【土木計画学研究・講演集　No.10　1987年11月】

エントロピー理論と都市・交通モデリングへの適用

APPLYING ENTROPY THEORY TO URBAN AND TRANSPORTATION MODELING

小林　潔司[*]
by Kiyoshi KOBAYASHI

This paper presents a critical review on applying entropy theory to urban and transportation modeling. A review on entropy theory in regional science was part of a long term research effort in Regional Issues Project in IIASA, to which the author contributed in 1985, to develop probabilistic theories and tests for a wide range of spatial interaction behavior. The research objective is to formulate a general framework to testing probabilistic theories of micro spatial behavior in term of macro statistical observations. This approach, designated as most-probable-state analysis, unifies many of the existing concepts and methods employed entropy and information theories. This paper resumes not the only background of applications of entropy theory but also the conceptual framework of mps-analysis.
keywords: entropy theory, urban modeling, mps-analysis.

1．はじめに

過去２０年間、エントロピー理論や情報理論を交通モデルや都市モデルに適用しようとする試みが特に欧米を中心として精力的に成されてきた。特に、Wilson(1970)の研究等に代表されるように空間相互モデルの開発においてエントロピー理論は重要な役割を果たしてきた。我国でも佐佐木等の研究を契機としてその後多くの研究が行なわれてきた。最近では、エントロピーモデルと他の経済理論等との関連に関する理論的研究も大いに発展しつつある。

一方で、エントロピー理論を行動モデルに適用することの行動科学的な基礎に関する疑問も多くの研究者によって指摘されている。(例えば、Bechmann,et al.,1972; Gould,1972; Webber,1976,1979;Haynes,1980;Fisk,1985)。これらの疑問のいくつかはその後の研究努力の積み重ねによって発展的に解決されてきた。また、最近では特にミクロ行動の観測問題と関連してエントロピー理論の応用は新しい転機を迎えようとしている。例えば、エントロピーモデルを母集団過程におけるモデリングの技術論として拡張しようとするｍｐｓ(most-probable-state)分析もこのような新しい研究方向の一つであろう。 さらには、個人間に相互作用がある場合の行動モデリングの方法に関して新しい理論展開がなされている。

本稿ではエントロピー理論を用いた都市・交通モデリングに関する研究の系譜について特にエントロピー概念の解釈を中心として概括するとともに、ｍｐｓ分析を中心として最近の研究成果について簡単にとりまとめることとする。なお、本研究は著者が1985年に所属していた国際応用システム分析研究所(IIASA)地域問題プロジェクトの一環として実施されたものであるが、ありうべき誤謬に関しては著者の責任であることは言うまでもない。

＊ 正会員　工博　鳥取大学助教授　工学部社会開発システム工学科（〒680 鳥取市湖山町南4-101）

2．エントロピーモデルの発展の系譜

（1）従来の研究によるエントロピー概念の解釈

エントロピーモデルは操作性が高く、また関連する経済学等の分野のモデルとの理論的な整合性も取りやすいため、都市・交通モデルに数多く適用されてきた。一方で、エントロピーモデルの行動科学的基礎に関しては、現在でも精力的に論争が重ねられている。エントロピー概念の経験的基礎に関する統一的な解釈は現在のところ存在しないが、論争点についてはある程度の整理が可能であろう。本節ではまず、エントロピー概念に関する従来の代表的な解釈をとりまとめ、その問題点を考察する。

説明の便宜上、簡単なエントロピーモデルを取り上げよう。いま、有限個のゾーン$(i\in J)$に住む消費者の買物行動を考える。買物トリップの目的地をj$(j\in J)$、O_i・D_jを各ゾーンの発生・集中トリップ数、m_{ij}をゾーン間買物トリップ数とする。Jaynes(1957)はm_{ij}の推計問題にエントロピー理論を最初に適用した。彼は、発生・集中交通量及びトリップメーカの総交通費用という情報の下で最小の付加的な情報をもたらすような分布交通量が最も望ましい推計値であると考えた。この考え方は Shannon and Weaver (1949)、Khintchin(1957)によるエントロピー理論をそのまま分布交通量の推計に適用したものであり、推計値は与えられた情報の下で最小の情報バイアスを持つようなm_{ij}^*を求める問題に帰着される。

$$\text{Minimize}\quad I=\Sigma_{ij}(m_{ij}/m)\log(m_{ij}/m) \qquad (1)$$

$$\text{subject to}\quad \Sigma_j m_{ij}=O_i,\ \Sigma_i m_{ij}=D_j$$

$$\Sigma_{ij}c_{ij}m_{ij}=C \qquad (2)$$

ここに、$m=\Sigma_i O_i=\Sigma_j D_j$、$C_{ij}$は交通費用、Cは総交通費用である。、$H=-I$と定義すればIを最小化することは、Shannon-WeaverエントロピーHを最大化することと一致する。このような考え方は最小情報アプローチと呼ばれる。最小情報アプローチはその後、Hobsen(1969),March and Batty(1975)等によって発展し、その経過はWebber(1979)に詳しい。しかし、最小情報アプローチは反証可能な行動仮説に基づいていないという批判(例えば、Webber,1979)が、数多くなされた。最小情報アプローチはエントロピー理論をそのままモデルの推計に用いるという素朴なアプローチであり、行動科学におけるエントロピー概念のいわば初歩的な解釈論だったと考えられる。

計画問題(1)(2)に対しては別の解釈も可能である。つまり、O_i、D_j、Cという観測値が与えられた時に、ある先験的なm_{ij}の確率分布の下でm_{ij}の条件付最尤値を求める問題として解釈できる。この考え方はKullback and Leibler(1951)のエントロピー理論の応用である。消者行動仮説を最尤値という統計量を用いて統計論的に検証する枠組を提供したという点で最小情報アプローチよりも優れた解釈であると考える。計画問題(1)(2)の解m_{ij}^*がm_{ij}の最尤値となる理論的根拠を与えた意義は大きい。この考え方は、その後、Theil(1969,1970),Charnes et al.(1972),Snickars and Weibull(1977),Gokhale and Kullback(1978)により発展し、その系譜はHaynes and Phillips(1982)のReview論文に詳しい。我国でも佐佐木の研究を嚆矢として多くの研究がなされた。この考え方が提唱された当初は先験確率の妥当性が議論の焦点になったが、その後の研究で必ずしも先験確率を用いなくても漸近的に最尤値を求めることが可能であることが明らかにされた。消費者行動を統計学的に検証可能にしたという点で最尤論的アプローチの意義は大きいが、理論的な枠組としては依然として幾つかの問題を持っている。

（2）従来のエントロピーモデルの問題点

従来のエントロピーモデルの持つ問題（エントロピーモデルにのみ特有な問題ではなく、多くの都市・交通モデルに共通する問題でもあるが）として以下の点があげられよう。第１にモデル推計のために独立なサンプルを抽出できるという前提が妥当かどうかという点、第２にモデルの理論的な基礎とその観測可能性の問題である。

上述の問題点のうち、第一の観測されたデータの独立性という問題は、特に、ミクロ行動をマクロな観測値に基づいて推計する場合に生じる（Fisk and Brown,1975;Webber,1975;Roy and Lesse,1981;Fisk,1985; Roy,1985;Smith,1986)。代表的な例としては、観測しようとする個人とそれが属する集団の間に相互作用がある場合等があげられる。たとえば、混雑するネットワーク上での経路選択の問題を考えよう。この場合、各個人がある経路を選択する場合の行動は同時に経路を利用する他の人々の影響を受けるわけであり、個人間の相互関係を無視して経路選択の

確率を先決的に定義できない。現在、方法論的個人主義の立場から消費者行動のモデリングに関する研究（例えば、非集計モデル等）が進められているが、これらの研究の多くも同様の問題点を持っており、モデルの推計方法等に関しても改善の余地がある。この他に、Webber(1975)とFisk(1985)が指摘した置換不可能なサンプリングによる従属性という問題がある。例えば、買物トリップの目的地である店舗は多くの消費者が同時に選択可能であるが、これに対して立地行動の場合、ある立地主体が立地点を選択すれば、他の主体の選択行動から当該の選択肢は排除されてしまう。このような選択肢の排除性という特徴によってサンプル間の従属性が生じる。

第２の問題点は観測者と観測される個人の関係に関する問題点である。この問題はマクロな観測値とミクロな行動の関係という従来から繰返し議論されてきた問題と密接な関係がある。ミクロ行動モデリングにおいては観測者より被観測者が用いる情報量の方が多い。したがって、モデルの誤差項と説明変数はもはや独立では有りえないという問題が生じる。個人行動をある行動原理に基づいた最適化行動としてとらえ、その最適条件を推計することによりその背後にある個人行動を分析していくという方法が望ましい。つまり、観測値としてどのような条件付情報を選択すべきかは、それが検証されるべき理論と無関係に選択されてはならない。先の例では総費用Cは決して任意に決定されるべき定数ではない。すなわち、交通費用は消費者の選択行動における最適化条件を観察するために必要な情報として、あらかじめ理論的に位置付けられていなければならない。

また、調査によって得られた情報は、偶然に実現した結果であり、不確実性を持つある現象の一断面に関する情報である。いわば、現象に対する非常に限られた部分情報に過ぎず、そのような部分情報に対してのみ整合性を取りうるモデルを推計しようとしているという問題がある。特にマクロ情報の観測時点とミクロ行動の観測時点は異なるのが普通であり、両者の間の整合性を図ろうとすれば限界が生じる。また、先の経路選択のようにミクロ行動主体が認識しているマクロ変数の値は観測者が観測することは極めて困難であり、観測可能なマクロ変数と整合のとれるようなミクロ行動の予測を行うことによって間接的にしか観測できないという問題が生じる。

以上の問題に対処する方法として着目されつつある方法がｍｐｓ分析という方法である。この考え方は、Wilson (1967)が提唱し、近年、多くの研究者(Fisk and Brown,1975;Lesse et al.,1975:Roy and Lesse,1981,1985;Walsh et al.,1983;Fisk,1985)によって拡張されつつある。このアプローチの特徴は、「独立サンプルに基づく確率モデル」というこれまでのエントロピーモデルの解釈を「ミクロ行動に関するマクロ的な性質に関する条件付情報を用いてシステムのミクロな状態を記述する確率モデル」という考え方に拡張するところにある。

３．母集団過程とｍｐｓ分析

（１）母集団過程

Moyal(1962)によって提唱された母集団過程とは、住み替えを行う世帯の集合のように母集団のサイズが時間とともに変化するような確率過程のことである。母集団に含まれる個人の数(有限値をとる確率変数)をn、個人aがとりえる状態をS_a($S_a \in S$:Sは状態空間)とする。さらに、Z_+を非負整数の集合とし、母集団のサイズがnの時の母集団全体のミクロな状態空間をΩ_nとする。$n=0$の時、Ω_nはnull要素ϕのみにより構成されると考える。ついで、$n \geqq 1$の時を考えると$\Omega_n = S^n$であり、その一つのミクロな状態は$\omega = (S_1, --, S_n)$として示される。例えば、IとJをネットワークの発地と着地の集合と考えれば、n人の個人によるミクロ状態空間全体は$\omega = (S_1, ---, S_n) = ((i_1, j_1), ---, (i_n, j_n)) \in \Omega_n$となる。いま母集団のサイズ$n$を確率変数とすれば、ミクロな状態空間の全体は

$$\Omega = \bigcup_{n \in Z_+} \Omega_n = \bigcup_{n \in Z_+} S^n \tag{3}$$

と表せる。Ω上で定義される確率関数$P: \Omega \to [0,1]$は状態空間の母集団全体の中からある状態空間が生起する確率を示す。いま、$\omega \in \Omega$に対して$P(\omega)$が定義され、Pの無名性(S_aの任意の置換に対して影響されない)を仮定する。このとき、(P, Ω)を母集団過程と定義する。母集団過程は数学的にはミクロな状態空間の自然な拡張である。ミクロな状態が可測空間(Ω, A, V)で記述されるとしよう。AはΩに属する部分集合により構成されるσ-代数であり、vはσ-代数上で定義されたσ-加法的測度である。Pをv-可測集合上

で定義された絶対連続な可測集合値関数とすれば、可測空間(Ω, A, V)はPを測度とする可測空間(Ω, A, P)すなわち、母集団過程(P, Ω)に拡張できる。

母集団過程のミクロ状態に関するマクロ特性が観測されたと考えよう。母集団過程におけるミクロ行動とマクロ観測値との関連関係を示す関数、v-可測関数$X: \Omega \to R$を導入する。先の例では$\omega = ((i_1, j_1), ---, (i_n, j_n)) \in \Omega_n$に対して$\omega$の総交通費用は$X(\omega) = \Sigma_a C(i_a, j_a)$という関数で示される。ここで、母集団過程における確率理論モデルの形式を定義しよう。

> ［定義１：確率理論モデル］母集団過程(P, Ω)のマクロ観測値$(X_1, ---, X_k)$が与えられた時、
> $$P(\omega) = F[X_1(\omega), ---, X_k(\omega)] \quad (4)$$
> なる関数$F: R^k \to [0,1]$が存在する。この時、関数族$T = (F, X_1, --, X_k)$を確率理論モデルと定義する。

ここで、先の例を確率理論モデルとして記述しよう。トリップメーカの状態空間を$S = I \times J \in \Omega$とし、ミクロ状態のマクロ観測値として総交通費用$X_C$，発生交通量$X_i (i \in I)$，集中交通量 $X_j (j \in J)$が得られたとする。すなわち、$\omega = ((i_1, j_1), ---, (i_n, j_n)) \in \Omega$に対して$X_i(\omega) = |\{a : i_a = i\}|$， $X_j(\omega) = |\{a : j_a = j\}|$となる。ここに$|B|$は集合Bの濃度である。交通行動モデルの一般型は、マクロ観測値X_C， $X_i (i \in I), X_j (j \in J)$の単調関数$F: R^k \to [0,1], k = |I| + |J| + 1$により、$P(\omega) = F[X_C, X_i (i \in I), X_j (j \in J)]$と記述できる。

（２）ｍｐｓ分析

母集団過程のミクロ行動に関する確率理論モデルTは理論的には検証可能であるが、実際的には幾つかの問題点を有している。いま、ミクロ状態空間ωが直接観測可能であり、またミクロ状態空間が繰返し観測可能であれば、理論モデルTは検証可能である。しかし、母集団過程は完全には観測可能ではなく、せいぜい部分的に観測可能であるにすぎない。例えば、１時点での交通調査は一つのミクロ状態空間Ω_nを観測したに過ぎない。通常、交通調査はサンプル調査であり、調査時点での母集団の大きさnの値は確定できず確率変数である。ｍｐｓ分析はこのような部分的な観測情報を用いて母集団過程における確率理論モデルを推計しようとする立場に立っている。

母集団過程におけるｓ-頻度，$m_s(\omega)$を、$\omega \in \Omega$に対して$m_s(\omega) = |\{i : S_i = S\}|$と定義する。頻度ベクトル$m(\omega) = \{m_1(\omega), ---, m_{|S|}(\omega)\}'$はミクロ状態$\omega \in \Omega$のマクロ状態空間$M = Z_+^{|S|}$における生起頻度を示す。マクロ特性 $X_k(\omega)$は $X_k(m(\omega))$という形式で表現される。先の例では$X_C(\omega) = \Sigma_{ij} C_{ij} m_{ij}(\omega), X_i(\omega) = \Sigma_j m_{ij}(\omega), (i \in I)$， $X_j = \Sigma_i m_{ij}(\omega)$となる。マクロ特性 $(X_1, ---, X_k)$の観測値 $(\overline{X}_1, ---, \overline{X}_k)$に対して

$$M(\overline{X}_1, ---, \overline{X}_k) = \{m(\omega), \omega \in \Omega \mid X_1(m) = \overline{X}_1, ---, X_k(m) = \overline{X}_k\} \quad (5)$$

を定義する。さらに、部分集合$A \subset M$に対して$\Phi(A) = \{\omega \in \Omega \mid m(\omega) \in A\}$を定義すれば次の定理を得る。

> ［定理1］もし理論モデル$T = (F, X_1, ---, X_k)$が母集団過程(P, Ω)に対して成立するのであれば、すべてのマクロ観測特性の実現値 $(\overline{X}_1, ---, \overline{X}_k)$とマクロ状態$m \in M$に対して
> $m \in M(X_1, ---, X_k)$の時
> $$P(m \mid \overline{X}_1, ---, \overline{X}_k) = |\Phi(m)| / |\Phi(M(\overline{X}_1, ---, \overline{X}_k))|$$
> それ以外の時、
> $$P(m \mid \overline{X}_1, ---, \overline{X}_k) = 0 \quad (6)$$
> となる。

定理1はもし理論モデルTが成立すれば、関数Fの形を知らなくてもマクロ観測値$\overline{X}_1, --, \overline{X}_k$が与えられれば、マクロ状態の条件付生起確率を厳密に導出できることを示している。ここに次の系を得る。

> ［系１］理論モデルTが母集団過程(P, Ω)に対し て成立すれば、観測されたマクロ特性$\overline{X}_1, ---, \overline{X}_k$に対して最大生起確率を与えるマクロ状態$m^*$は次の数理計画問題を解くことにより得られる。
> $$|\Phi(m^*(\overline{X}_1, ---, \overline{X}_k))| = \max\{|\Phi(m)| : m \in M(\overline{X}_1, ---, \overline{X}_k)\} \quad (7)$$

理論モデルTを母集団過程に関する帰無仮説として検証する場合には$m^*(\overline{X}_1, ---, \overline{X}_k)$が統計量となる。

（３）ｍｐｓの漸近定理

ｍｐｓ分析はかなり広い範囲の確率モデルに適用可能である。そのためには最頻値（ｍｐｓ）が計算可能でなければならない。一般に、母集団過程を支配する確率分布を測定することは実際問題として困難であり、また仮にできたとしてもそれに基づく理論展開は容易でなく、極めて操作性に乏しい。そこで、以下では母集団過程の確率密度関数に基づく厳密な方法ではなく、エントロピー関数を用いてｍｐｓを近似的に求める方法について述べる。もちろん、このような方法は当然のことながら母集団の規模が十分大きくｍｐｓの近似が可能な場合に限られる。

いま、mの大きさを示す確率変数$N:M\rightarrow Z_+$を導入する。Nを任意の$m \in M$に対して$N(m)=\sum_{s \in S} m'_s$と定義する。また、エントロピー関数$H:M\rightarrow R$をマクロ状態$m=(m_s;s \in S)\in M$に対して、

$$H(m)=-\sum_{s \in S}(m_s/N(m))\log(m_s/N(m)) \tag{8}$$

と定義する。この時、次の定理を得る。

［定理２］任意の母集団過程(P,Ω)におけるマクロ特性$(X_1,\text{---},X_k)$がマクロ状態の線形関数として表現できるような確率理論モデルT において、最大エントロピーを与える状態$m_H{}^*(\overline{X}_1,\text{--},\overline{X}_k)$がマクロ特性の実現値$\overline{X}_1,\text{--},\overline{X}_k$ に対して

$$H[m_H{}^*(X_1,\text{---},X_k)] = \max\{H(m):m \in M(X_1,\text{---},X_k)\} \tag{9}$$

で表現できる時、十分大きな$N\{m_H(\overline{X}_1,\text{---},\overline{X}_k)\}$を与えるすべての$m \in M(\overline{X}_1,\text{---},\overline{X}_k)$に対して次式が成立する。

$$m = m_H{}^*(\overline{X}_1,\text{---},\overline{X}_k)\rightarrow \frac{P(m|\overline{X}_1,\text{---},\overline{X}_k)}{P(m_H{}^*(\overline{X}_1,\text{---},\overline{X}_k)|\overline{X}_1,\text{---},\overline{X}_k)} \fallingdotseq 0 \tag{10}$$

換言すれば、確率理論モデルTが成立すれば、すべての十分大きな母集団の実現に対して、線形マクロ特性関数を用いる場合、$m_H{}^*$はm^*の近似値を与える。

（4）ｍｐｓ分析におけるエントロピーの解釈

ｍｐｓ分析におけるエントロピー概念を説明するために、再び先の例をとりあげよう。この例では総交通費用、発生・集中交通量がそれぞれマクロ状態の線形関数として表現されている。そして(1),(2)の問題の解が$C,(O_i:i \in I),(D_j:j \in J)$というマクロ特性変数が与えられた場合の最大エントロピー状態を示している。ｍｐｓ分析は計画問題(1),(2)に関する第３番目の解釈を与えることとなる。

さて、ここで従来の最尤論的アプローチとｍｐｓ分析の違いを簡単に述べる。第１に、先験確率に基づく方法では統計的に独立したサンプルをこのような先験確率に従って分布している母集団過程の中から繰返しサンプリングできることを前提としている。ｍｐｓ分析ではこのような前提は必要ではなく、理論の検証のために必要な統計量は一回のサンプル調査によって実現した母集団から構成できる点にある。先験確率理論は最尤法を用いる為に未知パラメータの数に制約が生じるが、ｍｐｓ法によれば検証されるべき統計量をモデルで用いる関数の形式とは独立に定義できるという利点を有している。最後に、情報制約はｍｐｓ法の場合任意に与えられるものではない。事実これらの制約値は理論それ自体において基礎的な役割を果しているマクロ特性値に依存する。換言すれば、Kullback-Leiblerアプローチは、多くの異なる情報制約に対して先験確率を検証することができるという任意性が有るが、ｍｐｓ法にはない。マクロ特性変数の選択によってミクロ行動に関する異なる理論を構成することになるため、変数の選択は極めて重要な問題となる。

（５）ｍｐｓ分析の問題点と今後の課題

定理２は線形のマクロ特性関数を仮定していたが、この仮定を線形同時関数に緩めることができる。しかし、この特性関数の漸近的な性質に関しては依然研究の余地がある。例えば、交通経路選択問題では十分大きな母集団という概念自体成立しない。極端な場合、母集団が余りに大きいと混雑費用が無限大に発散し、マクロ特性を計測できないという状態が生じる。交通混雑のように非常に強い相互関係が存在する場合には、漸近的近似についてより厳密に検討する必要があろう。なお、Smith(1986)等はミクロ状態間に弱い相互作用の有るような場合のエントロピーの漸近性に関して研究しているが、交通混雑のような強い相互作用のある母集団過程に関する漸近性に関する研究は今後の課題である。

ｍｐｓ分析の最大の利点はミクロ行動に関する理論仮説を統計理論に基づいて検証するための実際的なフレームを提供しうる点にある。この場合、ｍｐｓの確率的信頼限界を設定することは仮説検証にあたって重要な課題となる。しかし、ｍｐｓの信頼限界に関する研究は緒についたばかりで、ここで研究成果をとりまとめることは容易ではない。一つの方法としては大数の法則にもとづいて弱チェビシェフ信頼限界をｍｐｓの信頼限界値として用いることが考えられよう。事実、ランダムサンプリングの場合には、大数の法則に基づいてｍｐｓの信頼限界に関する理論を構成することは容易である。しかし、サンプルの独立性を仮定しない場合のｍｐｓの信頼限界に関する研究はこれまでに成されたことはなく、今後、少なくとも行動モデリングに関してよく用いられる関数型に関して信頼限界を分析しておくことは実際的にも役立つ基礎研究となろう。

４．エントロピー理論の土木計画学への適用

（１）エントロピーモデルの位置づけ

エントロピーモデルは「ある観測可能なマクロな変数の測定値が与えられた場合、そのようなマクロな状態が出現するようなもっとも乱雑なシステムの状態を求める」という統計力学的世界観にたって説明されてきた。エントロピーモデルの統計力学的な解釈自体は、「エントロピーモデルはマクロな立場からマクロな観測値と整合のとれるようなミクロな状態を求めるものである」という点において間違っていない。しかし、エントロピーモデルが確率モデルなのか行動モデルなのかという点に関しては従来必ずしも明確な見解を提示しなかったために、エントロピーモデルに関する多くの誤解を生んできたように考える。事実、エントロピー理論を行動科学に適用することの是非を巡る論争もエントロピーモデルを「確率モデル」と考えるか「行動モデル」と考えるかという立場の違いから生じている場合が少なくない。ｍｐｓ分析はエントロピーモデルを確率モデルとして位置付け、「最大エントロピー状態が対象とする理論モデルを漸近的に近似する」という確率論的な解釈を行っている。

一方、近代確率理論が確率測度論を基礎とした理論的な演繹体系を有し、また情報理論が同じエントロピー理論を基礎としながらもそこに確固たる理論体系を有しているのに対し、土木計画学で用いられるエントロピー概念はあくまでも現象に対する経験的な考察の結果得られるものである。したがって、モデリングを行う際には対象とする問題にどのようなエントロピー概念を選択するのかが重要となる。エントロピー概念の選択やエントロピーモデルの定式化に当たっては、周辺科学、とりわけ経済学等との理論的整合性に関して深い洞察を行うことが必要となる。最近、Wilson(1981)をはじめとしてエントロピーモデルとロジットモデルとの形式的同値性に関する研究が盛んに行われている。このような理論研究はエントロピーモデルに行動科学的な基礎を与える重要な研究であると考える。

以上の考え方に立てば、エントロピーモデルは確率理論に基礎を置く行動モデリングの技術論であると考えることができる。つまり、「道具」としてのエントロピーモデルはそれ自体としては経験的な意味を持たないが、理論モデルのある推定量(mps分析の場合は最頻値)を漸近的に近似する確率モデルであるとともに、行動理論との形式的同値性を通じて行動モデルとしての資格を持ちえるわけである。ここで、次のような疑問が生じる。「エントロピーモデルが厳密な意味での理論モデルではなく近似モデルであり、エントロピーモデルの行動科学的基礎が既存の理論やモデルとの形式的同等性に基づいて定義されるのであれば、エントロピーモデルを用いる積極的な意味をどこに見出しうるか」という疑問である。多くの場合、その理由をエントロピーモデルの「操作性」に求めている。しかし、既存の行動モデルとそれと形式的に同値であるエントロピーモデルを比較した場合、適用上の操作性という点で比較すればそれほど差異のない場合もあり、その場合にはどちらを用いればいいかは趣味の問題であるといわざるを得ない。むしろ、操作性という問題はエントロピーモデルの確率論的な側面において議論されるべきであろう。すなわち、確率理論モデルに対する近似モデルとしての推計上での操作性にエントロピーモデルの利点があると考える。

さて、以上の考察を踏まえれば、今後のエントロピーモデルの研究方向は明らかであろう。一つはエントロピーモデルが有する確率論的な側面(エントロピーモデルの漸近性とその信頼限界)に関する研究であり、いま一つはエントロピーモデルの行動科学的な基礎に関する研究である。前者に関してはｍｐｓ分析が一つの方向性を示唆するものであると考える。また、後者に関しては個々のエントロピーモデルと経済理論等との関連性に関する理論的知見を蓄積していくことが重要である。

（２）ｍｐｓ分析の適用事例

エントロピーモデルの適用研究において、モデルがどのような行動仮説に基づくのか、さらにその仮説が検証可能かどうかを明確に認識している研究は残念ながら多くない。ここでは、立地均衡均衡モデルをとりあげ、このモデルがどのような行動理論あるいは確率理論を背景としているのかをｍｐｓ分析の枠組を用いて明らかにしたい。

立地均衡モデルとしてHarris(1964),およびその拡張としてのHarris and Wilson(1978)を取り上げ

る。ゾーン$i(i \in I)$の買物需要をO_i,ゾーン$j(j \in J)$における商業値規模をW_jとする。いま、買物トリップm_{ij}を次式のグラビティモデルで記述する。

$$m_{ij} = A_i\ O_i\ W_j\ \exp(-\beta C_{ij}), i \in I, j \in J \quad (11)$$

ここに、β:非負定数、; C_{ij}:ゾーン間費用、$A_i = \Sigma_k W_k \exp(-\beta C_{ik})$である。また、$\Sigma_j m_{ij} = O_i$, $\Sigma_i m_{ij} = D_j$と定義する。この時、立地均衡解を次式のように定義する。すなわち、rを定数と考えた時、均衡状態では

$$D_j = r\ W_j, \quad j \in J \quad (12)$$

が成立すると考える。このような立地均衡解と計画問題の間には密接な関係がある。Leonaridi(1983)は、この問題の立地均衡解が

$$\text{Max } \Sigma_{i \in I}\ O_i\ \log[\Sigma_{j \in J}\ W_j\ \exp(-\beta C_{ij})]$$
$$\text{subject to } \Sigma_{i \in I}\ O_i = r \Sigma_j W_j \quad (13)$$

の解として与えられることを明らかにした。この計画問題をLeonardiは商業地へのアクセシビリティによって計測される消費者の社会的厚生を最大化する問題として解釈した。事実、計画問題(13)の目的関数はロジットモデルにより導出される期待効用（消費者余剰）の社会的総和を表していることは容易に理解できよう。このようにエントロピーモデル(13)の行動論的な意味はロジットモデルとの形式的同値性により解釈可能となる。次にこの問題の確率論的な側面についてmps分析により考察することとする。いま、Wを各商業地ゾーンの商業立地主体全体で構成される集合、nを総消費者数と考える。ここで、消費者個人のミクロ状態空間は$S = I \times W$ として表現される。また、対応する母集団過程はすべての買物トリップのパターン$\omega = (s_1, ---, s_n)$で構成される空間$\Omega = U_{n \in Z_+} S^n$で記述できる。ここで、個々のミクロ状態の母集団$\omega \in \Omega$に対してマクロ状態$m(\omega)=\{m_{ij}(\omega): ij \in I \times J\}$を対応させる。この時、マクロ特性関数として $O_i(\omega) = \Sigma_j m_{ij}(\omega)$, $C(\omega)=\Sigma_{ij} C_{ij} m_{ij}(\omega)$を考える。ここで、確率理論モデルは次のように形式化できる。

$$P(\omega)=F[C(\omega), (O_i(\omega): i \in I), (W_j: j \in J)] \quad (14)$$

FはCに関する単調非増加関数である。いま、簡単のためにW$_j$は外生的に与えられると考える。ここで、漸近理論を適用すれば、ある非負の定数βが存在してマクロ特性C,O_iが観測された時の最頻値m_{ij}^*は次式のように示される。

$$m_{ij}^* = m_{ij}^*(C, (O_i: i \in I), (W_j: j \in J))$$
$$= A_i\ O_i\ W_j\ \exp(-\beta C_{ij}) \quad (15)$$

と示され、Harris-Wilsonの買物トリップ分布モデルは確率理論モデル(14)に基づいた買物行動の最頻値を示すモデルであることがわかる。さて、上の議論では簡単のためにW_jは外生的に与えられるものと仮定していた。しかし、実際にはW_jは立地均衡モデルの結果として求められるものであり、式(15)におけるW_jの値は未知である。W_jは式(15)において最頻値を与えるパラメータの役割を演じていることから、以下では式(15)を W_jの関数として変化させ、m_{ij}^*の最頻値$m_{ij}^*(W_j^*)$を求めることとする。より厳密に言えば、確率理論モデル(14)はマクロ特性CとO_iは観測可能だが、W_jは観測可能ではないことを表している。この時、観測されたCとO_iが最も生起しやすいようなW_jの値を求める問題を考える。定理２を利用すれば、計画問題(13)の解は与えられたマクロ観測値C, O_iの下での漸近的な最頻値W_j^*を与えることが理解できる。また、この解がHarris-Wilsonの立地均衡解に一致する。

5．おわりに

本稿では、エントロピー理論の都市・交通モデリングへの適用研究の系譜とその展望について、エントロピー概念をめぐる解釈とmps分析に焦点をあてて考察した。特に、mps分析という枠組はエントロピーモデルの確率論的な基礎を与えるものであり、これによりエントロピーモデルの適用範囲は大いに拡大できると考える。

集団の中にある個人の行動のモデリングとしては方法論的にミクロからマクロ、マクロからミクロという二つのアプローチが考えられる。前者の方法は個人の行動を環境との相互作用から切り離して、「集計化の過程において個人間の相互作用は互いに相殺される」という前提のもとにモデリングを進めるという立場にたつ。このような方法論的個人主義に基づくアプローチはそれなりの説得性を有するものであるが、そこに集計化という難問が存在する。つまり、ミクロな行動を集計しマクロな行動を表現するためには個々の行動主体の行動の加法性が前提となるが、そのような加法性が成立するという理論的根拠はない。特に、個人間に強い相互作用が存在する

ような現象を取り扱う場合、このようなアプローチには限界があるといわざるを得ない。

mps分析はマクロな現象と整合のとりえるようなミクロな行動を推計するという利点がある。しかし、いずれにせよマクロな現象とミクロな現象は本来異質のものであり、そこで用いられる情報も本質的に異なるものである。ミクロ行動においては被観測者の持つ情報は観測者の持ちえる情報よりも多い。一方、マクロな現象に関してはミクロ行動主体は一般に情報を持ちえず、あるいは持ちえたとしても観測者より多くはない。エントロピーモデルはマクロな立場からマクロ現象と整合のとれる範囲においてミクロ行動をモデル化するという立場にたつ。したがって、そこでモデル化されるミクロな現象には自ずと制約が存在する。つまり、ミクロな行動を直接モデル化する場合に比較して、使用できるモデルの形式や変数等に制約を受けざるを得ない。また、エントロピーモデルはあくまでも漸近理論に基づく近似モデルであるが、逆にそれによってエントロピーモデルは操作性を保持しうる。エントロピーモデルの漸近的性質を利用すれば、操作性・実用性の高いモデリングが可能であろう。このためにも、エントロピーモデルの行動科学的な基礎に関する研究を蓄積すると同時に、エントルピーモデルの漸近性、およびmpsの信頼限界に関する基礎研究を発展させることが極めて重要である。

さて、一般にサンプルの独立性を前提としない場合における確率理論の取扱いは極めて難しく、できたとしても極めて単純なケースに限られよう。事実、個人間の相互作用を明示的に取り上げたような行動モデルの推計方法に関する理論研究はほとんど発達していないといっても過言ではない。mps分析はこのような相互関係があるような行動モデルに対する一つの方法ではある。しかし、mps分析は母集団過程におけるmpsに関する近似理論であり、エントロピーモデルの漸近的性質が利用できるような場合には有効であるが、個人間に強い相互関係があるようなミクロ行動のモデリングに関しては今後の研究の発達に期待せざるを得ない。個人間の強い相互作用はミクロ行動を互いに規定するわけであり、相互作用を通じてシステムのエントロピーは消滅する。逆に言えば、相互作用はシステムの情報量を増殖する現象である。このようなシステムにおいては従来のエントロピー概念をそのまま用いることはできない。著者等は強い相互作用があるようなミクロ行動モデルに適用可能なC^*代数に基づく新しいエントロピー概念を開発しつつあるが、これに関する研究成果はまた別の機会に発表する予定である。

なお、本研究をとりまとめるにあたって、IIASA地域問題プロジェクトのメンバー、とりわけSmith教授(ペンシルバニア大学)、Andersson教授、B.Johansson教授(ウメオ大学)、P.Lesse(CSIRO)との議論を通じて多くの知見を得た。また、IIASAにて本研究に関する直接の指導を得た故G.Leonardi博士に感謝の意を表すとともに、冥福を祈る次第である。

参考文献(紙面の都合上主要な文献に限る)

1) Bechmann,M.J. and T.F.Gould: A Critique of Entropy and Gravity in Travel Forecasting,Traffic Flow and Transportation, Elsevier,1972.
2) Haynes,K.E.,et al.:The Entropies, Some root of ambiguity, Socio-Econ.Plan.Sci.Vol.14,1980.
3)Hoeffding,W:Asymptotically optimal tests for multinomial distribution,Ann.Math.Stat.36,1965.
4) Kullback,S and R.A.Leibler:On information & sufficiency, Ann.Math.Stat.Vol.22,1951.
5) Leonardi,G.:Transient and asymptotic behavior of a random-utility based stochastic search process in continuous space and time, WP-83-108,IIASA,1983.
6) Moyal,J.E.:The general theory of stochastic population processes,ACTA Math.Vol.108,1962.
7)O'Kelly,M.E:Generalized information measures Env.and Plan.,Vol.13,1981.
8) Smith,T.E.:A remarks on the most-probable-state approach to analyzing probabilistic theories of behavior, Env. and Plan. A, Vol.17. 1986.
9) Smith,T.E.:An Axiomatic foundation for Poisson frequency analysis of weakly interacting populations, RSUE, forthcoming.
10)Webber, M.J.: Information Theory and Urban Spatial Structure, Croom Helm, London, 1979.