【土木計画学研究・講演集 No.7 1985年1月】

交通機関分担を考慮したネットワーク均衡問題*

The Successive Approximation Method for Solving the Travel Choice Equilibria

宮城 俊彦**
by Toshihiko MIYAGI
大野 栄治***
by Eiji OHNO

Recently, transportation models are developed by focusing on modeling travel choice equilibrium conditions on networks. In these approaches, travel choices of people are given as functions of travel costs, and by contraries travel costs are given as functions of network flows resulting from travel choices. So this is a kind of self-consistent models, and has the fixed point relationship at the network under the equilibrium condition.

In this paper, by assuming that travel choice functions follow logit probability model and travel cost functions are linear, we show that the successive approximation method for solving a fixed point problem is useful to solve network equilibrium problems where the Jacobians on the travel choice and travel cost models are asymmetric. Discussion on applying to the real network is also done.

1．はじめに

近来、交通モデルは、ネットワークにおけるトリップ選択(目的地選択・モード選択・ルート選択)の均衡条件のモデル化に焦点を当てて開発されてきた。そのモデル化のアプローチにおいては、トリップ選択はトリップ費用の関数として与えられ、また、トリップ費用はトリップ選択の結果として生じるネットワーク・フローの関数として与えられている。それゆえ、これは自己依存型のモデルであり、ネットワーク・フローが均衡状態にある場合には、(1－1)式で示されるような不動点関係式が成立している。[1),2)]

$$d^{*} = H[C(d^{*})] \qquad (1-1)$$

H[・]：トリップ選択モデル
C(・)：トリップ費用関数
d^{*} ：均衡フロー・パターン

本研究では、特に交通機関分担を考慮したネットワーク均衡問題を考え、交通モード均衡が(1－1)式で示される不動点問題に置き換えることができることを示し、そして、その解法としての反復計算法を提案している。現在、この問題に対するアプローチとしていくつかの手法が存在するが、均衡点が存在しても常に解を求めることができるとは限らない。そこで、本研究は、ロジット公式から得られるトリップ選択モデル、および、交通量の一次結合で表されたトリップ費用関数の2つを反復関数として用い、均衡解が求まらないのはどのような場合であるかを明らかにし、そして、その場合にはどのような反復

*キーワーズ：交通機関分担、不動点反復法、均衡点
**正会員 工博 岐阜大学講師 工学部建設工学科
***正会員 工修 岐阜大学助手 工学部建設工学科
(〒501-11 岐阜市柳戸1－1)

関数を用いれば均衡解を求められるのかについて検討したものである。

2．単一ルートでの交通モード均衡問題

今、図２－１に示すような交通量配分問題を考える。

Origin ―――――――― Destination

d_1, d_2　　　　$d_1+d_2=D$(const.)

d_1 : auto demand

d_2 : bus demand

D : total demand

図２－１　単一ルートでの交通モード均衡問題

つまり、ＯＤ間に１本のルートのみが存在し、そこで自動車とバスが競合しているものと仮定する。まず、説明の簡単化のために、利用者数と交通量が等価なものであるという仮定を置くが、この仮定によっても交通モード均衡問題は、一般性を失うことなく成立する。さて、利用者のモード選択はモード費用の安さによって決まるものとする。そして、ランダム効用理論により、

（モード選択による効用）＝－（モード費用）

と仮定すると、モード選択確率はロジット公式により（２－１）式で与えられる。

$$P_i = \frac{\exp(-\alpha C_i)}{\sum_j \exp(-\alpha C_j)} \quad (i, j=1,2) \qquad (2-1)$$

α ：パラメーター

C_i ：モードiの費用

そして、分担交通量は（２－２）式で与えられる。

$$d_i = D\ P_i = \frac{D\ \exp(-\alpha C_i)}{\sum_j \exp(-\alpha C_j)} \qquad (2-2)$$

また、モード費用は交通量によって変化するものと仮定し、（２－３）式で与える。

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \qquad (2-3)$$

a_{pq} ：パラメーター

ここで、この問題はFlorianによって考えられた均衡問題であるが、[3]（２－３）式で示した費用関数のヤコビ行列が非対称であるため、よく知られたBeckmann型の数理最適化問題として構成することができない。[4] しかし、（１－１）式で示した不動点問題として構成することができ、反復計算法によって均衡解を求めることができることを以下に示す。

さて、図２－１で示した問題は、（２－２）・（２－３）式および総交通量一定の仮定より、［Ｐ１］で示すような問題となる。

［Ｐ１］

$$d_1 = \frac{D}{1 + \exp\{-\alpha(C_2 - C_1)\}} \qquad (2-4)$$

$$C_2 - C_1 = A_0 + A_1 d_1 \qquad (2-5)$$

A_0, A_1 ：パラメーター

交通量はモード費用の関数であり、また、モード費用は交通量の関数であるため、問題［Ｐ１］は（２－６）式で示すような均衡点（不動点）d_1^*を求める問題である。

$$d_1^* = H(d_1^*) \qquad (2-6)$$

ここで、このような均衡問題の解法としてNewton-Raphson法やD．F．P．法などを用いることが考えられるが、本研究では、不動点反復計算法によって均衡点を求める。

まず、反復計算法が適用可能であるための条件は、次の３つである。[5]

（条件１）　与えられた出発点$d_1{}^0$に対して、逐次$(C_2-C_1)^0$,$d_1{}^1$,$(C_2-C_1)^1$,$d_1{}^2$,…が計算できる。

（条件２）　数列$d_1{}^0$,$d_1{}^1$,$d_1{}^2$,…が、ある点d_1に収束する。

（条件３）　極限d_1^*が反復関数Ｈの不動点である。

さて、この問題に対し、（条件１）・（条件３）を満足していることが明らかにされている。[1] しかし、問題によっては、解が発散（あるいは振動）して、（条件２）を満足していない場合がある。本研究の主な目

的は、その問題点を克服するための手法を提案することである。

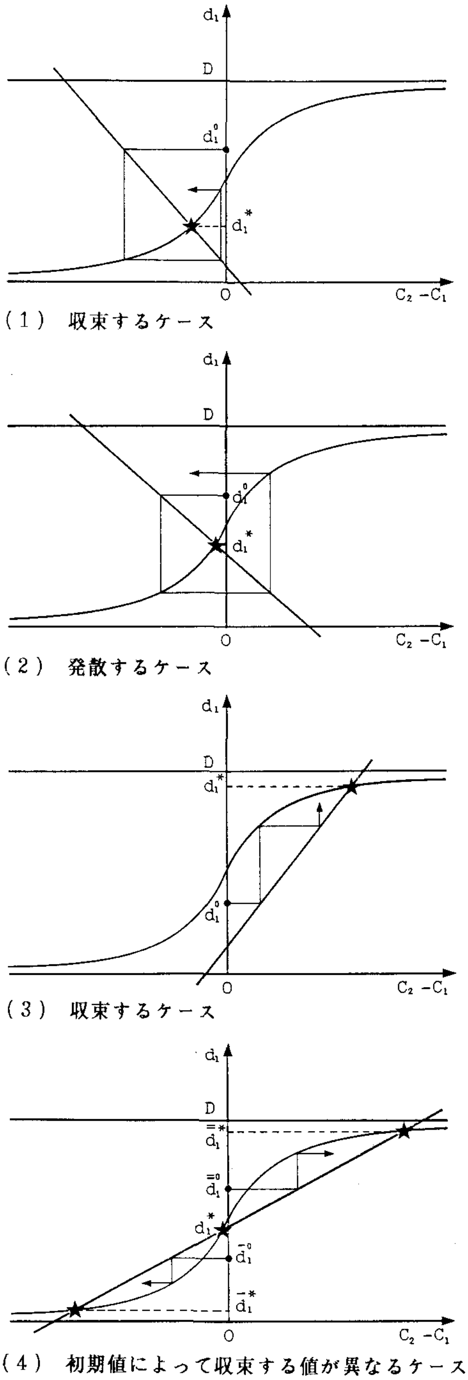
さて、この均衡問題を概念的に図解すると図２－２に示すようになり、(２－５)式の費用関数の係数に応じて４つのパターンに分けることができる。図２－２からもわかるように、この問題の均衡点は２つのグラフの交点である。また、図中の矢印は、反復計算法による均衡点探索方向を意味している。ここで、問題となるのは、(２)と(３)のように均衡点が一意的に定まらないケースである。しかし、均衡点の存在は図から明らかであり、必ずそれを求めることができる方法があるはずである。そこで、この図を別の角度から眺めてみる。たとえば、(２)において、矢印と反対の方向に探索糸を延ばしていくと、均衡点に到達することがわかる。このことは、[Ｐ１]における２つの式の各々の逆関数を用いて探索することを意味している。ここで、(２－４)式の交通需要関数は、費用差についてその逆関数を定義することができる。また、各々のモード費用を交通量の単調関数として定義しているため、(２－５)式の費用差関数もまた単調関数であり、交通量についてその逆関数を定義することができる。したがって、[Ｐ１]において均衡点が求まらない場合は、[Ｐ２]の問題に置き換えることによって解けると期待できる。

[Ｐ２]

$$d_1 = \frac{(C_2 - C_1) - A_0}{A_1} \qquad (2-7)$$

$$C_2 - C_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{d_1}{D - d_1} \qquad (2-8)$$

ここで、[Ｐ２]の問題における反復計算の初期値の設定に注意しなければならない。この場合、初期値 $d_1{}^0$ は、[Ｐ１]の問題の反復計算において生じた振動の範囲内、すなわち、$a < d_1{}^0 < b$ に設定する必要がある。なぜならば、反復計算法が適用可能であるためには、逐次計算した値 $d_1{}^k$ が定義域 $[0, D]$ に収まっていて、前記の(条件１)を満足していなければならないのであるが、初期値 $d_1{}^0$ を $a < d_1{}^0 < b$ の範囲



（１）　収束するケース

（２）　発散するケース

（３）　収束するケース

（４）　初期値によって収束する値が異なるケース

図２－２　均衡点探索の４つのパターン

外に設定すると、図２－３に示すように、反復計算が不能となるケースが生じるからである。

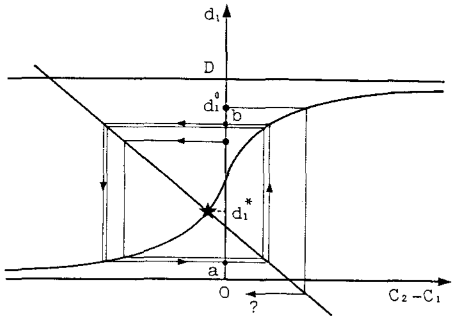
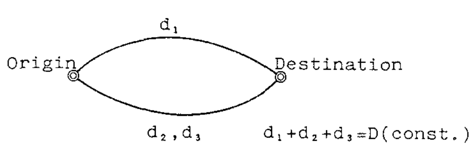


図２－３　反復計算が不能となるケース

さて、次に問題の設定を少し複雑にすることにより、この反復計算法をより現実的な問題へ適用できるように一般化を試みる。

３．ネットワーク上での交通モード均衡問題

次に、図３－１に示すような２本のＯＤルートにおける均衡問題を考える。



d_1, d_2 : auto demand

d_3 : bus demand

D : total demand

図３－１　ネットワーク上での交通モード均衡問題

まず、前節と同様に、交通量を(３－１)式で与え、モード費用を(３－２)式で与える。

$$d_i = \frac{D\exp(-\alpha C_i)}{\sum_j \exp(-\alpha C_j)} \quad (i,j=1,2,3) \qquad (3-1)$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \qquad (3-2)$$

α, a_{pq} ：パラメーター

ここで、(３－２)式は、モード費用が別のルート上の交通量からも影響を受けるものと仮定して得たものである。従来用いられてきた配分手法には、あるルート上のモード費用はそのルート上の交通量のみに依存すると仮定したもの、あるいは、そのモード自身の交通量のみに依存すると仮定したもの、さらには、一定であると仮定したものが、見受けられる。また、別のルート上の交通量からも影響を受けると仮定されている場合でも、相互に及ぼし合う影響は同じであるとしている。しかし、現実の大規模ネットワークにおいて交差点をもたないルートはほとんどなく、それゆえに、あるルート上のモード費用は交差するルート上の交通量にも依存すると考えたほうがよい。また、その相互間の影響の大きさは、信号機等による優先制御のため必ずしも等しいとは限らない。それゆえ、(３－２)式のように仮定した費用関数は、現実をよりよく反映していると考えられる。

さて、この問題は[Ｐ３]で示され、均衡点は４元連立方程式の解である。この均衡問題を概念的に図解すると複雑になるが、均衡点が存在する場合の均衡状態を図示すると図３－２のようになるであろう。

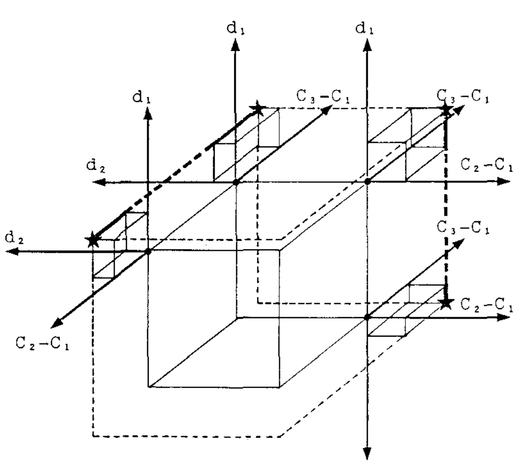


図３－２　均衡状態の概念図

ここで、反復計算手順は、まず、d_1^0, d_2^0を(３－５)式に与えて$(C_2-C_1)^0, (C_3-C_1)^0$を決定し、次に、それを(３－３),(３－４)式に与えてd_1^1, d_2^1を

[P 3]

$$d_1 = \frac{D}{1+\exp\{-\alpha(C_2-C_1)\}+\exp\{-\alpha(C_3-C_1)\}} \qquad (3-3)$$

$$d_2 = \frac{D}{1+\exp\{\alpha(C_2-C_1)\}+\exp\{\alpha[(C_2-C_1)-(C_3-C_1)]\}} \qquad (3-4)$$

$$\begin{pmatrix} C_2-C_1 \\ C_3-C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{10} \\ A_{20} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \qquad (3-5)$$

α, A_{pq} : パラメーター

$$d_i = \frac{D\exp(-\alpha C_i)}{\Sigma_j \exp(-\alpha C_j)}$$

↓↓

$$\frac{d_m}{d_n} = \frac{\exp(-\alpha C_m)}{\exp(-\alpha C_n)}$$

↓↓

$$C_m - C_n = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{d_n}{d_m}$$

図3－4　逆関数の求め方

決定する。そして、さらにそれらを用いて計算を反復し、(3－6)式に示すような均衡点を探索するのである。

$$(d_1^*, d_2^*) = G(d_1^*, d_2^*) \qquad (3-6)$$

さて、この均衡問題においても[P 1]と同様に解の発散が問題となる。しかし、この問題に均衡点が存在し、かつ、反復計算が可能であるような単調関数を仮定すれば、[P 1]と同様に、図3－3に示すような手続きで均衡点を求めることができると考えられる。

[P 3]

$(d_1, d_2) = P(C_2-C_1, C_3-C_1)$　(a)

$(C_2-C_1, C_3-C_1) = Q(d_1, d_2)$　(b)

↓↓

[P 4]

$(d_1, d_2) = Q^{-1}(C_2-C_1, C_3-C_1)$　(c)

$(C_2-C_1, C_3-C_1) = P^{-1}(d_1, d_2)$　(d)

図3－3　均衡点が求まらない場合の手続き

ここで、図3－3において、(b)から(c)への手続きは、(3－5)式の行列[A_{ij}]に逆行列が存在すれば可能である。また、(a)から(d)への手続きは、(3－3),(3－4)式からは直接できない。そこで、交通量を与える基本式(3－1)に戻り、図3－4に示す手続きをとる。図3－4に示す手続きは、関数Pの逆関数をとることとは少々意味が異なるが、ここでは便宜上「逆関数を求める」と呼ぶことにする。したがって、[P 3]の問題で均衡点が求まらない場合は、[P 4]の問題に置き換えることによって解くことができると考えられる。

[P 4]

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (C_2-C_1)-A_{10} \\ (C_3-C_1)-A_{20} \end{pmatrix} \qquad (3-7)$$

$$C_2 - C_1 = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{d_1}{d_2} \qquad (3-8)$$

$$C_3 - C_1 = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{d_1}{D-d_1-d_2} \qquad (3-9)$$

さて、ここで提案した反復計算法がうまく実行されることを示すため、次節でNewton-Raphson法では解が発散して均衡点が求まらない問題をとりあげてシュミレーションを行う。

4．計算例

ここで、具体的な計算例として[Ex. 1]と[Ex. 2]の2つを示す。それぞれ、[Ex. 1]は2節の1ルート・2モードの均衡問題であり、[Ex. 2]は3節の2ルート・2モードの均衡問題である。

これらの問題をNewton-Raphson法で解いてみると、初期値を均衡点の近傍に設定しないと解が発散して均衡点が求まらない。この現象は、モード選択公式のパラメーターαが大きくなればなるほど顕著に現れてくる。しかし、本研究で提案した反復計算法によれば、初期値をどのように設定しても均衡点は求まる。ただし、均衡点が存在し、かつ、反復計

算が可能となるようにモード費用関数を設定した場合に限る。ちなみに、例題の反復計算においては、[Ex. 1]・[Ex. 2]共に初期値を$d_1{}^0=100$としている。

[Ex. 1]

d_1, C_1 ：自動車の需要と費用

d_2, C_2 ：バスの需要と費用

$$d_1 + d_2 = 100$$

$$d_1 = \frac{100\ \exp(-\alpha C_1)}{\Sigma_j \exp(-\alpha C_j)} \qquad (j=1,2)$$

$$C_1 = 5\ d_1 + 2\ d_2 + 50$$

$$C_2 = 2\ d_1 + d_2 + 300$$

[Ex. 2]

d_1, d_2, C_1, C_2 ：自動車の需要と費用

d_3, C_3 ：バスの需要と費用

$$d_1 = \frac{100\ \exp(-\alpha C_1)}{\Sigma_j \exp(-\alpha C_j)} \qquad (j=1,2,3)$$

$$d_2 = \frac{100\ \exp(-\alpha C_2)}{\Sigma_j \exp(-\alpha C_j)} \qquad (j=1,2,3)$$

$$C_1 = 25\ d_1 + 10\ d_2 + d_3 + 20$$

$$C_2 = 10\ d_1 + 20\ d_2 + 5\ d_3 + 10$$

$$C_3 = 10\ d_1 + 10\ d_2 + 8\ d_3 + 100$$

この計算手順を簡単に説明すると、図4－1に示すようになる。図4－1は[Ex. 1]のフローチャートであるが、概要は次のようである。まず、[P 1]の関数に任意の初期値$d_1{}^0$(ただし、$0 \leqq d_1{}^0 \leqq 100$)を入力して反復計算を開始する。次に、そこで逐次計算した値が収束しているか、あるいは、振動しているかを判別する。そして、収束しているならば収束値d_1を出力し、振動しているならば[P 2]の関数を用いて反復計算を開始する。ここで、その反復計算の初期値$d_1{}^0$は、2節で述べた反復計算法の適用可能条件より、[P 1]の反復計算において生じた振動値の中間値を入力している。そして、その反復計算による収束値d_1^*を出力するのである。さて、[Ex. 1]および[Ex. 2]の均衡解は、表4－1および表4－2に示すようである。

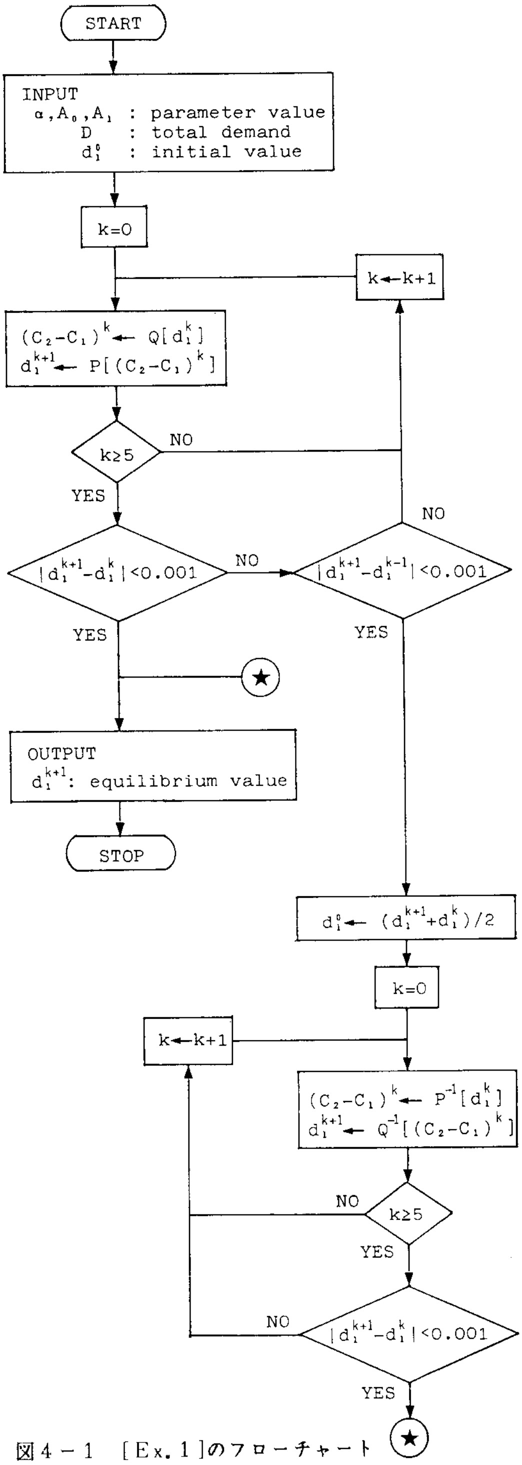


図4－1　[Ex. 1]のフローチャート

表４－１　［Ex. 1］の計算結果

α	d_1 [C_1]	d_2 [C_2]	反復回数
0.05	67.631 [452.893]	32.369 [467.631]	(14)
0.1	70.616 [461.848]	29.384 [470.616]	(9)
0.5	73.956 [471.866]	26.043 [473.955]	(5)
1.0	74.464 [473.390]	25.535 [474.463]	(5)
5.0	74.890 [474.668]	25.109 [474.899]	(5)

表４－２　［Ex. 2］の計算結果

α	d_1 [C_1]	d_2 [C_2]	d_3 [C_3]	反復回数
0.05	28.125 [1015.687]	24.521 [1018.430]	47.352 [1005.276]	(6)
0.1	28.043 [1009.553]	24.058 [1011.080]	47.898 [1004.194]	(5)
0.5	27.978 [1004.348]	23.653 [1004.680]	48.368 [1003.254]	(5)
1.0	27.970 [1003.679]	23.600 [1003.845]	48.429 [1003.132]	(5)
5.0	27.963 [1003.123]	23.557 [1003.160]	48.478 [1003.024]	(5)

ここで、モード選択公式のパラメーターαが大きくなるにつれて等費用原理が成立することが知られているが[6]、これらの計算結果もその事実を裏付けている。また、計算結果に示した収束計算の反復回数は、すべて［Ｐ２］あるいは［Ｐ３］の関数を用いて反復計算した回数であった。

さて、この計算例に用いた状況と現実のネットワークの状況との類似点は、モード選択は同一ＯＤペアのルート上のモード費用で決まるという点である。しかし、大規模ネットワークにおいては、モード費用は別のＯＤペアのルート上の交通量にも依存しており、ここで示した計算例にはそのことが考慮されていないという点が異なっている。そこで、複数のＯＤペアをもつネットワークの均衡問題にもこの反復計算法が適用できることを次節で考察する。

５．複数ＯＤ問題への拡張

ここで、本研究で提案した手法が現実のネットワークへも適用可能であるかどうかを考察する。そこで、図５－１に示すような２つのＯＤペアにそれぞれ２本のルートが存在する小規模ネットワークにおける均衡問題を考える。

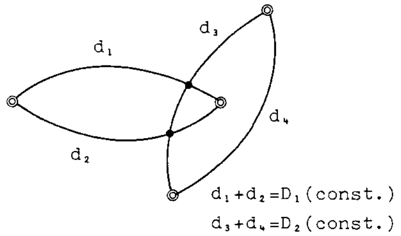


図５－１　拡張された問題

まず、２つのＯＤペア間の分布交通量D_1, D_2は一定であるという仮定を置く。そして、モード選択は同一ＯＤペアのルート上のモード間で行なわれるので、交通量を（５－１），（５－２）式で与える。

$$d_1 = \frac{D_1 \exp(-\alpha C_1)}{\exp(-\alpha C_1)+\exp(-\alpha C_2)} \qquad (5-1)$$

$$d_3 = \frac{D_2 \exp(-\beta C_3)}{\exp(-\beta C_3)+\exp(-\beta C_4)} \qquad (5-2)$$

また、モード費用は、同一ＯＤペアのルート上の交通量のみならず交差するルート上の交通量にも依存すると考えられるので、（５－３）式で与える。

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \\ a_{40} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} \qquad (5-3)$$

そして、ＯＤ交通量が一定という仮定より、この均衡問題は［Ｐ３］で示す問題となる。

［Ｐ５］

$$d_1 = \frac{D_1}{1+\exp\{-\alpha(C_2-C_1)\}} \qquad (5-4)$$

$$d_3 = \frac{D_2}{1+\exp\{-\beta(C_4-C_3)\}} \qquad (5-5)$$

$$\begin{pmatrix} C_2-C_1 \\ C_4-C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{10} \\ A_{20} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \qquad (5-6)$$

さて、この問題にも反復計算法を適用して解くと、やはり解の発散が問題となる。それで、この場合も前の問題と同じ手続きにより、［Ｐ５］を［Ｐ６］の問題に置き換えて反復計算を行えば、必ず均衡点が求まると考えられる。

［Ｐ６］

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (C_2 - C_1) - A_{10} \\ (C_4 - C_3) - A_{20} \end{pmatrix} \quad (5-7)$$

$$C_2 - C_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{d_1}{D_1 - d_1} \quad (5-8)$$

$$C_4 - C_3 = \frac{1}{\beta} \ln \frac{d_1}{D_2 - d_3} \quad (5-9)$$

ここでも、置き換えの手続きが可能となるように、費用関数がうまく定義され(well-defined)ている必要がある。

さて、現実のネットワークにおいて、モード選択はほとんどprivate modeとpublic modeとの間で行なわれ、また、１ルートに１モード(private modeのみ)あるいは２モードが存在するだけであろうと考えられる。そのことから、ルート選択とモード選択はほぼ等しい意味をもっている。そして、本節で示した例は非常に単純ではあるが、それらの状況を反映しているため、さらにネットワークを複雑にしてもこの反復計算法を適用して均衡問題を解くことができると考えられる。

６．まとめ

本研究では、モード選択を考慮したネットワーク均衡問題への反復計算法によるアプローチを試みた。従来、このような均衡問題に用いられてきた手法には、初期値を均衡点の近傍に設定しなければ解が発散して均衡点が求まらないという問題を抱えるものがあったが、そういった手法に対して１つの解決策を与えることができた。

ここで、本研究のアプローチにおいて、反復計算法が適用可能となるために、モード費用の関数型を線型とするように仮定した。この仮定は、費用関数の逆関数がとれるようにするためのものであるが、そのような仮定を置いても一般性を失うことはないと考えられる。しかし、逆関数がとれるのは線型関数ばかりではなく、単調関数であればとれるはずである。それゆえ、今後、費用関数に一般的な単調関数を仮定して、均衡問題を検討する必要がある。さらに、手法の汎用性を高めるために、費用関数の逆関数がとれない場合の均衡問題の考察も今後の課題となる。

＜参考文献＞

１）宮城 俊彦 (1985) 交通均衡モデル；理論と計算法、土木計画学研究・論文集２．

２）Ｃ．Ｆisk (1984) A Nonlinear Equation Framework for Solving Network Equilibrium Ploblems. Environment and Planning A, Vol.16, pp.67-80.

３）Ｍ．Ｆlorian, Ｈ．Ｓpiess (1983) On Binary Mode Choice/Assignment Models. Transportation Science, Vol.17, pp.32-47.

４）Ｓ．Ｄafermos (1972) An Extended Traffic Assignment Model with Implications to Two-way Traffic. Transportation Science, Vol.6, pp.73-87.

５）Ｓ．Ｄ．Ｃonte, Ｃ．deＢoor (1965) Elementary Numerical Analysis ; an algorithmic approach. McGraw-Hill, New York.

６）宮城 俊彦、小川 俊幸 (1985) 共役性理論を基礎とした交通配分モデルについて、土木計画学研究・講演集７．