【土木計画学研究・講演集 No.8 1986年1月】

分布-配分同時決定問題を制約条件としてもつ最適道路網形成問題

An Optimal Road Network Design Problem Constrained by A Combined Trip Distribution/Assignment Problem

朝 倉 康 夫*
By Yasuo ASAKURA

Previous studies on optimal network design assume that the origin destination travel demand is fixed. The author relax this assumption and formulate an optimal road network design problem constrained by a combined trip distribution/assignment problem. The structure of the proposed problem is two level optimizing problem, which is interpretted as the Stackelberg Game. The leader and the follower correspond to the network planner and user respectively. A heuristic input-output solution algorithm is proposed and a numerical example is executed for hypothetical conditions in order to test both the convergence of the algorithm and several numerical characteristics of the problem.

1． はじめに

従来の最適交通網計画問題は、与えられた交通需要の下での最適な交通網を求める問題がほとんどであったといってよい。ここでいう交通需要とは、一般にOD分布レベルの交通需要である。したがって従来の問題は、所与のOD分布交通量に対して、ある最適性の基準を最大あるいは最小にする交通ネットワークの形状あるいは容量を決定する問題であるといえる。OD交通量が与えられているということは、交通網の計画時点における将来のOD交通量が何らかの方法により知られており、交通網の整備、改良が実行されても、あらかじめ与えられたOD分布パターンは変化しないと仮定していることに他ならない。

一般に、将来のOD分布交通量の予測値を得るためには、土地利用指標などの関数として得られる各ゾーンの発生・集中交通量と、将来のゾーン間の交通サービスの水準（最も単純にいえば、ゾーン間所要時間）の予測値が必要である。（もちろん、現在のODパターンの影響を反映させるために、予測のための情報として現在のODパターンを用いることもある。）将来のネットワークが与えられているという条件でも、ゾーン間所要時間を設定することは簡単な問題ではないのに、交通網形成問題ではネットワークが与えられていない状態で将来のサービスレベルの値を推定しなければならないという難しい局面を持つ。OD分布交通量を推定するために、将来ネットワークを仮想的に与えてサービスレベルを設定したとしても、その値と結果的に得られた交通網上でのネットワーク均衡流が与える交通サービスレベルは異っているであろうからその相違をどのように解釈すればよいかという問題も残る。さらに、交通網の改良を実施すれば、それに応じて交通需要はシフトすると考えられるから、交通網形成問題に

* 正会員 工修 京都大学助手 工学部交通土木工学科
（〒606 京都市左京区吉田本町）

おいてあらかじめ与えられたＯＤ分布交通量を固定的に扱うことにも問題があろう。

ＯＤ分布レベルでの交通需要の弾力性を、交通網形成問題に取り込むためには、ＯＤ分布交通量の決定を内生化する方法をとればよい。つまり、発生および集中交通量のみをモデルへのインプット変数とするように、従来の方法を改良すればよい。

さて、最適交通網形成問題においてＯＤ分布交通量を内生的に決定しようとする方法は、朝倉(1984)によって試みられている。その方法は、システム最適交通流を仮定するDantigらによるモデル(1979)とＯＤ分布パターを決定するための重力モデル的エントロピ法の結合による方法である。しかし、この方法では、最適ネットワーク問題からアウトプットされるネットワーク配分フローと、重力モデル的エントロピ法によって決定されるＯＤフローの整合性に問題が残った。すなわち与えられたＯＤに対するネットワークフロー（配分フロー）は、システム最適フローであるのに対し、ＯＤフローは現象を記述するフローであるという点である。

一方、交通サービスの供給者はネットワークの形態や容量を決定することはできても、交通ネットワークフローを直接コントロールすることはできないという前提の下で、朝倉(1985)はＯＤ分布交通量が所与の場合の最適道路網計画問題を２レベル計画問題として提案した。この問題では、ネットワークフローを記述するための等時間配分問題が最適道路網計画問題の制約条件（下位問題）として組み込まれており、最適化問題を制約条件とするシステム最適化問題のフレームを持っている。この方法において提案された２レベル計画問題の枠組みを用いて、ＯＤ分布交通量を内生的に決定する問題へと拡張するためのひとつの魅力的な方法は、ＯＤ分布交通量と配分交通量を同時に決定する問題、いわゆる分布－配分同時決定問題を下位問題とする方法である。

本研究では、分布－配分同時決定問題を制約条件とする最適道路網形成問題を定式化し、その解法、とくに近似解法について述べる。さらに、簡単な数値計算例を通して、問題の数値的特性を明らかにする。

２．問題の定式化

2.1. OD需要固定型の場合

交通サービスの供給者の意志決定変数が連続変数であるとしたときの最適道路網形成問題のうち、ＯＤ需要が固定的であり、ネットワークフローがネットワーク均衡流であるという条件を満足する問題は２レベル計画問題の枠組を用いて定式化できることが知られている。たとえば、計画者の目的が、リンクフローとリンク容量の関数として定義されるリンク費用をネットワーク全体で最小化するように各リンクの容量を決定することにあり、そのときの制約条件が、総建設費用の制約および意志決定変数であるリンク容量の非負条件である場合の問題は、次のように定式化できる。

(P1)

$$\min \quad \sum_a Fa(Va,Za) \tag{1.a}$$

s.t.

$$\sum_a Ga(Za) \leq G \tag{1.b}$$

$$Za \geqq 0 \tag{1.c}$$

$$\min \quad \sum_a \int_0^{Va} Sa(x,\ Za)\, dx \tag{1.d}$$

s.t.

$$\sum_m hmij = Tij \tag{1.e}$$

$$Va = \sum_m \sum_i \sum_j damij\ hmij \tag{1.f}$$

$$hmij \geqq 0 \tag{1.g}$$

ここに、変数の意味は、つぎのとおりである。

Va ； リンク a のフロー

Za ； リンク a の容量

hmij ； ODペアi,j 間のパス m のフロー

Tij ； ODペアi,j 間のODフロー

damij ; = 1 if ODペアi,j 間のパス m がリンク aを通るとき

= 0 otherwise

Fa(Va,Za) ； リンクフローとリンク容量により定義されるリンク a の費用関数

Ga(Za) ； リンク a の建設費用関数

G ; ネットワーク全体の建設費用の上限値
Sa(x,Za) ;リンク a の走行時間関数

2.2. OD需要が固定されない場合

交通サービスの供給者は、ネットワークの形状、容量を決定することはできるが、ネットワークフローそのものを直接決定できず、ネットワークフローはネットワーク利用者の選択行動の結果であるという現実的な仮定に基づいた2 レベル計画問題のフレームを用いて、OD需要が固定的でない場合の問題を定式化するためには、下位問題はネットワークフローを記述する問題でなければならない。交通サービス供給者の意志決定変数と行動仮説は、需要を固定的に扱う場合と変らないと仮定すれば、ODフローの決定を内生化したネットワーク形成問題はOD固定型のネットワーク形成問題（P1）の下位問題である等時間配分問題をネットワーク均衡問題としての分布配分同時決定問題により、置換えた問題として定式化することができる。すなわち、

(P2)

$$\min \quad \sum_a Fa(Va,Za) \qquad (2.a)$$

s.t.

$$\sum_a Ga(Za) \leq G \qquad (2.b)$$

$$Za \geq 0 \qquad (2.c)$$

$$\min \quad \sum_a \int_0^{Va} Sa(x,\ Za)\,dx - \sum_i \sum_j \int_0^{Tij} Wij(y)\,dy \qquad (2.d)$$

s.t.

$$\sum_m hmij = Tij \qquad (2.e)$$

$$Va = \sum_m \sum_i \sum_j damij\ hmij \qquad (2.f)$$

$$\sum_j Tij = Oi \qquad (2.g)$$

$$\sum_i Tij = Dj \qquad (2.h)$$

$$hmij \geq 0 \qquad (2.i)$$

$$Tij \geq 0 \qquad (2.j)$$

ここに、
Wij(y) ; ODペアi,j の需要関数の逆関数
Oi ; ゾーンi からの発生交通量
Dj ; ゾーンj への集中交通量
である。

なお、ここでは、容量Zaに関する制約は、非負制約としたが、Zaの上限値と下限値が制約条件である場合についても問題の本質的な部分は変らない。

2.3.問題の解釈

この問題が、2レベル計画問題のうち、交通サービスの供給者をleader、利用者をfollowerとするStackelberg 問題であることは、先のOD需要固定型の場合と同様である。需要固定型の問題と比較したとき、leaderの意志決定変数、目的関数、制約条件は変らないが、下位問題が、配分問題から分布、配分同時決定問題へと変更されたので、followerに関する条件はそれぞれ拡大されている。すなわち、followerの意志決定変数は、ODフローとパスフローであり、それらに関する制約条件は、式 2.e～式 2.j によって与えられている。

なお、followerの行動を規定する目的関数についてはそのものが持つ意味を積極的に解釈するよりもむしろ目的関数をこのように設定すれば、ネットワーク均衡条件を満足するネットワークフローの記述ができるという点が重要であろう。 また、定式化の段階においては、関数 Fa(Va,Za) , Sa(x,Za) , Ga(Za) およびWij(y)の関数形を必ずしも特定化する必要はない。

ここに定式化した問題の特徴は、

①交通サービス供給者の意志決定変数であるネットワークの各リンクの容量をアウトプットするだけでなく、そのネットワーク上における利用者の行動結果であるネットワークフロー（ODフロー、配分フロー）を同時にアウトプットできる。

②将来のOD交通需要を内生的に決定できるので、需要固定型の場合の問題点であったサービスレベルのズレ（ODの予測プロセスで仮定したサービスレベルとネットワーク整備後のサービスレベルのズレ）が生じない。

③解法の制約を受けない限り、交通サービス供給者の目的関数、建設費用関数、走行時間関数、OD需

要関数をオプショナルに選ぶことができる。

④土地利用指標から直接導出されることの多い発生集中交通量を与えるということは、将来の土地利用指標を与件としているということとほぼ等価である。したがって、土地利用計画のフレームから得られる土地利用のパターンが与えられたとき、ある評価視点から見て、その土地利用に最も整合したネットワークを求めることができる。

3 問題の解法

3.1.厳密解法

需要変動型の最適ネットワーク形成問題の厳密解法は、需要固定型の場合と同様にStackelberg 問題を解くためのいくつかの解法を適用することができる。すなわち、

①下位問題をその必要十分条件により置き換えて、もとの問題を非線形制約つきの最適化問題に変換し、さらにそれを制約なしの最適化問題に変換して解く方法。この方法は、河上、溝上(1985)により、最適バスネットワーク問題の解法として提案されている。

②下位問題を変分不等式によって記述し、さらに、上位問題との組み合せによる鞍点問題に帰着させる方法。この方法は、Fisk(1984)により、最適信号ネットワークのパラメータ決定問題の解法として提案されている。

③下位問題の制約条件をペナルティ関数により下位問題の目的関数に組み入れて下位問題を制約なしの問題に変換し、それを用いて上位問題の目的関数と制約条件の勾配を計算し、最急降下法あるいは許容方向法を用いる方法。　この方法は、志水(1982)により、Stackelberg 問題の一般的解法として提案された方法である。

である。

これらの厳密解法は、理論的には需要変動型の問題にもそのまま適用できると考えられるが、解のアルゴリズムの複雑さと計算時間などを考慮すれば、変数と制約条件の数がきわめて多い実用的な場合には必ずしも有効な方法ではないであろう。むしろ、厳密な解を与えることは必ずしも保証できないが、解法の単純さから、つぎに述べる近似解法が現実的であろう。

3.2.近似解法

近似解法とは、上位問題と下位問題を切り離し、それぞれの解を相互に交換することにより、もとの問題の解を得ようとする方法である。

交通サービス供給者の意志決定がなされた後は、すなわち、各リンクの容量$\{Za^*\}$が与えられれば、下位問題である分布、配分同時決定問題を解くことは容易である。また、下位問題を上位問題との関連において眺めたとき、下位問題のアウトプットとして必要であるのは、リンクフローのみであって、パスフローは必要ではない。下位問題はリンクフローおよびODフローに関して一意に解けるから、たとえば、Evans の方法によりこの問題を解けばよい。

一方、与えられたリンクフロー$\{Va^*\}$に対して上位問題を解くためにはつぎのような変換を施せばよい。

まず、乗数ξを用いて、建設費制約を目的関数に取り込み、上位問題を個々のリンクに対する容量制約以外の制約がない問題

$$\min \sum_a Fa(Va^*,Za) + \xi \sum_a Ga(Za) \qquad (3.a)$$

$$\text{s.t.} \quad Za \geqq 0 \qquad (3.b)$$

に変換する。つぎに、変換された問題を個々のリンクごとの最適化問題

$$\min \quad Fa(Va^*,Za) + \xi\ Ga(Za) \qquad (4.a)$$

$$\text{s.t.} \quad Za \geqq 0 \qquad (4.b)$$

に分解し、各リンクの容量$\{Za'\}$を求める。

一般に、$\{Za'\}$が建設費の上限に十分近いとき、目的関数は最小となるから、

$$0 \leqq \{G - \sum_a Ga(Za')\} \leqq \epsilon \qquad (5)$$

をであるならば、終了。そうでなければξの値を修正して、この条件が満足されるまで、この手順をくりかえす。修正の方法としては、ξを小さくするに

つれて $\sum_a$ Ga(Za) が大きくなる特性を利用し、十分大きな値をもつξからスタートし、順次それを小さくする方法をとればよいであろう。すなわち、建設費用制約内から $\sum_a$ Ga(Za) をG に近づけていくのである。

上位問題を解くためのこの方法はきわめて容易であるが、個々のリンクに分解したときの解が一意に決定できない場合は有効な方法ではない。したがって、この方法を用いるために関数 Fa(Va,Za)および Ga(Za) の関数形に制約が生じることは避けられない。

以上をまとめると、需要変動の場合の最適ネットワークデザイン問題を解くときのアルゴリズムは、つぎのように書くことができる。

step.1

{ Za }の初期値{ Za^1 }を与える。ただし、{ Za^1 }は、制約条件

$$\sum_a Ga(Za^1) \leqq G \qquad (6.a)$$

$$Za^1 \geqq 0 \qquad (6.b)$$

を満足することが必要である。
くりかえし回数ℓ = 1とおく。

step.2

{ Za^ℓ }に対し下位問題を解き、リンクフロー{ Va^ℓ }を得る。

step.3

建設費制約を目的関数に組みいれるための乗数ξの値を設定し、各リンクごとに

$$\min \quad Fa(Va^\ell, Za) + \xi \ Ga(Za) \qquad (7.a)$$

s.t.

$$Za \geqq 0 \qquad (7.b)$$

を解く。解を{ $\grave{Za}$ }とする。

step.4

$$0 \leqq \{ G - \sum Ga(\grave{Za}) \} \leqq \epsilon \qquad (8)$$

であるならば、step.5 へ。そうでなければ、ξの値を修正して、step.3へ。

step.5

$$\sum | Za^\ell - \grave{Za} | \leqq \epsilon' \qquad (9)$$

であるならば終了。そうでなければ、

$$Za^{\ell+1} = \grave{Za} \ , \ell = \ell + 1 \qquad (10)$$

とおいて、step.2へ。

ここに、ε, ε' は十分小さい適当な正数である。

具体例を用いて、step.3を示せば次のようになる。

$$Fa(Va,Za) = Sa(Va,Za)\ Va \quad \text{(総走行時間)} \qquad (11)$$

$$Sa(Va,Za) = ta \{ 1 + r (Va/ (Ca + Za))^k \} \quad \text{(BPR関数)} \qquad (12)$$

ここに、Caは、既存容量

$$Ga(Za) = ga\ Za \qquad (13)$$

ここに、gaは、単位容量あたり建設費用

のとき、

$$\frac{\partial^2}{\partial Za^2}[Fa(Va^\ell, Za) + \xi \ Ga(Za)] > 0 \qquad (14)$$

であるから、

$$\frac{\partial}{\partial Za}[Fa(Va^\ell, Za) + \xi \ Ga(Za)] = 0 \qquad (15)$$

より、

$$Za = \phi a^{-1}\ Va^\ell - Ca \quad \text{for } Va^\ell > \phi a\ Ca \qquad (16.a)$$

$$= 0 \quad \text{for} \quad \phi a\ Ca \geqq Va^\ell \geqq 0 \qquad (16.b)$$

である。なお、

$$\phi a = (k\ r\ ta / \xi\ ga)^{1/(k+1)} \qquad (17)$$

である。

3.3.下位問題の解法

分布、配分同時決定問題を解くための方法のうち著名な方法は、Frank-Wolfe 法の直接的な適用であるFlorian の方法(1975)と目的関数の部分線形近似を応用したEvans(1976) の方法であろう。Florian の方法とEvans の方法を比較した場合、両者はともに下降方向探索問題と最適ステップ幅決定のための一次元探索問題の繰返しによるアルゴリズムであるという点で共通した枠組を持つ。両者の相違は、下降方向探索の方法にある。すなわち、方向探索問題が、Florian の方法ではHitchcook の輸送問題であるのに対し、Evans の方法では二重制約つきのOD分布推計問題を解くことに帰着されている。したがって、ODフローの安定性の面から見れば、Evans の方法のほうがより安定した解が得られるものと思われる。また、数値計算により、両者のアルゴリズムを比較したLeblanc & Farhangian(1981)の研究によれば、Evans のアルゴリズムほうが収束が早いとされている。そこで、本研究では、下位問題の解法としては、Evans の方法を用いる。

4．数値計算例

4.1. 前提条件

数値計算において用いた Fa(Va,Za), Sa(Va,Za) Ga(Za) の関数形は、それぞれ、(11),(12),(13)式と仮定した。BPR 関数のパラメータであるk,r の値はそれぞれ、k=5,r=2.62とした。また、需要関数は

$$D_{ij}(t_{ij}) = \exp(-\gamma \ t_{ij}) \tag{18}$$

とした。このとき、下位問題の目的関数第 2 項は

$$1/\gamma \sum_{i} \sum_{j} T_{ij}(\ln T_{ij} - 1) \tag{19}$$

となる。

この計算においては、既存ネットワークの各リンクの拡幅を対象とした。既存ネットワークの形状を図－1に、各リンクの属性を表－1に示す。交通発生ノードはノード1,2,3 であり、集中ノードはノード4,5,6 である。発生交通量 O =(9000,5000,2000) 集中交通量 D =(2000,6000,8000)、 総建設費用 G= 5 X 10 ^{9} (円) 、距離抵抗パラメータγ = 0.1

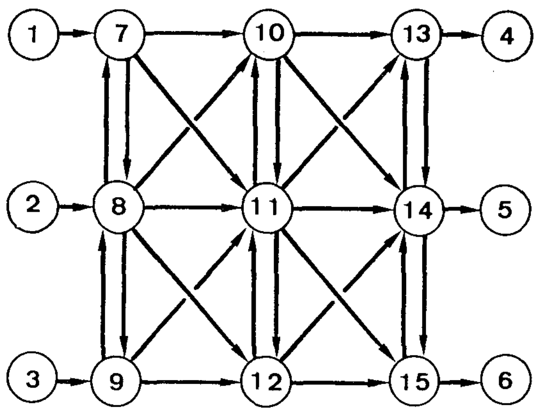


図 －1　数値計算対象ネットワーク

表－1　リンクデータ

リンク番号	始点ノード	終点ノード	Ta (分)	Ca (台／日)	Ga (円／台／日)
1	1	7	2	100000	*
2	7	10	7	3000	350000
3	10	13	5	2000	210000
4	13	4	3	100000	*
5	8	7	3	6000	140000
6	7	8	6	7000	280000
7	7	11	15	2000	700000
8	8	10	13	4000	840000
9	11	10	5	3000	210000
10	10	11	9	6000	420000
11	10	14	13	5000	770000
12	11	13	11	3000	630000
13	14	13	5	2000	140000
14	13	14	7	6000	490000
15	2	8	3	100000	*
16	8	11	6	2000	280000
17	11	14	6	3000	210000
18	14	5	2	100000	*
19	9	8	7	6000	420000
20	8	9	4	2000	140000
21	8	12	10	4000	560000
22	9	11	12	5000	630000
23	12	11	5	3000	210000
24	11	12	4	7000	210000
25	11	15	15	3000	770000
26	12	14	10	6000	700000
27	15	14	5	2000	280000
28	14	15	7	4000	350000
29	3	9	3	100000	*
30	9	12	3	3000	140000
31	12	15	10	2000	490000
32	15	6	3	100000	*

Gaの欄の * は、改良対象リンクでないことを示す。

の諸量を設定し、目的関数の収束、アウトプットされる変数の値を検討した。

なお、問題の収束判定基準は次のとおりである。

①建設費用制約と建設費用との差、(8) 式の ε の値は G x 0.01 。

②下位問題のくりかえし回数の上限は、10回。

③下位問題の下降方向探索のためのバランシングファクター法の精度は、1%

④下位問題の一次元探索（ 黄金分割法 ）の分割比の精度は1%

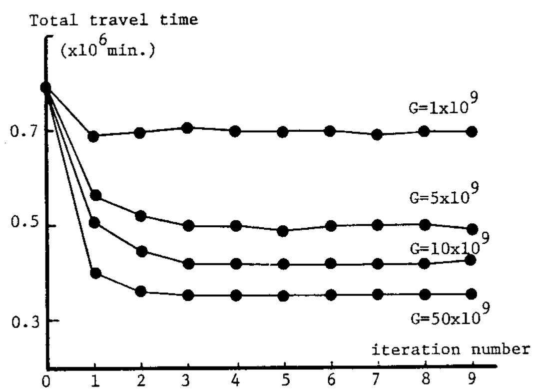
4.2.数値計算の結果

数値計算の結果は、つぎのようにまとめることができる。

①目的関数の収束 ; 目的関数（総走行時間）の収束状況を図－2に示す。くりかえし回数とともに微小な変動はあるものの、目的関数の値は収束する傾向にあり、この例では、5 回程度のくりかえしで十分であることがわかる。総建設費用制約を変化させたときも同様に、目的関数は収束する傾向にある。

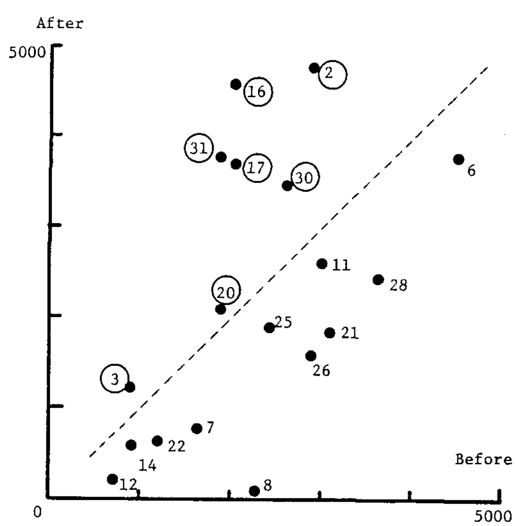
②リンク容量 ; 拡幅されたリンクは、拡幅対象リンク28本のうち、 7本のリンクであった。拡幅前後のリンク容量を、図－3に示す。拡幅されたリンクは、図－1における水平方向のリンクであることがわかる

③リンクフロー ;改良前のフローが、500(台/ 日) 以上のリンクについて、拡幅前後のリンクフローの値をプロットしたのが図－4である。この図から拡幅されたリンクにおいて、リクフローが増加



図－2 目的関数の収束

図－3 拡幅前後のリンク容量の比較



図－4 拡幅前後のリンクフローの比較

数字はリンク番号、○は拡幅されたリンク

し拡幅されなかったリンクでは、フローが減少したことがわかる。また、リンクの所要時間の短縮量（表－2）をみると、ほとんどすべてのリンクにおいて、所要時間が短縮され、とくに、拡幅されたリンクにおける時間短縮量が大きいことがわかる。

④ODフロー；改良前後の単位OD表を表－3に示す。拡幅により、ODペア 1→4, 1→5, 2→6, 3→6 のフローが増加し、その他のペアではフローが減少ないしは変化していないことがわかるしかし、ODパターンの著しい変化は見られない。

表－2　時間短縮ランク別リンク分類

短縮量（分）	リンク番号
10以上	2,7,16,25,28,31
5 - 10	3,20,21
0 - 5	6,8,11,12,18,19,22,26,30
変化なし	1,4,5,9,10,13,14,15,23,24,27,29,32
増加	17

表－3　改良前後の単位OD表

改良前				改良後			
O D	4	5	6	O D	4	5	6
1	.077	.203	.282	1	.088	.211	.263
2	.034	.131	.148	2	.029	.122	.161
3	.014	.041	.070	3	.008	.041	.076

5．おわりに

本稿では、ODフローの決定を内生化した場合の最適道路網形成問題を分布、配分同時決定問題を制約条件とする2レベル計画問題として定式化し、その近似解法を示した。さらに、簡単な例を用いて問題の数値的特性を検討した。今後に残された課題として、つぎの点をあげることができる。

①アルゴリズムの改良；建設費制約を目的関数にとり込む変換のプロセス（ξの決定方法）をより効率的かつ厳密なものに改良する必要がある。

②関数形の設定；この問題のフレームにおいて、オプショナルに用いることのできる Fa(Va,Za) Ga(Za) ,Sa(Va,Za),および需要関数の関数形をいくつか設定し、それらに対するテストランを実行する必要がある。なお、本稿において用いた関数形を規定するパラメータの値、および発生集中パターンに対する感度分析の結果については、稿を改めて発表する。

最後に、本研究を進めるうえで、御指導をいただいた京都大学工学部、佐佐木綱教授に感謝いたします。

参考文献

1)朝倉(1984)；交通混雑を考慮した最適ネットワーク形成に関する2、3の考察，土木計画学研究講演集，pp.231-238

2)朝倉(1985)；交通混雑を考慮した最適道路網計画モデルとその適用，土木計画学研究論文集，No.2 pp157-164

3)Dantig G.B. et al.(1979); Formulating and Solvingthe Network Design Problem by Decomposition,Transp. Res.,Vol.13B,pp.5-17

4)Evans S.P.(1976); Derivation and Analysis of Some Models for Combining Trip Distribution and Assignment, Transp. Res.,Vol.10,pp.37-57

5)Fisk C.S. (1984); Optimal Signal Controls on Congested Networks, 9th Inter. Sympo. on Transportation and Traffic Theory, VNU Sci. Press, pp.197-216

6)Florian M. et al. (1975); On the Combined Distribution-Assignment of Traffic, Transp. Sci.,Vol.9, pp.43-53

10) 河上、溝上(1985)；分担・配分過程結合交通需要予測モデルとそれを用いた最適バス輸送計画策定手法の開発，土木学会論文集，No.353/VI-2, pp.101-109

11) LeBlanc L. and Farhangian K. (1981); Efficient Algorithms for Solving Elastic Demand Traffic Assignment Problems and Mode Split-Assignment Problems, Transp. Sci.,Vol.15, pp. 306-317

12) 志水清孝(1982)；多目的と競争の理論，pp.210-215，共立出版