【土木計画学研究・講演集 No.10 1987年11月】

交通ネットワーク信頼性解析への信頼性グラフ理論適用の考え方

Some Methods to Evaluate Reliability of Road Networks based on Reliability Graph Analysis

若 林 拓 史*, 飯 田 恭 敬**
by Hiroshi WAKABAYASHI and Yasunori IIDA

In this paper, we deal with some efficient methods to estimate reliability of road networks based on Reliability Graph Analysis using minimal path sets or cut sets. It is shown that there are two ways to calculate an approximate value instead of an exact value for reliability. One is using partial path sets or cut sets instead of all the path sets or cut sets. The other is omitting Boolean manipulation. Then we can obtain three methods to calculate an approximate value for reliability with their combinations. Each characteristic is shown and demonstrated. The paper concludes that the selection of partial path sets or cut sets results in a problem to find the shortest path or N-th shortest path in the transportation networks.

1．はじめに

道路網整備水準の一指標として信頼性を考える．本研究では，信頼性グラフ解析(Reliability Graph Analysis,ＲＧＡ)の交通ネットワークへの適用法を考察することを目的としている．信頼性グラフ解析とは，システム工学の分野で発達した手法であり，システムの信頼度とシステムを構成するユニットの信頼度との関連を，信頼性グラフと呼ばれる有向グラフで表現し，そのインプット，アウトプット２点間の連結信頼度を解析する．交通ネットワークもグラフ理論を用いて表現でき，理論的取り扱いにおいて多くの共通点があるが，交通ネットワークでは，交通がマルチコモディティフローであるため，多点間の信頼度を扱う必要がある．本研究では２点間信頼度を扱っており，交通ネットワークの信頼性解析の初歩的段階にあるが，これを理論的基礎として，多点間の信頼度解析を行いたいと考えている．

* 正会員 工修 大阪府立工業高等専門学校 助教授
（〒572 寝屋川市幸町26-12）
**正会員 工博 京都大学工学部 教授
（〒606 京都市左京区吉田本町）

本論文の構成を述べる．２節では，信頼性グラフ解析に関する基礎的事項の整理を行い，信頼度の定義と信頼度を求めるのに必要な構造関数について述べる．３節では，ミニマルパス，カットを用いる信頼度計算法について述べ，近似計算法として一部のミニマルパス，カットを対象とする方法，ブール演算を省略する方法を述べる．４節では，簡単なネットワークに対し，３節で示された近似計算法の計算例を示す．５節では，一部のミニマルパス，ミニマルカットの選択方法を考察する．ここでは，生起確率に着目したパス(カット)の選択法と，経路の距離に着目した選択法の２通りを提案する．６節では，モデル計算例を示している．

2．構造関数と信頼度

信頼性解析では，比較的多数の要素（部品）より構成される機器，装置を総称してシステムとよび，

構成要素をユニットとよぶ．ユニット，システムには，機能（動作），故障の２状態だけが定められているとする．ユニットａに二値変数x_aを次のように定義する．

$$x_a=\begin{cases}1\text{，ユニットａが機能しているとき}\\0\text{，ユニットａが故障しているとき}\end{cases}\quad(1)$$

ベクトル$\mathbf{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$をシステムの状態ベクトルとすると，ユニットと同様に，システムの状態ϕを$\mathbf{x}$を用いて次のように定義できる．

$$\phi(\mathbf{x})=\begin{cases}1\text{，システムが機能しているとき}\\0\text{，システムが故障しているとき}\end{cases}\quad(2)$$

(2)式で定義した関数$\phi(\mathbf{x})$を，構造関数とよぶ．構造関数は，システムの構造によりその関数形が決まり，システムの機能・故障状態を各ユニットの機能・故障状態を表す状態ベクトルを用いて知ることができる．

システムの信頼度は次のように求める．構造関数が$\phi(\mathbf{x})$であるシステムの信頼度をＲ，各ユニットの信頼度をr_aで表す．各ユニットに対し確率変数X_aを，

$$X_a=\begin{cases}1\text{，ユニットａが機能しているとき}\\0\text{，ユニットａが故障しているとき}\end{cases}\quad(3)$$

で定義すると，

$$Pr\{X_a=1\}=r_a,\ Pr\{X_a=0\}=1-r_a \quad(4)$$

であり，

$$E[X_a]=1\times Pr\{X_a=1\}+0\times Pr\{X_a=0\}=r_a \quad(5)$$

である．確率変数X_aからなるベクトル，$\mathbf{X}\equiv(X_1, \cdots, X_n)$を定義すると，システムの機能，故障は，構造関数$\phi(\mathbf{x})$を用いて，確率変数 $\phi(\mathbf{X})$で表され，システム信頼度は，

$$R=Pr\{\phi(\mathbf{X})=1\}=E[\phi(\mathbf{X})] \quad(6)$$

で与えられる．

以上は信頼性グラフ解析における定義や表記法である．これを交通ネットワークに適用するには，ネットワークのリンクをユニットに対応させ，２点間の通行可能性をシステムに対応させる．このようにすれば，交通ネットワークと信頼性グラフとは同等に取扱うことができる．

３．ミニマルパス，カットを用いる信頼度計算法

システムの信頼度を求めるには，構造関数が必要である．構造関数の構成法には，①直列・並列システムの組合せによる方法，②分解法による方法，③ミニマルパス，カットによる方法等がある．①は，システムの構造が直列・並列の組合せで等価的に表現できる場合は有効であるが，一般的なシステムには適用できないと考えられる．②は，もとのシステムを，構造関数の構成が容易なより簡単なシステムへと等価変換しなければならず，この変換が機械的にできないという短所がある．これに対して③では，ミニマルパス，カットの探索を必要とするが，①，②のようなシステムの等価変換が必要でなく，オリジナルなシステムの構造をそのまま利用できる利点がある．交通ネットワークでは，多数のＯＤペアを対象とする必要があるので，ネットワーク形状をＯＤペア毎に等価変換する必要がなく，ミニマルパス，ミニマルカットを用いた③の方法が適切であると考えられる．ネットワークの特定の２点間の構造関数は，式(1)においてネットワークのリンクａに２値変数x_aを与えると，ミニマルパスに基づく表現では，

$$\phi(\mathbf{x})=\coprod_{s=1}^{p}\prod_{a\in P_s}x_a\equiv 1-\prod_{s=1}^{p}(1-\prod_{a\in P_s}x_a) \quad(7)$$

で与えられ，ミニマルカットに基づく表現では，

$$\phi(\mathbf{x})=\prod_{s=1}^{k}\coprod_{a\in K_s}x_a\equiv\prod_{s=1}^{k}\{1-\prod_{a\in K_s}(1-x_a)\} \quad(8)$$

で与えられる．ここに，P_s,K_sは，ミニマルパス，カットであり，ｐ,ｋは，ミニマルパス，カットの総数である．

３－１．すべてのミニマルパス，カットを対象とする計算法

ネットワークの２点間信頼度の厳密値Ｒは，式(6)により，

$$R=E[\coprod_{s=1}^{p}\prod_{a\in P_s}X_a]\equiv E[1-\prod_{s=1}^{p}(1-\prod_{a\in P_s}X_a)] \quad(9)$$

$$R=E[\prod_{s=1}^{k}\coprod_{a\in K_s}X_a]\equiv E[\prod_{s=1}^{k}\{1-\prod_{a\in K_s}(1-X_a)\}] \quad(10)$$

で与えられる．この計算は，同一リンクの確率の重複計算を避けるため，論理積に関するブール演算（$X_a\cdot X_a=X_a$）を必要とする．そのため，ネットワークが大規模になると膨大な計算が必要となる．そこで，厳密値の代わりに上限値，下限値を用いることが考えられている[1]．上限値，下限値をそれぞれU_1，L_1とすると，

$$U_1 = \coprod_{s=1}^{p} \prod_{a\in P_s} r_a \tag{11}$$

$$L_1 = \prod_{s=1}^{k} \coprod_{a\in K_s} r_a \tag{12}$$

で与えられ，

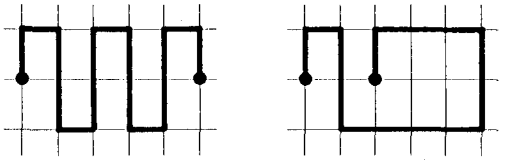
$$L_1 \leqq R \leqq U_1 \tag{13}$$

となる．ここに r_a は，リンクの信頼度

$$r_a = E[X_a] \tag{14}$$

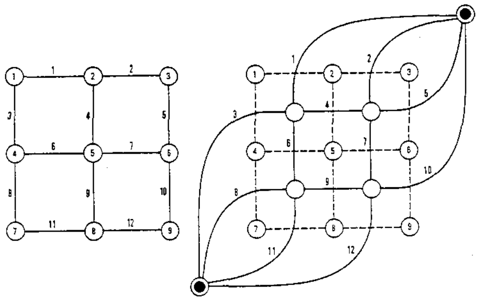
である．

ミニマルパス，カットを用いた厳密値，および上・下限値を与える方法は，この他にも含意・排他公式(Inclusion-Exclusion Formula)による方法があるが，式(9)～(12)とともに対象とする2点間のすべてのミニマルパス，カットを必要とする．そして，ネットワークが大規模になればミニマルパス，カットの数も増加し，それらの探索作業も膨大となるという欠点がある．さらに，ミニマルパスの中には，図－1のように2点間をジグザグに経路をとるものや，大まわりのミニマルパスが多く含まれ，これらのパスの交通工学的意味が希薄であるという問題点がある．なお，ミニマルカットは，双対ネットワークでのミニマルパスと等価であるので，双対ネットワークでのミニマルパスを探索すればよい（図－2参照）．そしてここでも，すべてのミニマルカットを用いることに同様の問題点が生じる．そして，交通の経路としては実際的でないこれらのパスやカットが，信



a)　ジグザグのミニマルパス　　b)　大まわりのミニマルパス

図－1　交通工学的意味の希薄なミニマルパス



a）もとのネットワーク　　b）ノードペア(1,9)のミニマルカットに対応する双対ネットワーク

図－2　双対ネットワーク（リンク番号とノード番号）

頼度Rの値にどのぐらい寄与しているかが不明確である．そして，この寄与の程度が小さければ，それらのパス，カットを計算対象から除外して，一部のパス，カットを用いる近似計算法があれば都合がよく，次にこれを考察する．

3－2．一部のミニマルパス，カットを対象とする計算法

いま，ミニマルパス $P_1, P_2, \cdots, P_p$ の集合をP，ミニマルカット $K_1, K_2, \cdots, K_k$ の集合をKとする．部分集合P'，K'をP'⊂P，K'⊂Kで定義し，その要素の個数をp'(<p)，k'(<k)とする．式(9)，(10)をP'，K'で評価すると，下限値 L_2，上限値 U_2 を得ることができる（証明は省略）．すなわち，

$$L_2 = E[\coprod_{s=1}^{p'} \prod_{a\in P_s} X_a] \tag{15}$$

$$U_2 = E[\prod_{s=1}^{k'} \coprod_{a\in K_s} X_a] \tag{16}$$

$$L_2 \leqq R \leqq U_2 \tag{17}$$

である．また，式(11)，(12)に対しては，

$$R_p = \coprod_{s=1}^{p'} \prod_{a\in P_s} r_a \tag{18}$$

$$R_k = \prod_{s=1}^{k'} \coprod_{a\in K_s} r_a \tag{19}$$

であり，次式が成立する．

$$L_2 \leqq R_p \ ,\ R_k \leqq U_2 \tag{20}$$

式(9)，(10)は，すべてのミニマルパス，ミニマルカットを対象にブール演算を行うと信頼度Rの厳密値を与えた．これに対し，式(15)，(16)は，一部のミニマルパス，ミニマルカットを対象にブール演算を行うと，ミニマルパスに基づく式は信頼度の下限値を，ミニマルカットに基づく式は上限値を与えることを示している．そして，パス(カット)数を多くするほどこれらの近似値は厳密値に近づくが，計算時間も指数的に増加するという性質がある．

式(18)，(19)は，式(20)が成立するだけであり，信頼度の上・下限値のいずれになるかは保証されない．その意味で不定値となるが，以下に述べる性質がある．式(18)は，パス数が少なくリンクに重複がないと式(15)と同じ結果となり，下限値を与える．パス数が増加すると単調増加し，すべてのミニマルパスについての計算値は式(11)と同じ結果を与え，これは上限値となる．このように式(18)は，パス数に関

表－１　ミニマルパス(カット)の利用の仕方による信頼度の相違

パス(カット)の種類＼ブール演算	ブール演算をする	ブール演算をしない
すべてのミニマルパス	厳密値 式(9)	上限値 式(11)
一部のミニマルパス	下限値 式(15)	不定 式(18)
すべてのミニマルカット	厳密値 式(10)	下限値 式(12)
一部のミニマルカット	上限値 式(16)	不定 式(19)

して，下限値から上限値へと向かう性質がある．式(19)も同様に，カット数に関して上限値から下限値へ向かう性質がある．また，ブール演算を必要としないので，計算が簡単であるという特徴がある．

以上の結果をまとめると表－１のようになる．

４．計算例

図－３のようなブリッジネットワークを例として，ＡＢ間の信頼度の厳密値と近似値を表－１の式(9)～(19)を用いて求めてみる．ＡＢ間のミニマルパス，ミニマルカットは，

ミニマルパス　：{1,2},{3,4},{3,5,2},{1,5,4}

ミニマルカット：{1,3},{2,4},{3,5,2},{1,5,4}

である．リンクａの信頼度を r_a（ａ＝1,2,3,4,5）とし，表－２の組合せを考える．

４－１．ミニマルパスに基づく信頼度

（１）厳密値

式(9)によるＲの値は，ブール演算処理を行って，

$$R = r_1 r_2 + r_3 r_4 + r_1 r_4 r_5 + r_2 r_3 r_5 - r_1 r_2 r_3 r_4 - r_1 r_2 r_3 r_5 - r_1 r_2 r_4 r_5 - r_1 r_3 r_4 r_5 - r_2 r_3 r_4 r_5 + 2 r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 \tag{21}$$

で得られる．

（２）上限値

U_1は，式(11)を直接計算することで得られる．

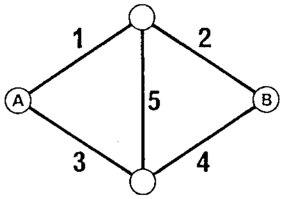
（３）下限値

(a)　式(15)において，ｐ’＝２とし，対応するミニマルパスを{1,2},{3,4}とする．このパスの選択基準は，後述するミニマルパスの生起確率の順序となっている．下限値L_2は，ブール演算を行って，

$$L_2 = r_1 r_2 + r_3 r_4 - r_1 r_2 r_3 r_4 \tag{22}$$

で得られる．

(b)　式(15)において，ｐ’＝３とし，ミニマルパスを{1,2},{3,4},{2,5,3}とする．下限値L_2は，



図－３　ブリッジネットワーク

表－２　リンクの信頼度の与え方

	リンク信頼度				
	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
ケース１	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90
ケース２	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
ケース３	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95

$$L_2 = r_1 r_2 + r_3 r_4 + r_2 r_3 r_5 - r_1 r_2 r_3 r_4 - r_1 r_2 r_3 r_5 - r_2 r_3 r_4 r_5 + r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 \tag{23}$$

で得られる．

なお，ｐ’＝１の場合は，近似値と厳密値との乖離が大きく，良好な近似値が得られないので省略した．ｐ’＝４とすれば，L_2は厳密値Ｒに一致することは明らかである．

（４）近似値

R_pは，上述(a),(b)と同様のミニマルパスを対象に，式(18)を直接計算することで得られる．

４－２．ミニマルカットに基づく信頼度

（１）厳密値

式(10)によるＲの値は，式(21)と同一である．

（２）下限値

L_1は，式(12)を直接計算することで得られる．

（３）上限値

(a)　式(16)において，ｋ’＝２とし，対応するミニマルカットを{1,3},{2,4}とする．このカットの選択基準も，後述するミニマルカットの生起確率の順序となっている．上限値U_2は，ブール演算を行って，

$$U_2 = r_1 r_2 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_3 r_4 - r_1 r_2 r_3 - r_1 r_2 r_4 - r_1 r_3 r_4 - r_2 r_3 r_4 + r_1 r_2 r_3 r_4 \tag{24}$$

で得られる．

(b)　式(16)において，ｋ’＝３とし，ミニマルカットを{1,3},{2,4},{2,5,3}とする．上限値U_2は，

$$U_2 = r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_4 - r_1 r_2 r_3 + r_1 r_4 r_5 - r_2 r_3 r_4 - r_1 r_2 r_4 r_5 - r_1 r_3 r_4 r_5 + r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 \tag{25}$$

で得られる．

なお，k’＝１の場合は，p’＝１の場合と同様の理由で省略した．k’＝４とすれば，U_2は厳密値Rに一致することは明らかである．

（４）近似値

R_kは，上述(a),(b)と同様のミニマルカットを対象に，式(19)を直接計算することで得られる．

４－３．計算例の考察

以上の計算結果を，図－４～６に示す．

図において，黒色のマークがブール演算を用いる場合の上・下限値および厳密値で，白抜きのマークがブール演算を用いない場合の近似値及び上・下限値である．

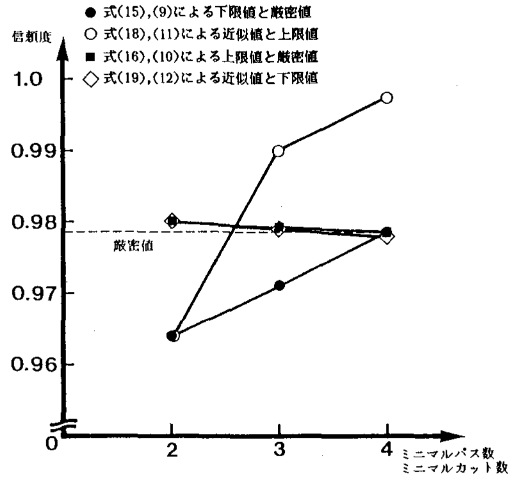
前者では，ミニマルパスに基づく式が下限値を，ミニマルカットに基づく式が上限値を与えることが保証されており，図からもそれが確認できる．そして，ミニマルパス(カット)数を増加させていくと，式(15),(16)の値は，徐々に厳密値に接近していき，遂には厳密値に一致する．一方，ブール演算に要する計算時間が増加していくので，ネットワークが大きくなった場合には，適当なミニマルパス(カット)数をとれば計算効率のよい，十分実用的な近似値が得られると考えられる．

後者では，ミニマルパスに基づく値（式(18)）は，パス数の少ないうちは厳密値より小さい値を，パス数が増加するに従って厳密値より大きい値を与え，どこかで厳密値と交差する．ミニマルパス数がミニマルパスの総数に一致すると式(11)で与えられる上限値に一致する．ミニマルカットに基づく値（式(19)）も同様に，厳密値より大きい値から下限値へ向かう曲線を与える．したがって，適当なミニマルパス(カット)数をとることにより，より実際的な近似値が得られる可能性がある．

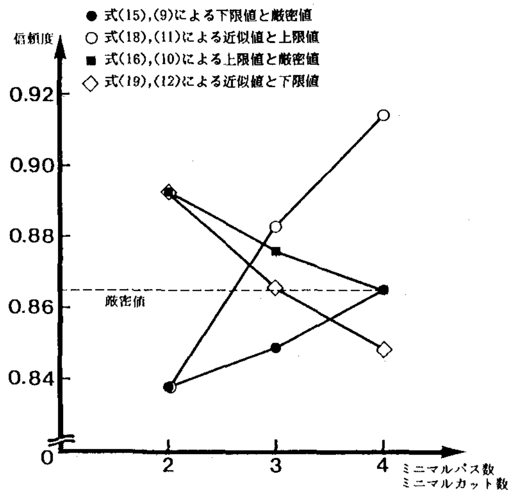
以上述べたように，一部のミニマルパス，カットを対象とする計算方法は，ブール演算を必要とする方法（式(15),(16)）とブール演算を必要としない方法（式(18),(19)）とにわけられる．両者の特徴を整理すると次のようになると考えられる．

ブール演算を必要とする方法では，

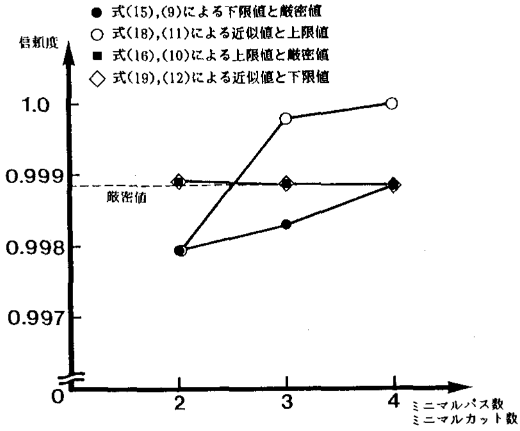
① すべてのミニマルパス，カットを利用する方法（式(9),(10)）に比較して計算時間や記憶容量を大幅に節約できる可能性がある．



図－４　ブリッジネットワークにおける厳密値および近似値（ケース１）



図－５　ブリッジネットワークにおける厳密値および近似値（ケース２）



図－６　ブリッジネットワークにおける厳密値および近似値（ケース３）

② ブール演算を必要としない方法に対し上・下限が保証されている．

③ 計算過程で確率変数Xが最後まで残るため，リンクの確率重要度が計算できる．

ブール演算を必要としない方法では，

① 式に値を代入するだけなので計算が極めて簡単である．

② ブール演算を経由しないので計算時間や記憶容量が小さくてすむ．

③ ブール演算を必要とする方法が，計算機の計算時間や記憶容量の制限から，ネットワークの規模が制約される可能性があるのに対し，本手法では大規模ネットワークにも適用可能と思われる．

５．ミニマルパス，カットの選択方法

一部のミニマルパス，カットを用いた場合，その選択の方法は信頼度の計算結果に大きな影響を与える．そこで効率的に近似値を得るために，パス，カットの選択方法を考察する．まず，パス，カットをある基準により順序づける（(Ⅰ),(Ⅱ)）．次に順序づけられたパス，カットの上位からあるルール（①～③）により計算に用いるパス，カットを選択する．

５－１．ミニマルパスの選択方法

（Ⅰ） 生起確率に着目した順序づけ

式(15)は次のようになる．

$$L_2 = 1 - E[\prod_{s=1}^{p'}(1 - \prod_{a\in P_s} X_a)] \tag{26}$$

パスP_sの生起確率は$\prod_{a\in P_s} r_a$で与えられる．そして，L_2は下限値であるから，少ないパス数で厳密値に接近させるためにはL_2の値を大きくするようなパスを選択すればよい．そのためには，$E[\prod(1-\prod X_a)]$ができるだけ小さい方がよい．ここで最初の$\prod$に着目すればパスの数を増やせばよいことになる．また同じパス数を選択するのであれば，$\prod X_a$に注目して直観的に$\prod r_a$の大きなパスから選択すれば良いと考えられる．したがって，まず最初に，ミニマルパスを生起確率の大きい順に順序づけ，以下のルールに従ってパスを選択すればよい．

ルール① リンクの重複を許さない選択ルール

生起確率の高いパスから順にリンクの重複がないように上位からp'個のミニマルパスを選ぶ．この方法では，リンクに重複がないため計算を複雑化するブール演算を避けることが可能である．さらに，パスの生起確率 $\prod r_a$は，対数をとることにより次のように変形できる．

$$\log(\prod r_a) = \log r_1 + \log r_2 + \cdots + \log r_l \tag{27}$$

ここに，lはパスを構成するリンク数である．ここで，$0 < r_a \leqq 1$であることを考慮し，各リンクに$-\log r_a$を対応させると，生起確率の大きいパスから選択することは最短ルートを探索する問題と等価になる．リンクの重複を許さないから，選ばれたリンクをネットワークから順にはずしていき，最短経路探索を繰り返し解く問題に帰着する．

ルール② 1次独立なミニマルパスの選択ルール

リンクに関して1次独立なミニマルパスを上位からp'個選ぶ．ルール①では，リンクの重複を許さないため，選択されたミニマルパスの数がきわめて少なくなり，良好な近似値が得られない可能性がある．そこで，$\prod r_a$が大きく，かつリンクが重複していないパスを多数選ぶことができれば理想的であるが，これはなかなか困難であると考えられる．そこで，リンクの重複を許すがこれを最小限にするため，ミニマルパスに関する1次独立性の概念（グラフ理論で用いられる概念であり，これにより他のどのようなパスも演算で記述できる）を導入したものである．

これは，最短経路，2番目最短経路，…を1次独立性を考慮しながら順次求める問題に帰着する．

ルール③ 上位から制約なしに選択するルール

①，②のルールを緩和し，ミニマルパスを単に上位からp'個選ぶ．これは，最短経路，2番目最短経路，…を順次求める問題となる．

（Ⅱ） 経路距離に着目した順序づけ

もう一つの近似計算法を考える．式(15)を要素の信頼性に関して次数が同じものを集め再整理すれば

$$L_2 = \sum_{a} O_1(r_a) + \sum_{a1}\sum_{a2} O_2(r_{a1} r_{a2}) + \cdots \tag{28}$$

を得る．$0 < r_a \leqq 1$であるから式の値を規定するのは次数の小さい項である．したがって，この多項式を適当な次数の項で打ち切れば信頼度の近似値を得ることができる．式(15)が$(1-\prod X_a)$の積から成り立っていることから，X_aの次数の小さいミニマルパスから選択すればよいと考えられる．リンクの信頼度r_aはリンク長に比例すると考えると，これは経路の距離に関する最短経路探索問題に帰着する．ミニ

マルパスの選択ルールは，（Ⅰ）と同じである．

5－2．ミニマルカットの選択方法

式(16)は次のように書ける．

$$U_2 = E[\prod_{s=1}^{k'}\{1-\prod_{a\in K_s}(1-X_a)\}] \quad (29)$$

式(29)は上限値であるから，少ないカット数で厳密値に接近させるためにはU_2の値を小さくするようなカットを選択すればよい．ここで最初のΠに着目すればカットの数を増やせばよいが，同じカット数を選択するのであれば，$\Pi(1-X_a)$に着目して$\prod_{a\in K_s}(1-r_a)$の大きなカットから選択すればよい．

ミニマルカットは，双対ネットワークでのミニマルパスに対応する．双対ネットワークを利用すると，5－1と同様の扱いが可能となる．

（Ⅰ） 生起確率に着目した順序づけと選択ルール

この場合は，双対ネットワークの各リンクに$-\log(1-r_a)$を対応させると，5－1（Ⅰ）とまったく同様に扱うことが可能となる．

（Ⅱ） 経路距離に着目した順序づけと選択ルール

双対ネットワークには，経路長の概念がないので，すべてのリンクに等しいリンク長を与えると，最短経路探索問題と等価になり，5－1（Ⅱ）とまったく同様に扱える．

6．モデル計算

本節では，一部のミニマルパス，カットを用いた信頼度計算法のうち，ミニマルパスとブール演算を用いる方法（式(15)）のモデル計算を紹介する．紙面の関係からその一部を紹介するにとどめ，その詳細および，他の方法による計算結果は別の機会に譲ることとする．

この方法では，式(15)を計算するためにブール演算を必要とするが，これは煩雑な作業を必要とする．本研究では，計算機用アルゴリズムを開発し，計算はこれによって行っている．

対象とするネットワーク形状は，図－２ａに示した田字型ネットワークである．ここでは，各リンクの信頼度が一定の場合を考え，ノードペア(1,9)の信頼度を計算する．

（１） 各リンクの信頼度がすべて0.9の場合

ノードペア(1,9)に対するミニマルパスは12個あり，（Ⅰ）の順序で並べたものを表－３に示す．同一生起確率のパスの順序は特に考慮していない．そして，この場合の信頼度の厳密値は，0.9725022である．

ルール①（非重複のルール）によりパスを選択するとNo.1とNo.2のパスが選択され，信頼度の近似値は0.8817328である（表－３参照）．

ルール②の独立なパス数は，L－N＋2＝5（L：リンク数，N：ノード数）で与えられ，このケースでは，上位から順に５個のパスが選択され，値は0.9662445である．

ルール③では，表－３のミニマルパスを上位２個から12個まで変化させて計算し，その結果を表－４と図－７に示す．この場合，パスの選択数を増すと下限値は大きくなり，すべてのミニマルパスを用いると厳密値を与える．そして，下限値は，パス数が２～６個にかけて急激に厳密値に収束し，パス数が

表－３　ミニマルパスの順位表およびルール①，②による計算結果
r_i＝0.9，ノードペア(1,9)，順序（Ⅰ）

パス順位 (No.)	構成リンク	リンク数	生起確率	選択されたパス ルール①	ルール②
1	{1,2,5,10}	4	0.6561000	*	*
2	{3,8,11,12}	4	0.6561000	*	*
3	{1,4,9,12}	4	0.6561000		*
4	{3,6,7,10}	4	0.6561000		*
5	{1,4,7,10}	4	0.6561000		*
6	{3,6,9,12}	4	0.6561000		
7	{1,2,5,7,9,12}	6	0.5314410		
8	{3,8,11,9,7,10}	6	0.5314410		
9	{1,4,6,8,11,12}	6	0.5314410		
10	{3,6,4,2,5,10}	6	0.5314410		
11	{1,2,5,7,6,8,11,12}	8	0.4304672		
12	{3,8,11,9,4,2,5,10}	8	0.4304672		
下限値の計算値				0.8817328	0.9662445

表－４　ルール③による計算結果
ノードペア(1,9)，順序（Ⅰ）

パス数	r = 0.9 信頼度	CPUタイム
2	0.8817328	1157
3	0.9299174	1182
4	0.9625622	1237
5	0.9662445	1336
6	0.9699268	1559
7	0.9705491	2002
8	0.9711714	2958
9	0.9717938	5036
10	0.9724161	9536
11	0.9724591	19587
12	0.9725022	40834

ＣＰＵタイム：単位 mS(FACOM M-340)

５個の場合では0.9662445と厳密値との誤差は１％以下である．この値は，ルール②と同一値を与える．また，パス数が６個以上の場合は，パス数を１個増加させてもそれほど値の改善はみられない．このことは，ミニマルパスの中にも，厳密値に大きく寄与するものと，そうでないものとがあることを示している．また，ＣＰＵタイムについてみると，パス数が少ないうちは漸増しているが，パス数が増加すると指数的に増加している．これらのことから，パス数をあまり多くとっても，値の改善の割りには計算効率が悪いことを示している．

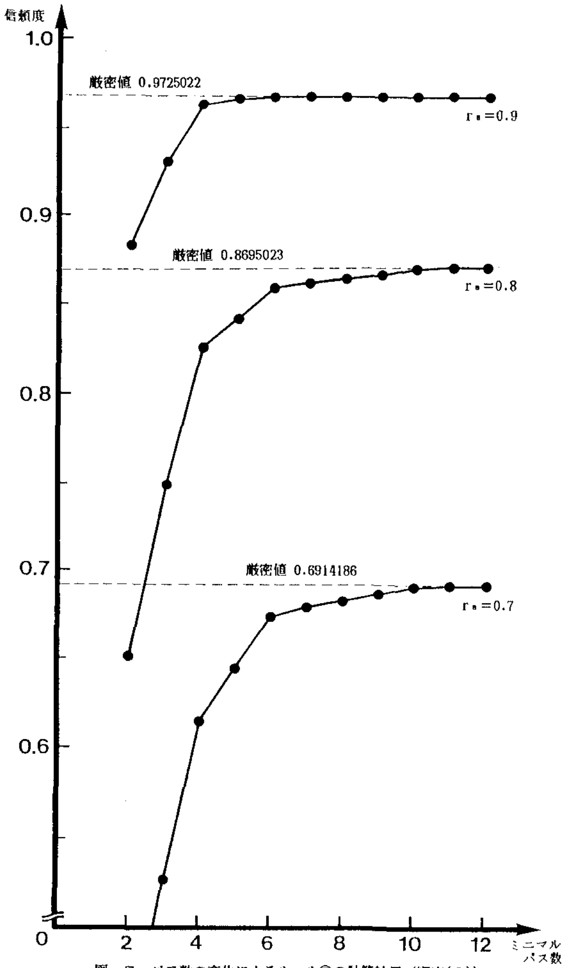
なお，順序(Ⅱ)は，順序(Ⅰ)と同一となるので計算結果も同じとなる．

このケースでは，ルール②（独立のルール）の方法で実用上十分であると考えられる．また，ルール③の方法でｐ’＝５の場合も同一の値を与える．ルール①（非重複のルール）の方法では，得られた下限値は他の方法と比較して非常に小さく，このルールを採用するのは問題が多いと考えられる．

（２） 各リンクの信頼度がすべて0.8，0.7の場合

厳密値は，リンク信頼度が0.8の場合，0.8695023，0.7の場合，0.6914186である．

ルール①，②は得られた値の傾向は(１)と同じであるので省略し，ルール③について(１)との比較を行う．図－７よりリンク信頼度が，0.9,0.8,0.7の各場合を比較すると，リンクの信頼度が大きくなると厳密値への収束が早くなり，信頼度が小さくなると収束が遅くなっていることがわかる．つまり，リンクの信頼度が小さくなると，少数のパスだけで厳密値を規定することは困難となり，多くのパスを利用しなければならないことを示している．例えば，信頼度が0.9の場合では，４個のパスを取り出しても厳密値に相当近い下限値を得るが，0.8,0.7の場合は厳密値との乖離が大きくなっている．しかしながら，10%程度の誤差を許容すると，５個程度のパスで十分である（この値はルール②と同一である）と考えられる．



図－７　パス数の変化によるルール③の計算結果（順序(Ⅰ)）

７．あとがき

本論文では，信頼性グラフ解析の手法を交通ネットワークに適用する方法を考察した．そしてその近似計算法として，一部のミニマルパス，カットを用いる方法，ブール演算を省略する方法を示した．さらに，一部のミニマルパス，カットの選択方法として，パスやカットの生起確率に着目する方法と経路の距離に着目する方法を提案し，これらが最短経路探索問題に帰着することを示した．

モデル計算では，紙面の関係上，一部しか紹介できなかったが，種々のＯＤペアやリンク信頼度に対し安定性があり，かつ実用的な方法を検討することが今後必要である．また，現実の大規模ネットワークへの適用性の検討は重要であり，今後の検討課題としたい．

参考文献：

１）三根　久・河合　一：信頼性・保全性の数理，pp.108-116,朝倉書店，1982.