【土木計画学研究・講演集 No.9 1986年10月】

利用者均衡条件により制約された最適ネットワーク形成問題の解法

Solution Algorithm and Numerical Test of Optimal Network Design Problem Constrained by U.E. Conditions

朝倉康夫*
By Yasuo ASAKURA

Incorporating the behavior of network user into optimizing models of transportation systems, the two level optimizing problems have been investigated. The user equilibrium, the most appropriate assumption for the user's behavior, constraints the whole problem. However the exact and applicable solution algorithm has not been found for the formulated problem.
A solution algorithm for an optimal road network design problem is discussed in this paper. Variational Inequality is employed to describe the U.E. condition and the original design problem is reduced to the max-min problem. The algorithm is numerically examined for a hypothetical data. The comparisons with the heuristic solution procedure and the simple design problem are also discussed.

1．はじめに

従来から、交通システムの計画・運営代替案の策定支援を目的として、いくつもの交通システム最適化モデルが研究されてきた。その中の興味ある問題のひとつに「交通システム最適化問題の中で、そのシステムを利用する利用者の自由な選択行動をどのように記述すればよいか？」という問題がある。

計画パラメータが与えられたとき、個々の利用者は交通ネットワークの上で、自由に経路を選択すると仮定すれば、交通ネットワークフローは利用者均衡条件を満足する。この仮定を採用するならば、先の問題に対しては、交通システム最適化問題の制約条件として利用者均衡条件を加えればよいことになる。

このような考え方に従って、近年、数多くのシステム最適化モデルが提案されている。たとえば、道路ネットワークの個々のリンクあるいは経路の最適容量決定モデルとしては、Harker & Friesz(1984), LeBlanc & Abdulaal(1984)および筆者ら(1985,86)の研究があるし、信号制御の最適パラメータ設定モデルとして、Marcotte(1983)およびFisk(1984)などがある。また、井上(1983)は高速道路の流入制御モデルを提案しているし、河上・溝上(1985)はバスの最適運行頻度決定モデルを示している。これらのモデルでは、「交通システムの計画者・運営者は、システム利用者の自由な経路選択行動を考慮しながらシステム全体を（社会的に見て）最適な状態にするような計画パラメータを決定する」ことを前提としていると考えられる。

利用者均衡条件を満足するネットワークフローは一般に数理最適化問題の解として与えられるが、この最適化問題の目的関数は計画者が最適にしようと

* 正会員 工修 京都大学助手 工学部
交通土木工学科（〒606 京都市左京区吉田本町）

考える交通システム全体の最適化基準とはなりえない。ネットワーク全体の社会的費用を最小にしようとするネットワーク計画者の目的関数と、利用者均衡問題の目的関数が一致しないのである。したがって、定式化すべき問題の構造は、「最適化問題（利用者均衡問題）を制約条件としてもつシステム最適化問題」となる。

このような２レベル最適化問題を厳密に解くことはきわめて難しい。従来の研究においてもいくつかの解法が提案されているものの、それらは必ずしも厳密性と適用性の両者を満足する十分な方法であるとはいえない。

そこで、この論文では、２レベル最適化問題として定式化された最適道路網形成問題に対する問題の解法を紹介するとともに、数値例を通してその解法を検討する。具体的な考察の対象は

①Fisk(1984)が最適信号パラメータの設定問題の解法として提案した方法を道路網形成問題に適用した場合について紹介すること。

②簡単な数値例を用いて、ヒューリスティックな繰返し法による解および単純な（２レベル構造ではない）システム最適化問題の解との比較などを行ない大規模問題への適用可能性を検討すること。

である。

２．最適道路網形成問題の解法

2-1　問題の構造

不必要な複雑さを避けるために、以下で考察する道路網形成問題は、次の仮定の下に定式化されているものとする。

①計画者の意志決定変数は各リンクの拡幅容量（連続変数）である。拡幅容量は負でない。

②計画者の目的は、ネットワーク全体の総走行時間の最小化にある。

③リンク拡幅のための総費用は与えられている。

④ＯＤレベルの交通需要は固定されている。

⑤利用者は自己の走行時間が最小となるようＯＤペア間の経路を自由に選択する。

これらの仮定の下に定式化される問題は、ＯＤ需要固定の利用者均衡問題（等時間配分問題）により制約される最適道路網形成問題（Ｐ１）である。

（Ｐ１）

$$\min. \sum_a V_a\ S_a(V_a, Z_a) \tag{1}$$

s.t.

$$\sum_a G_a(Z_a) \leq G \tag{2}$$

$$Z_a \geq 0 \tag{3}$$

$$\min. \sum_a \int_0^{V_a} S_a(x, Z_a)\, dx \tag{4}$$

s.t.

$$\sum_m h_{mij} = T_{ij} \tag{5}$$

$$V_a = \sum_m \sum_i \sum_j d_{amij}\ h_{mij} \tag{6}$$

$$h_{mij} \geq 0 \tag{7}$$

ここに

a　；リンク番号

m　；パス番号

i,j；発生、集中ノード番号

V_a　；リンクａの交通量（リンクフロー）

Z_a　；拡幅対象リンクａの交通容量

T_{ij}；発生、集中ノードi,j間のＯＤ交通量

h_{mij}；ノードi,j間のパスｍの交通量（パスフロー）

d_{amij}；ノードi,j間のパスｍがリンクａを通るとき１、そうでなければ０

$S_a(V_a, Z_a)$；走行時間関数

$G_a(Z_a)$；リンク拡幅費用関数

Ｇ；拡幅のための総建設費用の上限

である。

式(1) を目的関数とし式(2),(3) を制約条件とする問題を主問題、あるいは上位問題とよぶ。式(3) を目的関数とし、式(4) ～式(7) を制約条件とする問題を子問題あるいは下位問題とよぶ。計画者の意志決定は上位問題、利用者の行動は下位問題により与えられる。

この問題では、「計画者は、利用者が利用者均衡を満足するように行動することを知っており、そのことを考慮した上で交通システム全体が最も効率的に利用されるようなネットワーク容量を決定する」ような状況が想定されている。

2-2 問題の解法

ここに紹介する解法は、下位問題を変分不等式(Variational Inequalities)により記述し、さらに上位問題との組みあわせによる鞍点問題に帰着させる方法である。この方法は、信号スプリットの最適化問題の解法としてFisk(1984)が提案した方法を、そのままネットワーク形成問題へ応用したものである。この方法の他にも、定式化した問題に忠実な解法として、上位問題の目的関数と制約条件の勾配を計算し適当な勾配法（たとえば許容方向法）を用いて解く方法（佐佐木 et al.,1986）があるが、ここでは、前者の方法についてのみ説明する。

以下では、（P１）における(2),(3) 式を満足する実行可能なリンク容量の集合を Gとし、(5),(6),(7) 式を満足するリンクフローの集合を F としておく。

需要固定型のネットワーク均衡問題を変分不等式(VI)により記述すれば、（たとえば Florian,1984)

$$\sum_a S_a(V_a,Z_a)(E_a-V_a) \geqq 0 \quad \text{for all} \quad E \in F \qquad (8)$$

と書くことができる。さらに、どのような $Z \in G$ に対しても $S_a(V_a,Z_a)$ が単調であれば、VI は

$$\max_{V \in F} \min_{E \in F} \sum_a S_a(V_a,Z_a)(E_a-V_a) \qquad (9)$$

と等価であるから、

$$W(V,Z) = \min_{E \in F} \sum_a S_a(V_a,Z_a)(E_a-V_a) \qquad (10)$$

とおけば、V^{EQ} が利用者均衡フローであるための必要十分条件は、$W(V^{EQ},Z)=0$ 。したがって、先に定式化したネットワーク形成問題（P１）は、

（P２）

$$\min_{Z \in G,\ V \in F} T(V,Z) \qquad (11)$$

$$\text{sub. to} \quad W(V,Z)=0 \qquad (12)$$

となる。ここに、$T(V,Z)=\sum_a S_a(V_a,Z_a)\ V_a$ である。

Fiskによれば、W(V,Z)はペナルティ関数に要求される特性を持つので、この問題はさらに次の問題のように書き換えることができるとされている。

$$\min_{Z \in G,\ V \in F} \{\ T(V,Z) - \mu\ W(V,Z)\ \} \qquad (13)$$

ここに、μは、$W(V^{EQ},Z) \sim 0$ を保証するように、十分大きな値を設定すればよい。この問題は、さらに関数$\Phi(X,E)$ の鞍点を求める問題に帰着される。

（P３）

$$\min_X \max_E \Phi(X,E) =$$

$$\min_{V,Z} \max_E \{T(V,Z) - \mu\ S(V,Z)\ (E-V)\} \qquad (14)$$

である。ここに、$X=(V,Z)$である。この関数は、μをパラメトリックに変化させることにより数値的に解くことができる。

たとえば、この鞍点問題を解くために Ermolev の方法（注１参照）が応用できる。この方法は、E が与えられたときのV,Z に関する最小化問題とV,Z が与えられたときのE に関する最大化問題を交互に繰り返す方法である。

まず、N 回目の繰返しにおいて与えられたE に対する最小化問題の解 $V(E^N),Z(E^N)$ を求めるためには、

$$\min_X \Phi(X,E^N) = \min_{V,Z} \{\sum_a S_a(V_a,Z_a)\ V_a - \mu \sum_a S_a(V_a,Z_a)\ (E_a{}^N - V_a)\} \qquad (15)$$

を解けばよい。この問題の構造は、システム最適フローを仮定する最適ネットワーク形成問題と類似の構造である。目的関数の勾配を求めることも、きわめて容易であるから、Frank-Wolfe 法を用いて解くことができる。

一方、N 回目の繰返しにおいて与えられた V,E に対する最小化問題の解 $E(V^N,Z^N)$は、

$$\max_E \Phi(X^N,E) = \max_E \{\sum_a S_a(V_a{}^N,Z_a{}^N)\ V_a{}^N - \mu \sum_a S_a(V_a{}^N,Z_a{}^N)(E_a - V_a{}^N)\} \qquad (16)$$

の解である。定数部分を除けば、この問題は、単純なall-or-nothing配分問題である。

以上をまとめると、解のアルゴリズムはつぎのように書くことができる。

step.0 パラメータ μの値を適当に設定する。

step.1 $Z^1 \in G$,$V^1 \in F$,$E^1 \in F$ を満足するリンク容量およびリンクフローの初期値を設定する。

くりかえし回数 N=1 とおく。

step.2 $R^N = 1/N$ 。

step.3 min $\Phi(X,E^N)$ をFrank-Wolfe 法により解き、解を $V(E^N),Z(E^N)$とおく。

step.4 V,Z をつぎの式を用いて up-date する。

$$V^{N+1} = R^N V(E^N) + (1-R^N) V^N$$

$$Z^{N+1} = R^N Z(E^N) + (1-R^N) Z^N$$

step.5 all-or-nothing問題 max $\Phi(X^N,E)$ を解き、$E(V^N,Z^N)$ を求める。E をつぎの式により up-date する。

$$E^{N+1} = R^N E(V^N,Z^N) + (1-R^N) E^N$$

step.6 リンク容量、リンクフローが収束しておれば、step.7 へ。そうでなければ、N=N+1 とおいてstep.2 へ。

step.7 $\Sigma S_a(V_a,Z_a)(E_a - V_a) = 0$ であれば、終了。そうでなければ、μの値を up-date して、step.1 へ。

このアルゴリズムでは、E を更新する(step.5)際に、Ermolev の方法 (a)を用いているが、方法 (b)により更新するときは $E^{N+1} = E(V^{N+1},Z^{N+1})$ とすればよい。また、ここに紹介した鞍点問題は、min-max 問題であるが、逆にそれをmax-min 問題とした場合についても同様の議論を進めることができる。

3．数値計算例

3-1 前提条件

Harker & Freisz(1984) が用いた仮想的ネットワークと同じネットワーク（図－１）を用いて、数値計算を実行した。リンクの走行時間関数 $S_a(V_a,Z_a)$ および拡幅費用関数 $G_a(Z_a)$は、それぞれ次式で与えられるものとする。

$$S_a(V_a,Z_a) = A_a + B_a V_a^4 / (Z_a + C_a)^4 \quad (17)$$

$$G_a(Z_a) = g_a Z_a \quad (18)$$

ここに、

A_a, B_a ；パラメータ

C_a ；既存容量

g_a ；単位拡幅容量あたりの建設費用

である。これらの値を表－１に示す。

ＯＤフローは、ＯＤペア ①→⑥，⑥→① のみに存在し、それぞれ $T_{16} = 10$，$T_{61} = 20$ である。また、すべてのリンクが拡幅の対象であり、拡幅のための総建設費の上限は、G＝100 とする。

3-2 計算結果

関数 $\Phi(X,E)$ に含まれるパラメータ μ の値を $\mu = 0.0$ から少しづつ増加させて、数値計算を実行した。それぞれの μ の値に対して、50回(N=1から50) の繰返し計算を行なった。計算結果は、つぎのようにまとめることができる。

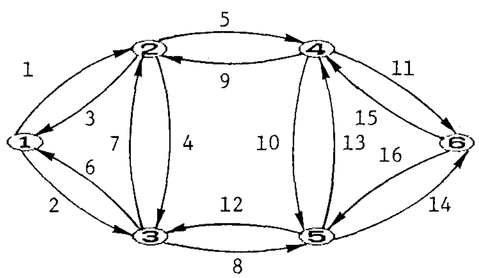

図 1 ネットワーク

表 1 リンクデータ

link	A_a	B_a	C_a	g_a
1	1.0	10.0	3.0	2.0
2	2.0	5.0	10.0	3.0
3	3.0	3.0	9.0	5.0
4	4.0	20.0	4.0	4.0
5	5.0	50.0	3.0	9.0
6	2.0	20.0	2.0	1.0
7	1.0	10.0	1.0	4.0
8	1.0	1.0	10.0	3.0
9	2.0	8.0	45.0	2.0
10	3.0	3.0	3.0	5.0
11	9.0	2.0	2.0	6.0
12	4.0	10.0	6.0	8.0
13	4.0	25.0	44.0	5.0
14	2.0	33.0	20.0	3.0
15	5.0	5.0	1.0	6.0
16	6.0	1.0	4.5	1.0

①Φ(X,E) の収束

μ=0.0, 0.1, 0.3, 0.5, 1.0, 3.0, 5.0 に対する Φ(X,E) の値の収束状況を図－2に示す。この図より、μの値がゼロに近いほど Φ(X,E) の収束は速く、μの値が大きくなれば Φ(X,E) の収束は緩慢になることがわかる。さらに、μ=5.0 では、関数が収束する傾向にはない。μ=0.0 のときはシステム最適フローを仮定した状態（Φ(X,E) の第1項のみが有効）であり、μを大きくすればフローは次第に均衡フローに近づく。しかし、E を all-or-nothing 配分によって求めるため、均衡状態に近づくほど E の安定性が悪くなり、それが Φ(X,E) に影響を及ぼすものと考えられる。

②w(V,Z) の値

設定したすべてのμの値に対して、w(V,Z)≦ 0 となることが確認できた。N=50 のときの w(V,Z) の値を表－2に示す。理論的には、$\mu\to\infty$ となるにつれてフローが均衡状態に近くなり、それとともに w(V,Z)→0 になるはずである。しかし、このアルゴリズムでは、μがある値を越えると変数の挙動が不安定になることもあって、一様に w(V,Z)→0 とはならない。この例では、w(V,Z)が最もゼロに近くなるのは、μ=3.0 のときである。

③総走行費用の値

μに対する総走行費用 T(V,Z) の値と、解として得られたリンク容量をもとに計算した均衡フロー V^{EQ} から求めた総走行費用 T(V^{EQ},Z) の値を表－3に示す。μ=0.0 のときはシステム最適フローを仮定した状態であるから、T(V,Z)の値は最も小さい。一方ヒューリスティックな繰返し法によって解を求めた場合の総走行費用の値と比較すると、その値よりも T(V,Z) の値は小さい。

Harker & Freisz(1984) によれば、理論的に見た

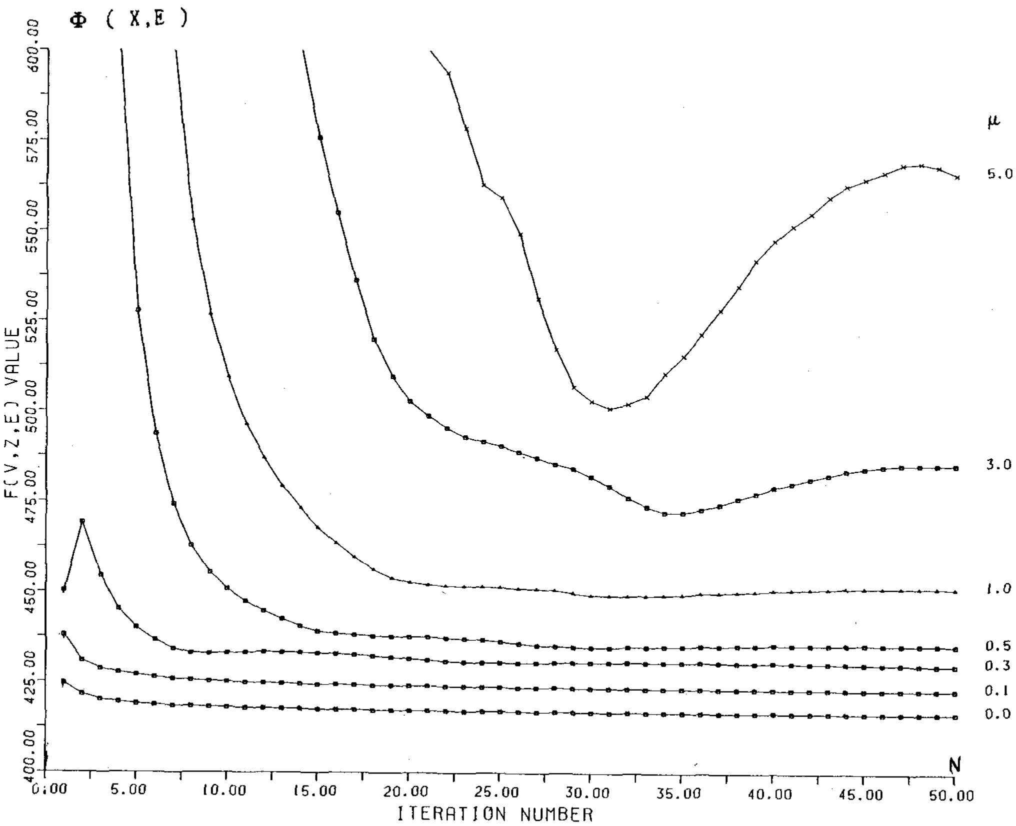

図 2 目的関数 Φ(X,E) の収束

場合システム最適フローを仮定したときの解とヒューリスティックな繰返し法によって求めた解は、それぞれ、先に定式化した問題の下限値と上限値を与えるとされている。T(V,Z) の変化を見ると、数値的にそのことが確認できる。また、ヒューリスティックな方法によるよりも、ここで求めた解のほうがより良好であることがわかる。

T(V,Z) と $T(V^{EQ},Z)$ の値を比較すると、その差は $\mu=3.0$ のとき最も小さい。$\mu=3.0$ では w(V,Z) の値も最もゼロに近いことを考え合わせると、この例では、$\mu=3.0$ の近くに、定式化した問題の忠実な解があると考えられる。

④リンク容量の値

μ に対するリンク容量の値を、表－4に示す。μ の変化とともに、リンク容量の値は連続的に変化するが、その変化の程度はリンクごとに異なる。$\mu=3.0$ の近くに、定式化した問題の忠実な解があるとすれば、その値は、ヒューリスティックな繰返しによる解に比べややズレた値であり、また、システム最適フローを仮定した場合の問題の解とも異なると考えてよいであろう。

表 2 総走行費用 T(V,Z) の値

μ	0.0	0.1	0.3	0.5	1.0	3.0	5.0	heuris.
A	416.47	418.26	422.43	427.44	435.26	464.87	517.78	526.25
B	439.30	440.54	440.77	444.35	449.57	474.28	478.94	------

A; T(V,Z)　B; $T(V^{EQ},Z)$　heuris; ヒューリスティック 繰返し法

表 3 W(V,Z) の値

μ	0.0	0.1	0.3	0.5	1.0	3.0	5.0
W	-74.09	-45.38	-24.29	-15.78	-16.06	-6.83	-9.72

表 4 リンクの拡幅容量 Z_a の値

μ	0.0	0.1	0.3	0.5	1.0	3.0	heuris.
1				0.555	0.426	0.852	
2	3.199	3.055	3.046	2.755	2.488	1.357	4.244
3	8.679	8.470	8.282	7.686	7.111	4.117	
4	0.378	0.363	0.285	0.948	0.987	0.771	
5	0.488	0.506	0.451	0.199	0.030	0.009	
6	11.284	11.439	11.306	12.196	11.899	12.658	7.483
7						0.055	
8						0.080	
9							
10					0.268		
11							
12		0.156	0.314	0.705	0.782	1.654	
13							
14						0.441	
15	1.672	1.728	1.898	1.674	2.506	5.089	11.476
16	19.688	19.335	18.970	18.696	17.372	12.270	3.438

4. おわりに

この論文では、利用者均衡により制約された最適ネットワーク形成問題の解法（定式化に忠実な）の実行可能性を数値計算により検討した。多様な例を用いて計算を実行するには至っていないので、単純に結論づけることはできないが、ここで用いた数値例を通して見る限り、つぎのことがわかる。

①問題を解くためのアルゴリズムは、基本的に Frank-Wolfe 法であるから、複雑な手順は必要でない。ネットワークの規模がやや大きくなっても対応できる点ですぐれている。需要が変動する場合であっても、利用者均衡を VI により記述することは容易であるので、ここに紹介したアルゴリズムの構造をそのまま用いることができる。

②最大の難点は、パラメータ μ の適当な値を設定することの難しさにある。ここでは、0.0 から次第に大きくする方法で対応したが、ほとんど試行錯誤的な方法に近く、方法の改良が望まれる。

③実際問題への適用において、解の厳密性を犠牲にすることがある程度許容されるのであれば、つぎのいずれかの方法を使うことが現実的ではないかと考えられる。

1)システム最適フローを仮定する問題を解いてリンク容量を求め、その値に対して均衡リンクフローを求める。

2)ヒューリスティックな input/output 繰返し法により、リンク容量とリンクフローを同時に求める。

注1） Ermolev は、変数X,U に関する制約領域が相互に独立である鞍点問題

$$\min_{X} \max_{U} \Phi(X,U)$$

を解くためのくりかえしによる方法を提案した。ここに、$\Phi(X,U)$ は連続であり、X に対して凸、U に対して凹である。くりかえし回数N のときの X,Uの値 X^N, U^N が計算されているとき、(N+1) 回のときの値は、方法 (a)あるいは(b) により計算できる。

方法 (a)

$$X^{N+1} = R^N X(U^N) + (1-R^N) X^N$$
$$U^{N+1} = R^N U(X^N) + (1-R^N) U^N$$

方法 (b)

$$X^{N+1} = R^N X(U^N) + (1-R^N) X^N$$
$$U^{N+1} = U(X^{N+1})$$

ここに、$X(U^N), U(X^N)$ の値は、それぞれ片方の変数の値を固定したときの最適化問題

$$\min_X \Phi(X, U^N) \quad および \quad \max_U \Phi(X^N, U)$$

の解である。また、R^N は、つぎの条件を満足する数列である。

$$0 < R^N \leq 1, \ \lim R^N = 0, \ \Sigma R^N = \infty$$

参考文献

朝倉康夫 (1985) ; 交通混雑を考慮した最適道路網計画モデルとその適用,
土木計画学研究論文集, No.2, pp.157-164

朝倉康夫 (1986) ;分布・配分同時決定問題を制約条件としてもつ最適道路網形成問題,
土木計画学研究講演集, No.8, pp.315-317

Florian M.(1984) ; An Introduction to Network Models used in Transportaion Planning,
in Transportation Planning Models(Florian ed.) North-Holland, pp.137-152

Fisk C.S.(1984) ; Optimal Signal Controls on Congested Networks, Proc. of the 9th International Symposium on Transportation and Traffic Theory in Delft, VNU Science Press,pp.197-216

Harker P.T. and Friesz T.L. (1984) ; Bounding the Solution of the Continuous Equilibrium Network Design Problem, Proc. of the 9th International Symposium on Transportation and Traffic Theory in Delft, VNU Science Press, pp.233-252

井上博司 (1983) ;高速道路と一般道路の最適交通分担
土木計画学研究講演集, No.5, pp.233-237

河上, 溝上 (1985) ; 分担・配分過程結合交通需要予測モデルとそれを用いた最適バス輸送計画策定手法の開発, 土木学会論文集, No.353/VI-2, pp.101-109

LeBlanc L. and Abdulaal M. (1984) ; A Comparison of User-Optimum Versus System-Optimum Traffic Assignment in Transportation Network Design,
Transp. Res.,Vol.18B,pp.115-121

Marcotte P. (1983) ; Network Optimization with Continuous Control Parameters,
Transp. Sci., Vol.17,pp.181-197

佐佐木綱 他(1986) ;交通混雑と需要変動を考慮した最適交通ネットワーク形成に関する研究，文部省科学研究費（一般Ｃ），研究成果報告書