エントロピーモデルの系譜：A Critical Review

福山大学　正会員　近藤勝直

1. はじめに

近年、分布交通量推計モデルに関する研究はかなり少なくなってきた。この傾向は、独り分布モデルに限らず、現在支配的な段階的交通需要推計プロセスのかなりの部分が漸く完成の域に近づいていることを意味しよう。そしてこの10年ほどの間にあっては、経験的なモデルに理論的基礎を与えること、すなわち、従来経験的に用いられてきたモデルを理論的に導出することにかなりの精力が費されてきた。実証的研究が影を潜め、マクロ的な方法に対置するものとして、効用理論等のミクロなアプローチから重力モデルや非集計ロジットモデルを導出するという画期的な成功も収められてきている。

本稿では、マクロ的方法のさらなる展望を得んが為に、エントロピーモデルの発展の系譜を辿り、現在までの蓄積を整理しておきたい。

通常、「エントロピーモデル」というとき、欧米ではウイルソンのモデルがイメージされる。彼のモデルは彼自身も認めているように、熱力学における正準集合の理論のOD分布問題へのストレートなアナロジーである。このほかにも、情報伝送効率の最大化を図る情報理論的エントロピーモデルや、巨視的状態に対して重力モデル的な先験確率を想定するところの、佐佐木教授のエントロピーモデルなどが有る。情報理論的エントロピーはその交通工学的意味が不明確なこともあって問題を残したままであるが、佐佐木教授に始まる先験確率を伴う同時確率最大化モデルは、ウイルソン流のアプローチに対置されるものとして、かつ、交通計画手法としての有用性からみて、まだ改良される余地と発展の可能性が残されている。

以下本稿では、まず年代順にエントロピーモデルを紹介し、発展の系譜を概観しておき、つづいて、それぞれのモデルの特徴と問題点等について、超時間的に再整理を試みる。

2. 交通現象へのエントロピーモデルの導入と発展

〔第1期〕

まず最初に登場してきたのは、情報理論的エントロピーモデルと名付けられるもので、情報理論において用いられる情報量としてのエントロピーをそのまま交通現象に適用するという方法でモデルが構成された。

情報理論で用いられるエントロピーとは、通常、「シャノンのエントロピー」と呼ばれているところの

$$H = -\sum_i P_i \log P_i \quad \left(\sum_i P_i = 1\right) \qquad (1)$$

でもって定義され、例えば、資料を $P_1\ P_2 \cdots P_n$ の割合で分割した場合に得られる情報量、あるいはその逆の意味で、資料の分割によって失なわれるあいまいさの量を表わしている。情報理論では、通信路の通信効率を通常、伝送速度（伝送率、*transmission rate*）というものさしで測る。これは「単位時間当りの情報量」として定義される。

この伝送速度最大化の概念を最初に交通現象に適用したものに、平原(1960)の転換率推計モデルがある。平原モデルではルート特性値として所要時間を用いている。これを契機として、所要時間以外に、走行経費、快適性、積荷の安定性などについての情報を与えて、新旧2道路の利用率を研究した藤森(1966)が現われる。また、OD交通量推計問題に応用したものとして香川(1966)、都市の人口分布形態の研究に応用したものとして天野・青山・榛田(1967)など続々と研究成果が発表されている。

上記諸研究はいずれも情報理論への直接的アナロジーであり、平均走行時間（あるいは平均特性値）当りの情報量

$$R = \frac{H}{\bar{t}} = \frac{-\sum P_i \log P_i}{\sum P_i t_i} \qquad (2)$$

を最大化することによって所要のパターンを定めようとするものである。得られた解は、したがって、情報理論的観点からは伝送効率の高いパターンとしての意味を持つことになるが、交通工学的観点からは

その物理的意味が不明確であるとの意見が与えられることになる。[28] すなわち、対象とする現象自体のメカニズムから演繹された概念ではないのではないかという疑問が残されたままになっている。情報理論的エントロピーモデルは現象説明力は秀れているとのことであるから、(2)式が伝送率という概念以外の他の物理的思考から演繹できれば復権の可能性はあるのではないだろうか。［第3節(2)に試論提案］

〔第2期〕

つぎに挙げなければならないのは、統計熱力学的エントロピーモデルとでも呼ぶべきウィルソンのエントロピーモデル(1967)であろう。彼の依拠した理論は、統計熱力学におけるミクロカノニカル集合の理論であり、これをそのままOD分布の問題に適用していることから、後述するような幾多の批判を受けることになるが、指数型（重力）モデルを最初に理論的に導出したという点で画期的な研究であり、その意味で後世に与えた影響は非常に大きいものがある。

彼のモデルは簡潔には

$$\mathrm{Max.}\quad W=\frac{T!}{\Pi X_{ij}!} \tag{3}$$

$$\mathrm{s.t.}\quad \sum_i X_{ij}=V_j,\quad \sum_j X_{ij}=U_i$$

$$\mathrm{and}\quad \sum_i\sum_j X_{ij}C_{ij}=C \tag{4}$$

$$\rightarrow \mathrm{sol.}\quad X_{ij}=\lambda_i\mu_j\exp(-\gamma C_{ij}) \tag{5}$$

$$=U_i\frac{\mu_j\exp(-\gamma C_{ij})}{\sum_k \mu_k\exp(-\gamma C_{ik})} \tag{6}$$

と書けるが、重要な仮定は目的関数[(3)式]と、第3制約式[(4)式]である。目的関数Wは、総トリップ数Tを各ODペア(i,j)にそれぞれX_{ij}ずつ割当てる場合の数を表わしているが、この際、注意すべきことは、① Boltzmannの等確率の原理にならい、個々の微視的状態はそれが巨視的にどのような状態であろうと、すべて等しい確率をもつことが仮定され、② さらに、ペア(i,j)にX_{ij}ずつ配分されるという巨視的状態を全く均等にとり扱っていること、すなわち、いずれの巨視的状態も等確率で起ることが仮定されていること、などである。

第3制約式、すなわち総交通費用一定式については、これは資源制約式というよりも、単なる分布の結果なのではないかとする意見が一般的である。この式は彼の依拠した正準集合の理論においては熱平衡状態における系の内部エネルギーであって、熱力学第1法則（＝エネルギー保存則）に他ならない。

このウィルソンモデルとほぼ時を同じくして、我国でも佐佐木教授のエントロピー法が登場する(1966, 1968)。都市内の自動車の運行パターンをマルコフ連鎖モデルで記述していった数多くの著作が、最後には、先験確率を伴ったエントロピー法として結実するのである。最も洗練された1968年論文の定式化は

$$\mathrm{Max.}\quad S=\frac{T!}{\Pi X_{ij}!}\Pi(q_{ij})^{X_{ij}} \tag{7}$$

$$\mathrm{s.t.}\quad \sum_j P_{ij}=1,\quad \sum_i u_i P_{ij}=v_j \tag{8}$$

（ただしP_{ij}は遷移確率，u_iは相対的発生力，v_jは相対的吸引力，q_{ij}は(i,j)というODの生ずる先験確率で $q_{ij}=k u_i v_j t_{ij}{}^{\gamma}$ なる重力モデルが想定されている。）

と書ける。Sは各ODペア(i,j)にX_{ij}ずつ割当てる同時確率であり、多項分布より導かれる。すなわち確率的に最も起り易い（most probable）分布を求めようとするものであり、ウィルソンの②の仮定よりも現象に忠実なモデルとなっている。

このモデルの登場により、単なる自動車OD表の推計だけでなく、種々のトリップ目的を持つパーソントリップのOD表推計にも極めて広範に応用が可能となったし、先験確率という概念を通じて、将来起り得るであろう分布パターンを選択できること、また実証的に先験確率式の構造を定め得ること、などが可能となり、交通計画モデルとして極めて融通性のある手法として理解されることになった。

そして、もう1つこの〔第2期〕で言及しておく必要のあるのが松井（1971）の統計力学的エントロピーモデルである。この統計力学的エントロピーモデルの特徴は、先述したように1つ1つのトリップを全て区別して扱うという点と、ウィルソンの熱力学的エントロピー法のような熱平衡という概念を媒介にせず、純粋に統計的観点から、最大オーダー解を見積ることによってmost probableなパターンを定めようとする点である。この方法で興味深いのは、最

終的な目的関数の形が、いわゆるヘルムホルツの自由エネルギーとほぼ同義の内容になっているという点である。熱力学では、熱平衡分布は、いいかえると、マクロ的に定義されたヘルムホルツの自由エネルギーを最小にする分布であるとされている。[6] したがって、ウィルソンモデルと松井モデルはメダルの表裏の関係にある可能性が強いが、まだ確証は得られていない。

以上、〔第2期〕で登場したエントロピーモデルの考え方は、それぞれ記念碑的な性格を持つほどに確たる理論的背景を備えたものであり、未だこれらを乗り越える新しい考え方は生まれていない。

〔第3期〕

ここでは第2期以後現在に至るまでの諸研究が対象となるが、基本的な方法論はいずれも第2期に登場したそれを踏襲している。また従来の方法の再編・再整理・親族関係・統合などに関連した研究が多い。[14),15),16),17),18),21),22),20),27)]

まず、ウィルソンモデルに関連するものは英国を中心に数多く発表されているが、基本的なフレームは踏襲されており斬新なものはないといってよいが、アーランダー（1977）は、ウィルソンモデルの双対問題として、エントロピー制約条件つきの輸送問題を発見している。

一方、佐佐木モデルについては、多方面の展開をみせている。モデルの応用事例は紙数の関係で省略するが、方法論的に興味ある展開として、修正重力モデルをエントロピーモデルより導出するアプローチ[15]、佐佐木モデルの構造の簡略化と実用化[14]、現在パターン的エントロピー法の提唱[16]、一般化エントロピー法の提唱[17]、目的関数の一般化[18] などをあげることができよう。

この第3期の諸研究の中にはいくつかの重要な発展があるので節を改めて論じてみたい。

3. エントロピーモデルの新展開

(1) 佐佐木のエントロピー法はより一般的には

$$\text{Max.}\ S = \frac{T!}{\Pi x_{ij}!}\,\Pi\,(q_{ij})^{x_{ij}} \qquad (9)$$

$$\text{s.t.}\ \sum_j x_{ij} = U_i,\ \sum_i x_{ij} = V_j. \qquad (10)$$

と書くことができる。ここに q_{ij} は先験確率である。q_{ij} として power function 型の重力モデルを想定したものが、オリジナルな佐佐木のエントロピー法であり、現在単位OD表を用いるものが、現在パターン的エントロピー法[16]である。

目的関数 S の対数をとり、定数項を省くと、最終的な目的関数の形態は

$$S_1 = \left(-\Sigma P_{ij}\log P_{ij}\right) - \left(-\Sigma P_{ij}\log q_{ij}\right)$$

＝〔将来分布 P の不確かさの量〕－〔観測分布 Q を得た後の P の不確かさの量〕

＝〔相互情報量〕

$$= \sum_{ij} P_{ij}\log q_{ij}/P_{ij} \rightarrow \text{Max.} \qquad (11)$$

と簡潔になる。ここに $P=\{P_{ij}\}$ は将来の単位OD表，$Q=\{q_{ij}\}$ は先験確率行列である。この目的関数 S_1 は情報理論でいう相互情報量としての解釈づけが可能である。 相互情報量は

$$\begin{aligned} I(P,Q) &= H(P) - H(P|Q) \\ &= \left(-\Sigma P_{ij}\log P_{ij}\right) - \left(-\Sigma P_{ij}\log q_{ij}\right) \\ &= -\Sigma P_{ij}\log P_{ij}/q_{ij} \end{aligned}$$

と定義され、このエントロピー I は、Q を観測（あるいは想定）することによってもたらされる仮説 P に関する情報量を表現しており、シャノンの不等式

$H(P) \geqq H(P|Q)$ 　等号は $P=Q$ のとき

より確実に非負となる。〔有本（1975, 1980）〕

(11)式は

$$\Sigma P_{ij}\log P_{ij}/q_{ij} \rightarrow \text{Min.} \qquad (12)$$

と同義であるが、(12)式は Snickers & Weibull (1977) の目的関数に他ならない。両氏は "Minimum Information Principle" と呼んで新装を凝らしているが、10年の時差があったとみるべきか。

(2) 上記の相互情報量の概念と記号を用いると宮武・芝原モデル（1980）の目的関数は

$$\boxed{\{I\}^{a}\{1/\bar{t}\}^{1-a} \rightarrow \text{Max.} \qquad (13)}$$

（$\bar{t}$：一般化された平均トリップ費用
　a：トレードオフパラメータ，$0 \leqq a \leqq 1$）

と書ける。トレードオフパラメータ a を介して、同時推

率から誘導される相互情報量 $I(P,Q)$ と、$\bar{C}$、すなわち、トリップに支出すべき平均トリップ費用とに関する社会的選好を巧みに目的関数として表現していることになる。$a=0$ のときは輸送問題に、$a=1$ のときはエントロピー I の最大化問題となる。したがって a は、$\bar{C}$ と I のいずれにウェイトを置くかという社会的選好を表現するトレードオフパラメータとしての役割が期待されている。

ここで (13)式をもう少し一般的に

$$\boxed{\{I\}^{a}\{\bar{C}\}^{b} \to \mathrm{Max}. \qquad (14)}$$

と書くことにすれば、[第1期] に登場した情報理論的エントロピーモデルを包含することができる。すなわち、(14)式において、$a=1$, $b=-1$ とおき、さらに、$I=H$（先験情報のないケース）とおくならば、このとき、(14)式は、(2)式に一致することになる。ここに至って、ようやく、(2)式の復権の道が開けたのではあるまいか。伝送率という概念から離れて、I と $\bar{C}$ の社会的選好間のトレードオフとして目的関数を理解するのである。

(3) 一般化エントロピー法[17]：ここでいう一般化エントロピー法とは、前々項(2)で紹介した「現在パターン的エントロピー法」と「重力モデル的エントロピー法」をドッキングしたものである。
基準年次（base year）の現在パターンが、その後、時の経過とともに、その影響力が弱まってゆき、しだいにネットワーク等の外的変化の影響を強く受けるような形で、将来（horizon year）の分布パターンが形成されてゆくのではないか、という考え方に基づいている。

まず、基準年次の現在パターンを、その単位OD表 t_{ij} で表わし、予測年次の発生力を u_i，吸引力を v_j，ゾーン間時間を d_{ij} で表わすものとすれば、予測年次の先験確率は、power function 型の場合、一般に

$$q_{ij} = k\, u_i^{\alpha} v_j^{\beta} d_{ij}^{-\gamma} t_{ij}^{\delta} \qquad (15)$$

と表現できよう。いま簡単のため

$$q_{ij} = k\, d_{ij}^{-\gamma} t_{ij}^{\delta} \qquad (16)$$

のケースについて考えてみよう。（$\gamma=0$, $\delta=1$ のときは現在パターン的エントロピー法、$\gamma>0$, $\delta=0$ のとき重力モデル的エントロピー法になる。）

経年的にOD表が観測されておれば、各年次の単位OD表に対して (16)式を回帰することにより、パラメータ γ, δ がそれぞれ求められる。これらの値については

(i) δ は経年的に1から0に向かう

(ii) γ は0からしだいに増加してゆく

という傾向がみうけられるであろう。(i)は基準年次の現在パターンの影響が薄れてゆくことを、(ii)は対象年次のネットワークにより強く影響されることを期待しているのである。ただし2時点間でネットワークに大きな変化のないときは γ 値の変化はかなり小さくなるであろう。実際、図-1，図-2 に示すように、(i)，(ii)の傾向が存在するようである。（両図とも文献[17]より作成。京都市自動車OD：昭和37年、40年、43年、46年、49年情勢調査データ）

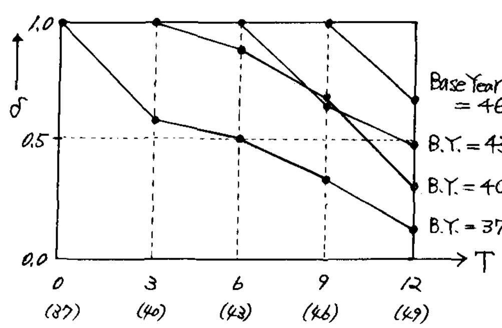

図-1：δ の経年変化

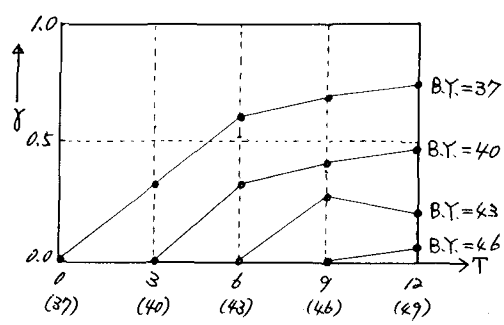

図-2：γ の経年変化

これらの曲線をうまく特定化することができれば、将来年次のネットワーク（したがってゾーン間時間）を得て、任意の基準年次に対して、将来のγ値, δ値を推定することができるので、大いに発展の期待できるテーマであると思われる。

4. 補論

(1). 佐佐木のエントロピー法では、先験確率という装置を通して、将来起り得るであろう分布パターンを選択でき、したがって、分布パターンに計画的意志を反映させることができるというメリットを持つのに対し、熱力学的あるいは統計力学的エントロピーモデルでは解が指数モデルに特定されてしまうので、上記のような融通性に欠け、かつ、実証的に適合度のよい分布パターンを選択する自由度に欠けている。ただし指数モデル（的重力モデル）を導出できたという功績は評価されるべきである。

(2). 第2期に登場したエントロピーモデルは、いずれも解の構造式についてあまり注意がはらわれていなかった為に、求解のプロセスがやや複雑であったが、第3期での考察により、解の構造が極めて明瞭な形に変身せられたことで、解の一意性も証明され、求解法も実用的になった。16),22)

(3). 第3節第2項で述べた、エントロピー(I)と平均トリップ費用($\bar{C}$)とのトレードオフを表現する方法は(13)式ないし(14)式のような乗積型に限定されることはない。たとえば

$$\{I - \lambda \cdot \bar{C}\} \rightarrow \mathrm{Max.} \qquad (17)$$

という形も考え得るであろう。この問題の解は、多項ロジットモデルで与えられる。また問題(17)は、数学的には

$$\{\mathrm{Max.}\ I \quad \mathrm{s.t.}\ \bar{C} = \mathrm{const.}\} \qquad (18)$$

と同値である。

(4). 熱力学第2法則として名高い「エントロピー増大の原理」というのは、自然に起る過程が、それに関係している全ての対象を考えたときに、エントロピーが増大するという方向性（不可逆性）を持つということであって、個々の部分系をみたときには、その系が置かれた外部条件のもとで、ある秩序をもった平衡状態が実現しているのである。その平衡状態というのは、一般に自由エネルギー最小という条件できまる。すなわち、エントロピーが大きく、無秩序になろうとする傾向と、内部エネルギーがなるべく低い、力学的に安定な秩序のある状態になろうとする傾向がちょうどバランスした状態に落ちつくことになる。平衡状態というのは、いわば、経済学でいう部分均衡に近い概念である。

数ある社会現象の1部分系であるところの交通現象について熱力学的世界をイメージすれば、例えば、自由エネルギーとして「ヘルムホルツの自由エネルギー」を用いる場合、(17)式のほぼ裏返しとして

$$\{F = \bar{C} - \mu \cdot I \rightarrow \mathrm{Min.}\} \qquad (19)$$

なる問題が作れよう。(μ: const.)

この問題は

$$\{\mathrm{Min.}\ \bar{C} \quad \mathrm{s.t.}\ I = \mathrm{const.}\} \qquad (20)$$

なる問題と同値であり、さらに、問題(20)は、ウイルソンのモデルの双対問題としてアーランダーが提唱した輸送問題に他ならない。

こうみてくると、エントロピーモデルの系譜は近いうちに共通の平衡状態に辿りつくのではないだろうか。

（後記）以上では多くの方々の業績を省略させていただいたし、また、多くの独断的な箇所と、諸氏のオリジナルな発想をゆがめて解釈しているところがあるかもしれない。御叱正をお願いしたい。

参考文献・関連文献

・エントロピー概念については

[1] 寺本英「エネルギーとエントロピー」，化学モノグラフ25，化学同人，1973年

[2] 有本卓「情報理論」，共立出版，1975年

[3] 有本卓「確率・情報・エントロピー」，森北出版，1980年

[4] 小出昭一郎「エントロピー」，共立出版，1979年

[5] 国沢清典「エントロピーモデル」，日科技連，1975年（旧版「ORのための情報理論入門」，1959年）

[6] 小暮陽三「統計熱力学の学び方」, オーム社, 1982年

・交通のエントロピーモデル

[7] 平原覚治, "道路の利用率(転換率)の推定について", 日本道路公団, 1960年

[8] 藤森謙一, "Application of Operations Research to Road Traffic", Jou. of ORSJ, 8-1, 1966年

[9] 香川一男, "エントロピー最大化の原理からみた交通量分布", 土木学会論文集 No. 129, 1966年

[10] 天野光三・青山吉隆・藤田昌久, "都市人口分布形態に関する情報理論的研究", 土木学会論文集 No.142, 1967年

[11] 佐佐木綱, "遷移確率法によるOD交通量の推定(エントロピー法)", 道路, 8月号, 1966年.

[12] 佐佐木綱, "A Probabilistic Model of Trip Distribution", Proc. of the 4th. Intl. Symposium on the Theory of Traffic Flow, Karlsruhe, Germany, 1968.

[13] 松井寛, "交通量分布パターンの確率論的考察", 土木学会論文集 No. 190, 1971年

[14] 近藤勝直, "分布交通量推計モデル再考", 交通工学 12-3, 1977年.

[15] 河上省吾, "修正重力モデルの確率論的意義とエントロピーモデル", 土木学会論文報告集 No. 272, 1978年

[16] 佐佐木綱・近藤勝直, "最適化問題としての現在パターン法", 土木学会論文報告集 No. 272, 1978年

[17] 佐佐木綱・傅義雄, "現在パターンを考慮したエントロピー法", 土木学会全国大会 IV-53, 1977年

[18] 宮武信春・芝原靖典, "分布・分担交通量の同時予測モデルとその理論的考察", 交通工学 15-2, 1980年

[19] Wilson A.G., "A Statistical Theory of Spatial Distribution Models", Trans. Res. Vol.1, No.3, 1967.

[20] Snickers F., Weibull J.W., "A Minimum Information Principle: Theory and Practice", Reg. Sci. & Urban Eco., Vol.7, pp.137-168, 1977.

[21] Chang-I H., Porell F., "A Critical Review of the Development of the Gravity Model", Intl. Reg. Sci. Rev., 4-2, 1979.

[22] Sasaki T. & K. Kondo, "An Entropy Maximising Distribution Model", in Hakkert ed., Traffic, Transpn and Urban Planning, Vol.1, George Godwin London, 1980.

[23] Cochrane R.A., "A Possible Economic Basis for the Gravity Model", Jou. of Transpn Eco. & Policy, IX-1, 1975

[24] Beckmann M.J., Golob T.F., "A Critique of Entropy and Gravity in Travel Forecasting", in G.F. Newell ed., Traffic Flow and Transportation, Ame. Elsevier, 1972.

[25] Golob T.F & M.J. Beckmann, "A Utility-Theory Travel Demand Model Incorporating Travel Budget", Transpn Res. 15-B6, 1981

[26] Hansen S., "Entropy and Utility in Traffic Modelling", in D.J. Buckley ed., Transportation and Traffic Theory, A.H. & A.W. Reed. Sydney. 1974.

(文献[23]～[26]は効用理論からのアプローチが詳しい。)

[27] Erlander D. "Accessibility, Entropy and the Distribution and Assignment of Traffic", Trans. Res., 11, pp.149-153, 1977.

[28] 米谷栄二編「交通工学」, 国民科学社. 「丸善.

[29] 米谷栄二編「土木計画便覧」, pp.651～663,

[30] 土木学会編「交通需要予測ハンドブック」, 技報堂.