう追加作業が必要となる。そしてこの段階的サンプリングのための構造関数がリンク総数の約2倍（正確には、 $2(\text{リンク総数}+1)$ 個）必要であり、その作業が複雑かつ膨大となることが短所となっている。論文で示したCPU-TIMEはシミュレーション以降のものであり、シミュレーション以前のこの作業量をいかに評価するかが問題となっている。

両モンテカルロ法の問題点を述べる。以上述べたように両モンテカルロ法とも、良好な精度で信頼度を求めることができる。しかし、これは単なる連結確率であり、連結している場合の経路が、必ずしも現実に利用される経路を反映していない。現実的な経路かそうでないかをシミュレーションの段階で判定するのは困難である。また、この連結性の判定のために、インシデンス行列等の連結データを与える必要があるが、この作業量も大きくなる。さらに、ネットワーク規模が拡大すると、1回の試行に要する計算時間も増大する。モンテカルロ法の計算時間は、本計算例程度のネットワーク規模ならば十分実用性のあるものである。しかし本報告では触れていないが、ネットワーク規模が拡大すると急増する性質が見出され、大規模ネットワークを対象とした場合の実用性が課題として残されている。

またリンク信頼度、連結状態などのパラメータが変われば試行そのものを1からやり直さねばならない。したがって、道路網整備の代替案比較などをす

る場合、代替案ごとに試行を行なうことになり、非常に手間がかかることとなる。

このように、シミュレーションは精度の点では優れているが、その値を求めるのに要する作業時間（構造関数の構築、シミュレーション、連結性の判定などに要する時間）がネットワークの拡大にともなって膨大化するという欠点を持っている。したがって、大規模ネットワークにモンテカルロ法を適用するには、以上述べたような諸性質と解析対象システムの特性に留意する必要があると考えられる。

7. あとがき

本研究では、道路網信頼性解析に対するモンテカルロ法の適用性を検討した。従来広く知られている直接サンプリング法の他に、限定サンプリングによるモンテカルロ法をとりあげ、両者の比較を行った。さらに、モンテカルロ法そのものの道路網信頼性解析に対する適用性を考察した。今後は、他の手法（文献3）、4等）との比較を行う必要があるが、その成果は機会を改めて発表したいと考えている。

最後に、本研究の計算実行に当たりその一部を担当していただいた金子哲也氏（京都大学学生、現カリフォルニア大学留学中）に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 飯田恭敬・若林拓史：ODパターンと道路網パターンの相違による道路網信頼性のマクロ的考察，交通工学，Vol.23，No.3，pp.9-19，1988。
- 2) 若林拓史・飯田恭敬：交通ネットワーク信頼性解析への信頼性グラフ理論適用の考え方，土木計画学研究・講演集10，pp.125-132，1987。
- 3) 飯田恭敬・若林拓史：ブール代数を用いた道路網ノード間信頼度の上・下限値の効率的算出法，土木学会論文集，No.395/IV-9，pp.75-84，1988。
- 4) 飯田恭敬・若林拓史・吉木 務：ミニマルパス・カットを用いた道路網信頼度の近似計算法，交通工学，Vol.23，No.4，pp.3-13，1988。
- 5) 津田孝夫：モンテカルロ法とシミュレーション，pp.84-106，培風館，昭和56年。
- 6) Kumamoto, H., Tanaka, K. and Inoue, K.: Efficient evaluation of system reliability by Monte Carlo method, IEEE Trans. on Reli-

ability, Vol.R-26, No.5, pp.311-315, 1977.

- 7) Henley, E.J. and Kumamoto, H.: Reliability Engineering and Risk Assessment, pp.485-496, Prentice-Hall, Inc., 1981.

【Appendix 1】 ϕ_L と ϕ_U ; $R_{L,a}$ と $R_{U,a}$ の構成法

最初に、 ϕ_L の構成法から述べる。まず、 $P_1, \dots, P_{p'}$ という p' 個のミニマルパスを取り出す。これはミニマルパス集合の部分集合である。この p' 個のミニマルパスだけによって構造関数 $\phi_L(b)$ を次式のように構成する。

$$\phi_L(b) = 1 - \prod_{s=1}^{p'} (1 - \prod_{a \in P_s} b_a) \quad (A-1)$$

ここで、 $\phi_L(b)$ が式(10), (11)を満たすことを示す。

$\phi_L(b) = 1$ と仮定すると、式(A-1)より $P_1, \dots, P_{p'}$ のうち少なくとも1つのミニマルパスは機能していることになる。したがって、 $\phi(b) = 1$ ならば式(10)を満たす。また式(11)も式(A-1)によって満たされる。また、 $\phi(b) = 0$ の場合は自明である。

ここで各ミニマルパス中に、重複して含まれるリンクがない場合、式(A-1)で表される $\phi_L(b)$ は各要素 b_a について、たかだか1次の式となる。しかし、 $P_1, \dots, P_{p'}$ の中にいくつかのリンクが重複して含まれている場合、式(A-1)で表される $\phi(b)$ は重複するリンクについて2次以上の項を含んでいる。この場合は、確率の重複計算を避けるためにブール演算によって、重複したリンクに関してたかだか1次の式となるように、項の整理をしなくてはならない。これによって変形した式を、 $h_L(b)$ とする。

また $R_{L,a}$ は、いま述べた $h_L(b)$ を用いて次のように得られる。

$$\begin{aligned} R_{L,a}(b_1, \dots, b_a) \\ = h_L(b_1, \dots, b_a, \Pr\{X_{a+1}=1\}, \dots, \Pr\{X_l=1\}) \\ \times \prod_{j=1}^a \Pr\{X_j=b_j\} \end{aligned} \quad (A-2)$$

次に、 $K_1, \dots, K_{k'}$ という k' 個のミニマルカットを取り出す。これはミニマルカット集合の部分集合である。いま、この k' 個のミニマルカットのみによって構造関数 $\phi_U(b)$ を次式のように構成する。

$$\phi_U(b) = \prod_{s=1}^{k'} \{1 - \prod_{a \in K_s} (1 - b_a)\} \quad (A-3)$$

$\phi_L(b)$ の場合と同様に、 $\phi_U(b)$ は式(10), (11)を満たす。また、 $h_U(b)$ も同様にして求められる。

$R_{U,a}$ は、 $h_U(b)$ を用いて次のように得られる。

$$\begin{aligned} R_{U,a}(b_1, \dots, b_a) \\ = h_U(b_1, \dots, b_a, \Pr\{X_{a+1}=1\}, \dots, \Pr\{X_l=1\}) \\ \times \prod_{j=1}^a \Pr\{X_j=b_j\} \end{aligned} \quad (A-4)$$

以下、具体例を示す。

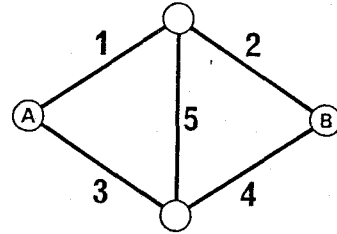


図-5 ブリッジネットワーク

(例) ブリッジ形ネットワークの場合

図-5に示したブリッジ型ネットワークについて考える。ミニマルパスとして $P_1 = \{1, 2\}$, $P_2 = \{1, 5, 4\}$, ミニマルカットとして $K_1 = \{1, 3\}$, $K_2 = \{2, 3, 5\}$ をとると $\phi_L, \phi_U, h_L, h_U, R_{L,a}, R_{U,a}$ は、次のように求められる。まず $\phi_L(b)$ は、

$$\phi_L(b) = 1 - (1 - b_1 b_2)(1 - b_1 b_4 b_5) \quad (A-5)$$

ここで $\phi_L(b)$ の式が b_1 について2次式となっているので、分解法を用いて $h_L(b)$ を求める。ここに、分解法とは、次の恒等式を利用するものである。

$$\phi(X) = X_a \times \phi(1_a, X) + (1 - X_a) \times \phi(0_a, X) \quad (A-6)$$

ここに、 $\phi(1_a, X), \phi(0_a, X)$ はそれぞれ、ユニット a が機能しているとしたシステム、機能していないとしたシステムの構造関数を示し、もとのシステムより規模が小さくなっている。したがって $h_L(b)$ は、

$$h_L(b) = b_1 \{1 - (1 - b_2)(1 - b_4 b_5)\} \quad (A-7)$$

となる。 $\Pr\{X_a=1\} = r_a$ (各リンクの信頼度) とすれば、

$$R_L = R_{L,a} = r_1 \{1 - (1 - r_2)(1 - r_4 r_5)\}$$

$$R_{L,1}(b_1) = b_1 \{1 - (1 - r_2)(1 - r_4 r_5)\} \Pr\{X_1=b_1\}$$

$$R_{L,2}(b_1, b_2) = b_1 \{1 - (1 - b_2)(1 - r_4 r_5)\} \Pr\{X_1=b_1\} \times \Pr\{X_2=b_2\}$$

$$R_{L,3}(b_1, b_2, b_3) = b_1 \{1 - (1 - b_2)(1 - r_4 r_5)\} \times \Pr\{X_1=b_1\} \Pr\{X_2=b_2\} \Pr\{X_3=b_3\}$$

$$\begin{aligned}
 R_{L,4}(b_1, b_2, b_3, b_4) &= b_1 \{1 - (1 - b_2)(1 - b_4 r_5)\} \times \\
 &\quad \Pr\{X_1 = b_1\} \Pr\{X_2 = b_2\} \Pr\{X_3 = b_3\} \Pr\{X_4 = b_4\} \\
 R_{L,5}(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) &= b_1 \{1 - (1 - b_2)(1 - b_4 b_5)\} \times \\
 &\quad \Pr\{X_1 = b_1\} \Pr\{X_2 = b_2\} \Pr\{X_3 = b_3\} \times \\
 &\quad \Pr\{X_4 = b_4\} \Pr\{X_5 = b_5\} \\
 &\quad \dots\dots(A-8 \sim 13)
 \end{aligned}$$

同様にして、

$$\phi_U(b) = \{1 - (1 - b_1)(1 - b_3)\} \{1 - (1 - b_2)(1 - b_3) \times (1 - b_5)\} \quad (A-14)$$

$$h_U(b) = b_3 + b_1(1 - b_3) \{1 - (1 - b_2)(1 - b_5)\} \quad (A-15)$$

$$R_U = R_{U,0} = r_3 + r_1(1 - r_3) \{1 - (1 - r_2)(1 - r_5)\}$$

$$R_{U,1}(b_1) = [r_3 + b_1(1 - r_3) \{1 - (1 - r_2)(1 - r_5)\}] \times \Pr\{X_1 = b_1\}$$

$$R_{U,2}(b_1, b_2) = [r_3 + b_1(1 - r_3) \{1 - (1 - b_2) \times (1 - r_5)\}] \Pr\{X_1 = b_1\} \Pr\{X_2 = b_2\}$$

$$R_{U,3}(b_1, b_2, b_3) = [b_3 + b_1(1 - b_3) \{1 - (1 - b_2) \times (1 - r_5)\}] \Pr\{X_1 = b_1\} \Pr\{X_2 = b_2\} \Pr\{X_3 = b_3\}$$

$$\begin{aligned}
 R_{U,4}(b_1, \dots, b_4) &= [b_3 + b_1(1 - b_3) \{1 - (1 - b_2) \times (1 - r_5)\}] \Pr\{X_1 = b_1\} \Pr\{X_2 = b_2\} \times \\
 &\quad \Pr\{X_3 = b_3\} \Pr\{X_4 = b_4\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{U,5}(b_1, \dots, b_5) &= [b_3 + b_1(1 - b_3) \{1 - (1 - b_2) \times (1 - b_5)\}] \Pr\{X_1 = b_1\} \Pr\{X_2 = b_2\} \Pr\{X_3 = b_3\} \times \\
 &\quad \Pr\{X_4 = b_4\} \Pr\{X_5 = b_5\}
 \end{aligned}$$

.....(A-16~21)

このように、分散減少法を利用したモンテカルロ法では、可変サンプリング領域の段階的設定(Appendix 2参照)のため、 $R_{L,a}$ と $R_{U,a}$ がそれぞれ、(構成リンク数+1)個必要となる。また、本例では、式(A-5)では変数 b_1 のみが、式(A-14)では変数 b_3 のみが重複しているため、 $R_{L,a}$ と $R_{U,a}$ の構築は比較的容易であったが、重複する変数が増加するとその作業は相当複雑なものとなる。

これら $R_{L,a}$ および $R_{U,a}$ の式の構築はシミュレーション以前の作業となり、手作業で行っている。ネットワークが大規模となって構成リンク数が増加すると $R_{L,a}$ と $R_{U,a}$ の式数が増加し、その構築作業は煩雑かつ膨大なものとなる。その上、重複する変数 b_a の数が増えると、その作業には追い打ちがかけられる。本文中でも触れたように、シミュレーション

以前のこの作業量をどのように評価するかが課題となっている。

【Appendix 2】 サンプルベクトル $s_1, \dots, s_N$ の発生手法

まず $\Pr\{y=b\}$ は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}
 \Pr\{y=b\} &= \Pr\{y_1=b_1\} \Pr\{y_2=b_2 \mid y_1=b_1\} \times \dots \\
 &\quad \times \Pr\{y_l=b_l \mid y_1=b_1, \dots, y_{l-1}=b_{l-1}\} \\
 &\quad \dots\dots(B-1)
 \end{aligned}$$

すなわち、状態ベクトル $s_j = (s_{1,j}, \dots, s_{l,j})$ を発生させるということは、 $s_{a,j}$ を $\Pr\{y_a \mid y_1=s_{1,j}, \dots, y_{a-1}=s_{a-1,j}\}$ という確率で、 $a=1, \dots, l$ に対し連鎖的に発生させることを意味している。

まず、 s の要素のうち $(a-1)$ 番目まではすでに発生していると仮定する。また $\Pr\{y_a \mid y_1=s_{1,j}, \dots, y_{a-1}=s_{a-1,j}\}$ という確率が、 $y_a=1$ と 0 のどちらの場合も計算できると仮定すると、 a 番目の要素である $s_{a,j}$ はそれぞれ、

$$s_{a,j} = \begin{cases} 1 : \Pr\{y_a=1 \mid y_1=s_{1,j}, \dots, y_{a-1}=s_{a-1,j}\} \\ 0 : \Pr\{y_a=0 \mid y_1=s_{1,j}, \dots, y_{a-1}=s_{a-1,j}\} \end{cases}$$

の確率で発生させればよい。

一般には、 $\Pr\{y_a=b_a \mid y_1=b_1, \dots, y_{a-1}=b_{a-1}\}$ について次の恒等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \Pr\{y_a=b_a \mid y_1=b_1, \dots, y_{a-1}=b_{a-1}\} \\
 &= \frac{\Pr\{y_1=b_1, \dots, y_a=b_a\}}{\Pr\{y_1=b_1, \dots, y_{a-1}=b_{a-1}\}} \\
 &= \frac{\sum_{b_{a+1}, \dots, b_l} [\phi_U(b) - \phi_L(b)] \Pr\{y_1=b_1, \dots, y_l=b_l\}}{\sum_{b_{a+1}, \dots, b_l} [\phi_U(b) - \phi_L(b)] \Pr\{y_1=b_1, \dots, y_l=b_l\}} \\
 &\quad \dots\dots(B-2)
 \end{aligned}$$

式(22)の $\Pr\{y=b\}$ を式(B-2)のように書き換えて、式(12),(13)を用いると、

$$\begin{aligned}
 \Pr\{y_a=b_a \mid y_1=b_1, \dots, y_{a-1}=b_{a-1}\} \\
 &= \frac{R_{U,a}(b_1, \dots, b_a) - R_{L,a}(b_1, \dots, b_a)}{R_{U,a-1}(b_1, \dots, b_{a-1}) - R_{L,a-1}(b_1, \dots, b_{a-1})} \\
 &\quad \dots\dots(B-3)
 \end{aligned}$$

となり、 $s_{a,j}$ を発生させることができる。