【土木計画学研究・講演集 No.8 1986年1月】

住宅立地モデルと均衡配分理論

A Study of Residential Location Model and Equiliblium Allocation Theory

柏谷 増男*

This paper discusses the issues of probabilistic residential location problems through examining Hybrid multinomial logit and linear programming residential location model presented by the author. This model is planned to produce solutions which are mostly like actual patterns and consistent with residential location theory. It has some useful properties in operational sense but lacks of theoretical consistency between the households solution probabilistically allocated and price solution supported by linear programming model. Problems about locational equilibrium conditions with probabilistic variables and the relation between logit model and entropy maximizing model are also discussed.

1、はじめに

住宅立地モデルとネットワーク理論とには、2つの面で関係が見られる。ひとつは、住宅立地と交通量配分および交通機関選択とを一体化した土地利用・交通モデルの開発である[1,2]。この研究は、ネットワーク理論から見れば、伝統的な交通量配分モデルを機関分担や分布交通量等の決定を含む総合的モデルへ拡大するものといえよう。他のひとつは、住宅立地モデルの数学的わく組みと交通量配分モデルの数学的わく組みとが類似していることである。住宅立地モデルでの従業地別世帯数をOD交通量に、住宅立地容量をリンク容量におきかえれば、このことは容易に理解できよう。エントロピーモデルが交通量配分問題にも住宅立地問題にも用いられていることはこの関係を示す1例といえる。また、近年の確率的住宅立地配分問題の研究において、確率的均衡ネットワーク問題[3]との関連が言及されている[4]ことも例としてあげられる。

本研究は、先に筆者らが発表した確率的住宅立地配分モデル[5]を立地均衡配分モデルとして再吟味するものであり、特に、住宅立地問題と交通量配分問題とに共通していると思われる確率的均衡配分問題について考察している。

2. 確率的住宅立地配分モデル

Alonsoのつけ値理論に端を発する住宅立地理論は、L.P.モデルとして定式化されたHerbert Stevens モデルにより、実用的モデルへの可能性を拡げることとなった。その最初の試みはHarris[6]の研究であるが、この研究は、実用化に際しての多くの課題を見出した点で後に評価されることとなった。これらの課題のうち、本論文に関係するものを取りあげると、そのひとつはつけ値推定の困難さであり、他のひとつ

キーワード　住宅立地, 均衡ネットワーク理論
＊正会員, 工博, 愛媛大学 工学部 土木工学科 教授（〒790 松山市文京町3）

は実現象の分布的ないしは確率的な特性とL.P.モデルの決定論的特性のかい離である。つけ値推定については、その後いくつかの推定法が研究されてきており、最近では非集計モデルによる方法が提案されている。後者の問題については、モデルの実用化のための大きな課題として認識され、確率的住宅立地配分モデルとして、エントロピーモデルの研究[7]やロジットモデルで表現された需給均衡式を解く方法[4)8)]などが提案されている。

3. ハイブリッド住宅立地配分モデル

筆者らが提案したハイブリッドモデル[5]は、住宅立地LPモデルとロジットモデルとを組み合わせたもので、前者により将来の均衡効用水準を推定し、後者によって立地配分を行なう。LPモデルで理論的整合性を取り、ロジットモデルで実際のパターンに近い立地配分を得ることを意図している。

(1)住宅立地LPモデル

NBERモデルのMarket Clearance Submodel[9]のような簡単な住宅立地配分モデルを想定する。対象地域をn個の地区に分割し、各地区を添字iで表わす。住宅タイプは単一とし、各地区の利用可能住宅戸数をH_iとする。住宅立地世帯は従業地によってのみ分類され，m個の従業地の各々は添字jで表わされる。従業地jの住宅需要世帯の数はN^jで示される。次に、世帯タイプjの世帯が，効用水準U^jのもとで地区iに示すつけ値地代を$\Phi_i^j(U^j)$とし、地区iに立地する世帯タイプjの世帯数をy_i^jで表わす。

このとき、Herbert Stevens型住宅立地モデルは、次式で表わされる。

$$\max \sum_i \sum_j \Phi_i^j(U^j)\, y_i^j \qquad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_j y_i^j \leq H_i \qquad (2)$$

$$\sum_i y_i^j = N^j \qquad (3)$$

$$y_i^j \geq 0 \qquad (4)$$

なお，本論文では，このモデルをDeterministic Linear Programming Modelとし，$\{U^j\}, \{H_i\}, \{N^j\}$によって識別して$DLP(H_i, N^j, U^j)$で表わすこととする。

ここで，つけ値関数が効用水準に関する項と立地点特性に関する項とに加法分離しうる関数であると仮定すると、式(1)〜(4)に示す問題の解は住宅立地均衡解となり、式(2)に対応する双対変数の値$\hat{R}_i$は均衡地代を与える[10]。式(3)に対応する双対変数の値を$\hat{Q}^j$とし、均衡効用水準をU^{*j}で表わすと、次式を得る。

$$\Phi_i^j(U^{*j}) = \Phi_i^j(U^j) + \hat{Q}^j \qquad (5)$$

$$\hat{R}_i = \max\left\{ \max_j \Phi_i^j(U^{*j}),\ 0 \right\} \qquad (6)$$

(2)確率的つけ値地代関数

住宅立地LPモデルの解は，少数の特定の地区に集中した立地パターンを示すが，現実の立地パターンはLP解に比べて広範囲に分布したパターンを示す。その原因としては，個々人の最適化行動そのものに対する不確実性，情報の不完全性，世帯特性や地域特性の集計化によるばらつき等があげられている[4]。ここでは，効用最大化行動や情報については問題はないと仮定し，集計化に伴うばらつきのためにつけ値が確率変数として扱われる場合を取りあげる。

住宅需要世帯jの地区iに対するつけ値地代関数$\Phi_i^j(U^j)$を次式のように確定項$\psi^j(Z_i, U^j)$と確率変数項ε^jの和で表わす。なお，Z_iは、地区iの地区特性ベクトルである。

$$\Phi_i^j(U^j) = \psi^j(Z_i, U^j) + \varepsilon^j \qquad (7)$$

次に、$\psi^j(Z_i, U^j)$は，次式のように線形関数で与えられると仮定する。

$$\psi^j(Z_i, U^j) = \beta_0(U^j) + \sum_k \beta_k^j Z_{ik} \qquad (8)$$

ここで，$\beta^0(U^j)$は効用水準にのみ関係する項，Z_{ik}は地区iの地区特性kの指標値，β_k^jは世帯jの地区特性kに関するつけ値関数のパラメーター

いま、ε^jがパラメーター$(0, \omega)$を持つIIGD (Independently Identified Gumbel Distribution)であるとすると，次式に示すLerman and Kern[11]のロジットモデルによって，地区特性Z_iのもとで、地代がR_iとなり、かつ世帯タイプjの世帯が立地する確率$P(j R_i \mid Z_i)$が表わされる。

$$P(j R_i \mid Z_i) = \frac{\omega e^{-\omega(R_i - \psi^j(Z_i, U^j) - \ln N^j)}}{\exp\left\{\sum_j e^{-\omega(R_i - \psi^j(Z_i, U^j) - \ln N^j)}\right\}} \qquad (9)$$

この式を用いて式(8)のパラメーターの値を推定できるが，推定に際して効用水準U^jを特定化できないため、$\beta_0(U^j)$の推定値はU^jを含んだまま．定数の形で得られる。この値をb_0^jとすると,推定したつけ値関数式$\hat{\varphi}^j(Z_i, U^j)$は次式で表わされる。

$$\hat{\varphi}^j(Z_i, U^j) = b_0^j + \sum_k b_k^j Z_{ik} \qquad (10)$$

ここで,b_k^jはパラメーターβ_k^jの推定値

(3)ハイブリッドモデルの考え方と手順

式(9)より、もしも将来のR_iおよび$\varphi^j(Z_i, U^j)$の値を知ることができれば，将来の$P(j, R_i|Z_i)$の値を知ることができ、立地分布の推定が可能になる。

しかしながら、将来のつけ値関数として式(10)を用いることはできない。なぜならば、b_0^jの値は$\beta_0(U^j)$の推定値であり、現在の均衡効用水準を反映，いいかえれば現在の需給条件のもとで得られる値にすぎないからである。将来の需要量，供給量が空間的にも量的にも変化すれば，将来の均衡効用水準$U^{*j}(j=1,\cdots,m)$の値はそれらを反映して定まるはずであり、つけ値関数の定数項は，それに応じて決まるものである。

ところで、式(1)〜(4)に示した決定論的モデルでは，式(8)のようなつけ値関数を用いると，式(5)によりただちに立地均衡時のつけ値関数を知ることができる。そこで、将来の需要世帯数の分布$\{\tilde{N}^j\}$と住宅戸数の分布$\{\tilde{H}_i\}$が与えられたとき，式(9)の$\hat{\varphi}^j(Z_i, U^j)$を$\Phi^j(U^j)$のかわりに代入して$DLP(\tilde{H}_i, \tilde{N}^j, U^j)$を解くと，式(5)と同様な次式を得る。

$$\hat{\varphi}^j(Z_i, \tilde{U}^{*j}) = b_0^j + \tilde{Q}^j + \sum b_k^j Z_{ik} \quad (11)$$

$$R_i^* = \max\left\{\max_j \hat{\varphi}^j(Z_i, \tilde{U}^{*j}), 0\right\} \qquad (12)$$

ここで、R_i^*, $\tilde{Q}^j$は，この場合の戸数制約式(2)，世帯数制約式(3)にそれぞれ対応する双対変数の値であり、$\tilde{U}^{*j}$は、均衡効用水準である。

次に、立地均衡時のつけ値関数が，式(11)に示す確定項とパラメーター(0, ω)のＩＩＧＤ特性を持つかく乱項との和で表わされると考え，式(11), (12)の$\hat{\varphi}^j(Z_i, U^{*j})$, R_i^*を式(9)の右辺に代入した場合の左辺の値を$P(j, R_i^*|Z_i)$で表わす。この値は確率密度になっているので，改めて次式で，均衡効用水準ベクトル$\tilde{U}^*$ ($\tilde{U}^* = (\tilde{U}^{*1}, \cdots, \tilde{U}^{*m})$)のもとで地区$i$に世帯タイプ$j$が立地する確率$P(j|Z_i, \tilde{U}^*)$を定義する。なお，次式は世帯属性グループの立地を示しており、各世帯総数N^jのウエイト和で表わされている。

$$P(j|Z_i, \tilde{U}^*) = \frac{P(j, R_i^*|Z_i)}{\sum_j P(j, R_i^*|Z_i)} = \frac{e^{\omega \hat{\varphi}^j(Z_i, \tilde{U}^{*j}) + \ln N^j}}{\sum_j e^{\omega \hat{\varphi}^j(Z_i, \tilde{U}^{*j}) + \ln N^j}} \qquad (13)$$

つまり、この確率が将来の立地配分パターンの性格を決定づけるものである。なお、式(13)は地区iに居住する世帯総数に対する割合を示しているため、立地世帯数は地区iの居住世帯総数と$P(j|Z_i, U^*)$との積で表わされる。

ところで、このハイブリッドモデルでは均衡価格が$DLP(\tilde{H}_i, \tilde{N}^j, U^j)$によって支持されているため、求めるべき立地世帯数をy_i^{*j}としたとき，地区iの居住世帯総数はLP問題の最適条件、すなわち次式を満足しなければならない。

$$(\tilde{H}_i - \sum_j y_i^{*j}) R_i^* = 0 \qquad (14)$$

そこで、$DLP(\tilde{H}_i, \tilde{N}^j, U^j)$の解を$\hat{y}_i^j$としたとき，$y_i^{*j}$の第1次推定値$y_i^{*j}(1)$を次式で表わすこととする。

$$y_i^{*j}(1) = P(j|Z_i, \tilde{U}^*) \sum_j \hat{y}_i^j \qquad (15)$$

ここで、式(15)の左辺を第1次推定値とした理由は、この値は、jに関する総和が$\tilde{H}_i$以下であるという条件を必ず満たすものの，iに関する総和が$\tilde{N}^j$に等しいという条件を必ずしも満たさないためである。したがって、これらの条件を満たすような反復収束計算を行ない，その結果をy_i^{*j}の値とする。

以上が、筆者らの提案したハイブリッドモデルの概要である。松山都市圏でこのモデルの簡単な適用を試みたが、フローデータ（近年の住宅立地世帯のみを対象）に対して相関係数0.7〜0.8の結果を得ており、現状再現性についてはさほど悪くはないと考えられる。なお、図−1に計算手順を示す。

4. モデルの問題点

ここではモデルの理論的側面についてのみ問題点の考察を行なう。

最大の問題点は、均衡立地世帯数の計算がロジットモデルを用いて確率的に行なわれているのに対して、価格システムは決定論的なLPモデルに依拠し

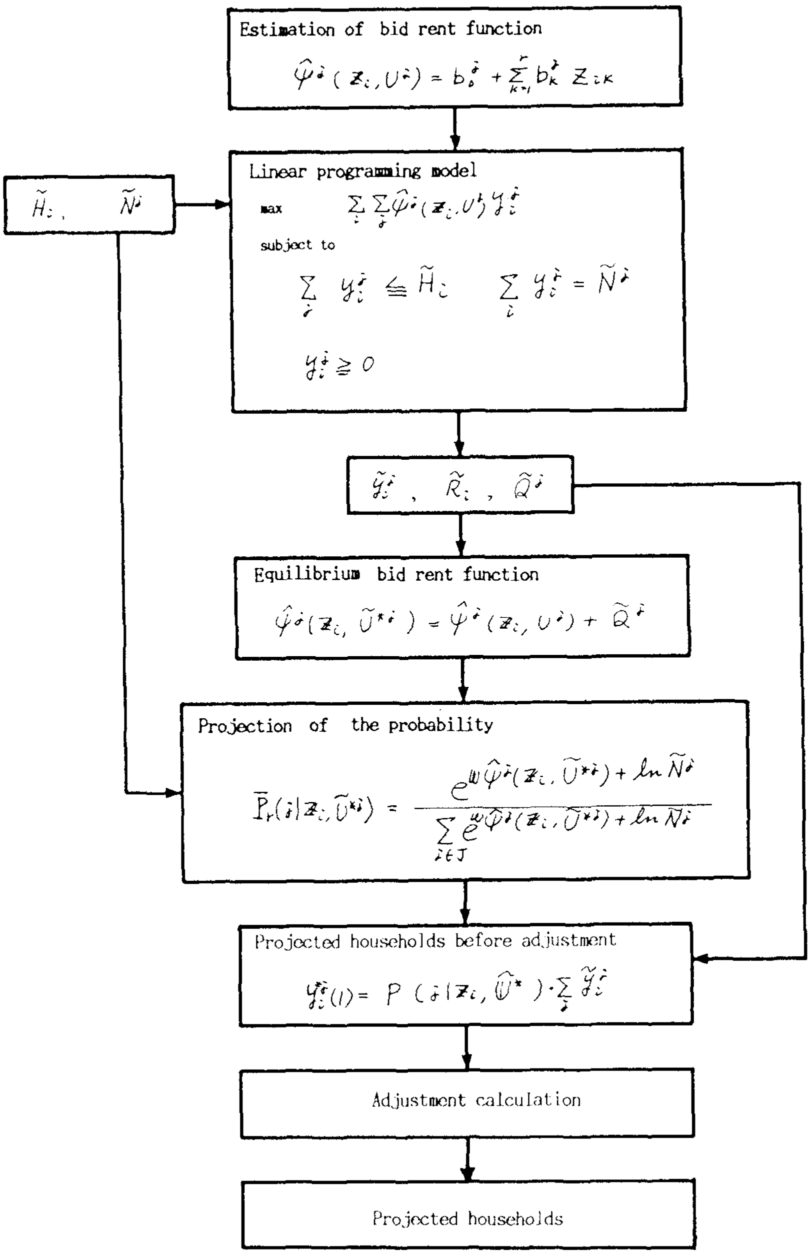

図-1 ハイブリッドモデルの計算手順

ており、立地世帯数と価格システムに斉合性がないのではないかという点である。ネットワーク理論との対応で言えば、均衡時のリンク走行時間とリンク交通量との決定が、相互に関連のある形で決められてはいるものの、走行時間に対応する交通量と配分交通量との斉合性が保証されていない場合にあたると考えられる。

概念的に言えば、$DLP(H_i, N^k, U^k)$と同じわく組みのなかで、変数が確率変数であるような確率的LPモデルを設けて立地均衡を考えれば良いということとなるが、これは難問である。この点に関する既存のアプローチとしては、エントロピーモデルがある。この点については、5で考察する。

ハイブリッドモデルのもうひとつの問題点は立地配分法の特異性である。このモデルでは、価格の値をDLPの価格システムに依存しているため、解は式(14)の条件式を必ず満たさねばならない。つまり、地区iの立地世帯総数は常にDLPの解に一致せねばならず、ロジットモデルによる立地配分に先立って立地世帯総数の値が決まっているという、いささか奇異な感覚を与えている。

この問題を取り除く方法として考えられるひとつのアプローチは、均衡つけ値を用いて、ある世帯がどの地区に立地するかを表わす確率を計算する方法である。Griggs[8]の研究はこの方法によるものであり、ロジットモデルで表わされる世帯タイプ別立地地区選択確率にタイプ別世帯数をかけた値が立地世帯数として算出される。しかしながら、この場合には、各地区で計算された世帯総数と住宅戸数とが一致しないので、両者を一致させるための調整計算が必要となる。このとき、解がどの地区において住宅戸数制約式(2)の等式条件を満たし、どの地区でこの制約式が不等式となるのかは前もって決められてはいない。従って、解はこの調整計算によって左右されることになる。もちろん、調整計算による修正量は、ロジットモデルでの計算値に比べて小さいと考えられるが、立地均衡解は式(14)に示す均衡条件を満たさねばならないため、微少であるべき調整計算によって均衡価格は大きく変動することがある。その結果立地世帯のつけ値は非負であるにもかかわらず、均衡条件式(14)から得られる均衡地代は0となる地区が生じる。

このように、ハイブリッドモデルの配分法は奇異ではあるが、現時点では均衡時の価格システムを保持するためのやむを得ない処置となっている。

ここで、Anas[9]の研究にふれておく。そこでは価格は確定変数として扱われ、需要量と供給量とが確率変数で表わされている。均衡条件式は需要量と供給量との期待値が一致することを示す式で示されており、供給モデルを内挖しているため、需給量の一致はすべての地区で成立している。Anasのモデルの問題点は、彼の均衡条件式の存在の可能性である。すなわち、2つの独立な確率変数の期待値が一致することは、ほとんどまれにしか生じないからである。

5. エントロピーモデル

式(10)に示したつけ値関数を用いたエントロピー住宅立地配分モデルを次式のように定式化する

$$\max\left(-\sum_{ik} y_i^k \ln y_i^k\right) \tag{16}$$

s.t.

$$\sum_{ik} y_i^k \hat{\varphi}_i^k(U^k) = V \tag{17}$$

式(2), (3), (4)

ここで、VはLP問題の解（$\hat{\varphi}_i^k(U^k)$を式(1)の$\bar{\varphi}_i^k(U^k)$の代わりに用いた場合に式(1)〜(4)で構成されるLP問題の解）に対する目的関数値よりも小さい任意の数であり、suboptimal valueと呼ばれている。

式(17),(2),(3)に対する双対変数の値をμ, λ_i, λ^kとすると、ラグランジェ関数は次式で表わされる。

$$-\sum_{ik} y_i^k \ln y_i^k + \sum_i \lambda_i\left(H_i - \sum_k y_i^k\right) + \sum_k \lambda^k\left(\sum_i y_i^k - N^k\right) + \mu\left(\sum_{ik} y_i^k \hat{\varphi}_i^k(U^k) - V\right) \tag{18}$$

確率的配分モデルではすべてのikの組について非負の解が考えられるので、次式が成立する[7]。

$$\ln y_i^k = -1 - \lambda_i + \lambda^k + \mu \hat{\varphi}_i^k(U^k) \tag{19}$$

したがって、地区iの立地世帯総数に対する世帯タイプkの世帯数の割合は、次式で示される。

$$\frac{y_i^k}{\sum_k y_i^k} = \frac{e^{\mu \hat{\varphi}_i^k(U^k) + \lambda^k}}{\sum_k e^{\mu \hat{\varphi}_i^k(U^k) + \lambda^k}} \tag{20}$$

ここで、式(3)が成立していることを考慮すると、式(20)の分子は次式で表わされる。

$$e^{\mu\hat{\varphi}_i^j(U^j)+\lambda_j} = \frac{1}{N^j e^{-\lambda_j}}\, e^{\mu\hat{\varphi}_i^j(U^j)+\ln N^j} \qquad (21)$$

そこで、$N^j e^{-\lambda_j}$ が j にかかわらず一定であるならば、μ と ω の相違を除いて式(13)と式(20)とは同形式の式となる。

ところで、式(19)は、次式の目的関数と式(2),(3),(4)の制約条件式とで構成される非線形計画問題からも導くことができる。[12]

$$\max\; -\sum_{ij}\frac{1}{\mu}\, y_i^j \ln y_i^j + \sum_{ij}\hat{\varphi}_i^j(U^j)\, y_i^j \qquad (22)$$

このことから、μ はLPの目的関数とエントロピー項とのウェイトを表わしており、μ の値が小さいほどより拡散したパターンを、大きいほどLP解に近い立地パターンを生じる。一方、式(13)の ω は、Gumbel分布の偏差に関係したパラメーターであり、ω の値が小さいほどLP解に近い立地パターンを、大きいほどより拡散した立地パターンを示すと考えられる。すなわち、ω と μ とは逆数的関係にある。なお、Grigg[8]は彼のロジット形配分モデルのパラメーター（ω に相当）とエントロピーモデルの μ とが一致することを示している[8]が、そこで述べられている両モデルの関係は、筆者にとっては不明確と考えられる。

6. おわりに

本論文では、筆者らが提案したハイブリッドモデルを題材として住宅立地の確率的均衡配分理論に関する考察を行なった。

一般にLPモデルは理論的研究の範囲内では優れた特性を持っているが、何らかの分布ないしは拡散的機構を設けなければ、ごく基本的な特性を除いて現実の姿に良く似た解を示すことはできない。このハイブリッドモデルは、LP解を現実の立地パターンに近づける機構としてロジットモデルを用いたものである。同様な意図を持つモデルは、Grigg[8], Anas[4]の研究やエントロピーモデル[7]に見られるが、ハイブリッドモデルはそれらに比べて計算が簡単な点に特徴がある。しかしながら、ハイブリッドモデルを構成しているLPモデルとロジットモデルとの斉合性には疑問が残されている。今後は、エントロピーモデルとの関係もふまえて、LPモデルとロジットモデルとの関係をより一層考察したい。なお、本論文での議論の焦点である確率的均衡立地配分問題は、住宅立地、交通量配分の両分野に共通した研究課題と考えられる。今後、交通量配分理論の専門家からも有益な御教示が得られれば幸である。

本論文は、太平洋地域学会での発表および討論に基づいて考察したものであり、その際、有益なコメントをいただいたペンシルベニア大学T.E.Smith教授、藤田昌久準教授、名古屋大学河上省吾教授、岐阜大学森杉寿芳教授に感謝の意を表したい。

参考文献

1) Anas A, The Combined Equilibrium of Travel Networks and Residential Location Markets, Regional Science and Urban Economics,15, 1985, pp1-21.
2) Boyce D E, A Framework for Constructing Network Equilibrium Models of Urban Location, Transportation Science, vol.14,No.1, 1980, pp77-96.
3) Daganzo C F and Sheffi Y, On Stochastic Models of Traffic Assignment, Transportation Science, vol.11,No.3, 1977, pp253-274.
4) Anas A, Residential Location Markets and Urban Transportation, Academic Press, 1982.
5) Kashiwadani M and Ogura M, A Hybrid Multinomial Logit and Linear Programming Model for Residential Location Projection, 9th Pacific Regional Science Conference 1985.
6) Harris B, Linear Programming and the Projection of Land Uses, Penn Jersey Transportation Study, Paper No.20, Philadelphia, 1962.
7) Senior M L and Wilson A G, Explorations and Syntheses of Linear Programming and Spatial Interaction Models of Residential Solution, Geographical Analysis, 6, 1974, pp209-238.
8) Grigg T J, Probabilistic versions of the short-run Herbert-Stevens model, Environment and planning A, 16, 1984, pp715-732.
9) Ingram G K, Kain J F and Ginn J R, The Detroit Prototype of the NBER Urban Simulation Model, National Bureau of Economic Reserch, 1972.
10) 藤田昌久，柏谷増男，住宅立地論へのプログラミングアプローチ，地域学研究，5，昭和51年 pp107-134.
11) Lerman S R and Kern C R, Hedonic Theory, Bid Rents and Willingness to Pay: Some Extentions of Ellickson's Results, J. Urban Economics,9, 1983, pp358-363.
12) Coelho J D, Williams HCWL and Wilson A G, Entropy-maximizing submodels within overall mathematical programming frameworks: correction, Geographical Analysis, 10, 1978, pp195-201.