動的交通量配分理論に関する研究

名古屋工業大学　正員　松井　寛

1．はじめに

道路網を対象とした交通量配分問題は従来から多くの研究がなされ，既に多くの実用的な配分モデルが提案されてきた．しかしながらこれらはいずれも静的な交通量配分モデルと言うべきものであり，通常1日交通量を対象とし，終日の平均的な配分パターンを求めて道路網計画に役立てようとするものである．したがって，たとえば時々刻々と変動する需要交通量に対する道路網上の交通流の予測問題や交通管制等による道路網上の交通流の制御といった動的な問題に対しては，従来のような静的配分モデルでは十分に対応できない．そこで本研究では時間的に変動する需要交通量を対象とした動的交通量配分問題を取り上げ，特に既存の配分モデルのうちで数理計画問題として扱える輸送計画的配分と等時間原則配分の両配分モデルについてその動的化を行う．本文では最も簡単な1OD2経路の道路網を考え，これらの問題がいずれも図式的に意味をもつ最小化問題として表わされることを示し，さらに問題の一般的解法について述べる．

2．静的な交通量配分問題

数理計画問題として定式化できる交通量配分モデルとしてWardrop の提唱した2つの配分原則が一般に知られている[1]．その1つは System Optimized Assignment として知られているもので，道路網全体での総走行時間を最小とする配分原則（総走行時間最小化配分）に基づいている．他の1つは User Optimized Assignment として知られているもので，各ドライバーがそれぞれ自己にとって最短時間となる経路を選択するという配分原則（等時間原則配分）に基づくものである．いまこの2つの配分理論をパスフローを変数にとって定式化することにし，以下の記号を定義する．

S_i = ODがiのOD交通量　　x_k^i = ODがiで経路kを通るOD交通量

X_j = リンク（道路区間）jの区間交通量，　$f_j(X_j)$ = リンクjの走行時間関数

$$\delta_{kj}^i = \begin{cases} 1 & : \text{リンク} j \text{がOD} i \text{の経路} k \text{に含まれるとき} \\ 0 & : \text{リンク} j \text{がOD} i \text{の経路} k \text{に含まれないとき} \end{cases}$$

このとき上の2つの配分理論は次のように定式化できる．

a．総走行時間最小化配分

制約条件

$$S_i = \sum_k x_k^i \qquad (1)$$

$$X_j = \sum_i \sum_k \delta_{kj}^i x_k^i \qquad (2)$$

$$x_k^i \geqq 0 \qquad (3)$$

の下で次の評価関数（総走行時間）を最小化する

$$J = \sum_j X_j f_j(X_j) \Rightarrow \text{最小化} \qquad (4)$$

図式的には，Jは走行時間関数を表わしたグラフにおいて X_j と $f_j(X_j)$ を2辺とする矩形の面積の総和を表わしている（図-1）．

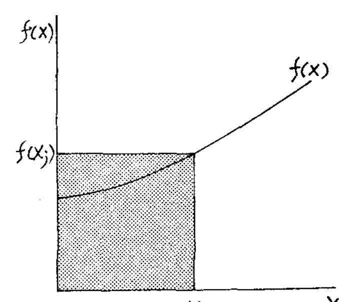

図-1　総走行時間最小化配分の評価関数

b．等時間原則配分

等時間原則配分が数理計画問題として定式化できることを最初に発見したのは N.O. Jørgensen[2] と言われているが，これは次のように定式化できる．制約条件は先の総走行時間最小化配分の場合と同じであり，制約条件式(1)～(3)の下で次の評価関数を最小化する．

$$J = \sum_j \int_0^{X_j} f_j(x)\,dx \Rightarrow \text{最小化} \qquad (5)$$

このときの評価関数は図式的には0からX_jまでの走行時間関数$f_j(x)$下の面積の総和を表わすことになる（図-2）.

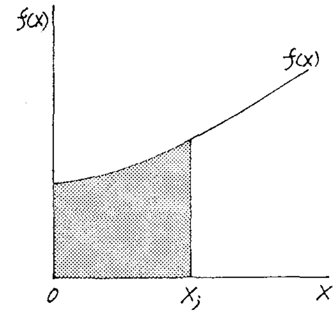

図-2. 等時間原則配分の評価関数

上に定式化された問題が等時間原則配分の解を与えることは，上記最小化問題のKuhn-Tucker条件が等時間原則の定義そのものを意味することから明らかにされる.

3. 動的な交通量配分問題

ここでは説明を簡単にするため，1OD2経路の簡単な道路ネットワークを考える（図-3）. 問題の定式化に先立ち次の記号を定義する.

$u_i(t)$ ： 時刻tにおける経路i（$i=1, 2$）への分流交通量

$x_i(t)$ ： 時刻tにおける経路i（$i=1, 2$）上の存在台数

$S_i(t)$ ： 時刻tにおける経路i（$i=1, 2$）からの流出交通量

$g(t)$ ： 時刻tにおける需要交通量

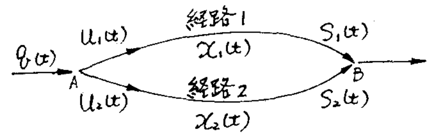

図-3. 1OD2経路の道路ネットワーク

a. 動的な総走行時間最小化配分

動的な交通量配分問題を考えるときは，時刻tにおける経路上の存在台数x_i（$i=1, 2$）を状態変数として採用する. 流体の保存則よりx_iの単位時間中の変化量はその時間中の経路iへの流入量と流出量の差に等しい. これを式で表わせば

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1 - S_1 \qquad (6)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = u_2 - S_2 \qquad (7)$$

となる. また分岐点Aで当然次式が成立する.

$$g = u_1 + u_2 \qquad (8)$$

ここでu_1, u_2を制御変数，x_1, x_2を状態変数と呼ぶことにし，これらの変数の非負条件が追加される.

$$u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \qquad (9)$$

一方，評価関数は次のように与えられる.

$$\int_0^T (x_1 + x_2)\,dt \Rightarrow \text{最小化} \qquad (10)$$

上式は明らかに制御時間T中の総走行時間を表わしている. ここに制御時間Tはあらかじめ与えられるものとする. よって動的化された総走行時間最小化配分は制約条件式(6)～(9)の下に評価関数(10)を最小化する問題として定式化できる. なおこの問題を解くにあたって状態変数の初期値が必要となるが，いまこれを次式によって与えておく

$$x_1(0) = m_1, \quad x_2(0) = m_2 \qquad (11)$$

一方，経路からの流出交通量S_i（$i=1, 2$）もあらかじめ与えられなければならないが，一般的にはS_iは状態変数の関数形で与えられるものと考えるのが妥当である. たとえば交通量－密度曲線を放物線と仮定すれば

$$S_1 = (a_1 - b_1 x_1 / l_1)\,x_1 / l_1, \quad S_2 = (a_2 - b_2 x_2 / l_2)\,x_2 / l_2 \qquad (12)$$

と表わせる. ここにl_i（$i=1, 2$）は経路iの区間長，a_i, b_iは常数である. このとき式(6)及び式(7)は一般に非線形微分方程式となる.

上に定式化した問題を図式的に表現すれば図-4のようになる. すなわち，経路iへの流入交通量と流出交通量の累加交通量をそれぞれx－t座標上に表わしたとき，任意の時刻tにおける経路i上の存在台数$x_i(t)$は，

図-4 に示すように2つの累加交通量曲線に挟まれた垂直方向の線分で与えられるので，先に示した評価関数(10)は図式的には2つの累加交通量曲線に挟まれた部分の時刻0からTまでの面積の総和を表わすことになる．

b. 動的な等時間原則配分

次に動的な等時間原則配分の場合はどうであろうか．結論を先に言えば，等時間原則配分の場合は図-5に示す陰影部分の面積の総和を最小化する問題に相当する．以下これを証明しよう．

x軸に垂直な直線が2つの累加交通量曲線に挟まれる線分を $t_i(x)$ で表わすと，t_i は任意の時刻に到着した車が経路 i を通過するまでに要した時間（車の走行時間）を表わしており，また図中の陰影部分の面積はこの t_i を0から x_i^* まで積分することによって与えられる．したがってこの面積の総和を最小化することは次式を最小化することである．

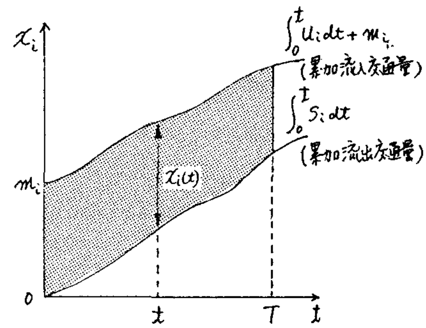

図-4. 動的総走行時間最小化配分の評価関数

$$J = \int_0^{x_1^*} t_1 dx + \int_0^{x_2^*} t_2 dx \Rightarrow \text{最小化} \qquad (13)$$

ここに x_1^*, x_2^* は次式によって与えられる．

$$x_1^* = \int_0^t u_1 dt + m_1, \qquad x_2^* = \int_0^t u_2 dt + m_2 \qquad (14)$$

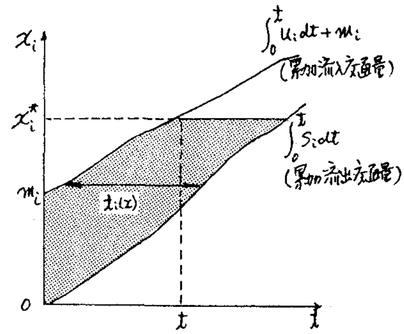

図5 動的等時間原則配分の評価関数

いま式(13)で与えられる評価関数 J を最小化する u_1 および u_2 を求めてみよう．ただし u_1, u_2 に関しては動的総走行時間最小化配分の場合と同様に制約条件式(8)が満足されなければならない．

次のようなラグランジュ関数 ϕ を導入する．

$$\phi = \int_0^{x_1^*} t_1 dx + \int_0^{x_2^*} t_2 dx - \lambda(u_1 + u_2 - q) \qquad (15)$$

ここに λ はラグランジュの未定乗数である．

Kuhn-Tucker の定理より

$u_1 > 0 \quad u_2 > 0$ のとき

$$\frac{\partial\phi}{\partial u_1} = \frac{\partial J}{\partial x_1^*}\frac{\partial x_1^*}{\partial u_1} - \lambda = t_1 t - \lambda = 0 \;^{注)} \Rightarrow t_1 = \frac{\lambda}{t}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u_2} = \frac{\partial J}{\partial x_2^*}\frac{\partial x_2^*}{\partial u_2} - \lambda = t_2 t - \lambda = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{\lambda}{t}$$

よって $t_1 = t_2$

$u_1 > 0 \quad u_2 = 0$ のとき $(u_1 = q,\ u_2 = 0)$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\lambda}{t}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u_2} \geq 0 \Rightarrow t_2 \geq \frac{\lambda}{t}$$

よって $t_2 \geq t_1$

$u_1 = 0 \quad u_2 > 0$ のとき $(u_1 = 0,\ u_2 = q)$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u_1} \geq 0 \Rightarrow t_1 \geq \frac{\lambda}{t}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u_2} = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{\lambda}{t}$$

よって $t_1 \geq t_2$

注）この関係が成立するには u_1, u_2 は積分範囲内で連続でなければならない．

ここに t_i ($i=1,2$) は任意の時刻に到着した車が経路 i 上を走行した時間を表わしているので，上に得られた結果は等時間原則そのものである．よって動的な等時間原則は評価関数(13)の最小化によって与えられることが証明された．

4. 図解による簡単な例

上で取り上げた1OD2経路の交通量配分問題で，需要交通量 q，経路からの流出交通量 S_1，S_2 がそれぞれ一定値をとると仮定した場合は，動的配分交通量が図解的に解けることを以下に示そう[3]．

a. 動的総走行時間最小化配分

前と同様な x-t 座標を考える(図-6)．需要交通量 q の累加曲線を描く($\overline{AB}$)．ただし x の初期値は $x_1(0)=m_1$，$x_2(0)=m_2$ であるから，点Aの座標は $(0,\ m_1+m_2)$ である．次に経路1の累加流出交通量を描く($\overline{OC}$)．また経路2の累加流出交通量を点Aを原点，$\overline{AB}$ を横軸，$\overline{AD}$ を縦軸(下向き)とした座標に描くと $\overline{AD}$ のようになる．

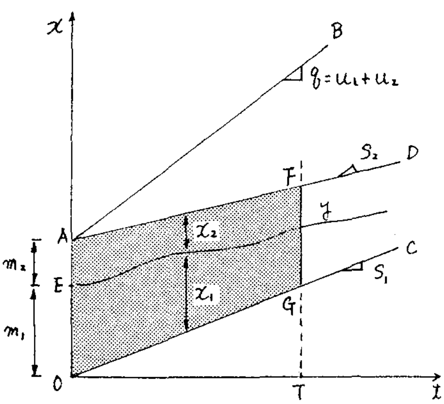

図-6. 図解による動的総走行時間最小化配分

制御時間として T をとれば，式(10)で与えられる T 時間中の総走行時間は図中の陰影部分の面積に等しくなり，$\overline{AD}$，$\overline{OC}$ が既知であるので，各経路への配分比率と無関係にこの面積は一定となる．したがって総走行時間を最小とする各経路への配分交通量は点Eと線分 $\overline{FG}$ 上の任意の点を結び，この陰影部分内を通る任意の曲線 y (以下この曲線を配分曲線と呼ぶ)が求める解である．もし $\overline{AD}$ と $\overline{OC}$ が交わる場合は，その交点をPとし点Eと点Pを結ぶ直線を考えれば，これはこの動的総走行時間最小化配分の1つの解である．このときの各経路への配分交通量は時刻に対して一定で次の値をとる．

$$u_1 = \frac{S_1 m_1 - S_2 m_2 + m_1 q}{m_1 + m_2} \qquad u_2 = \frac{S_2 m_2 - S_1 m_1 + m_2 q}{m_1 + m_2} \qquad (16)$$

b. 動的等時間原則配分

○ $m_1/S_1 > m_2/S_2$ の場合

経路1，2に制御時間の最初に到着した車がその経路を通過するのに要する時間はそれぞれ m_1/S_1，m_2/S_2 で与えられる．したがって $m_1/S_1 > m_2/S_2$ の場合は経路2の方が走行時間が短いので，初めのうちは経路2の方にすべての需要交通量 q が流れる．やがて2本の経路の走行時間が等しくなった時点以降は等時間原則に基づく配分比率で経路1，2へ需要交通量が分流する．

以上の関係は図解的に説明すれば次のようである．先と同様に x-t 座標に累加需要交通量直線と2本の経路の累加流出交通量直線をそれぞれ描く(図-7)．任意の時刻において t 軸に垂線を引き，それと2本の累加流出交通量 $\overline{AD}$，$\overline{OC}$ との交点をそれぞれF，Gとおく．点Gを通り t 軸に平行な直線と，点Fを通り $\overline{AB}$ に平行な直線を引き，その交点をPとおく．この点Pが描く軌跡が2経路へ分流するときの動的等時間原則に基づく各経路への配分交通量を与える．なぜならば図-7において任意時刻 τ に到着した車に対して経路1及び2の走行時間はそれぞれ線分 $\overline{PG}$，$\overline{PF}$ の t 軸への写影長で与えられ，図から明らかなようにこれらが等しくなるためである(等時間原則が成立している)．ただし x の初期値が点Eで与えられているので

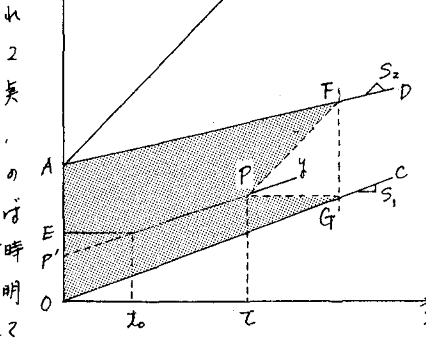

図-7. 図解による動的等時間原則配分(その1)

（$m_1/S_1 > m_2/S_2$ のとき点Eは必ず図中の点P'より上に存在する）。時刻t_0まではこの配分曲線はt軸に平行な直線となる。ここにt_0は $t_0 = (m_1S_2 - m_2S_1)/S_1q$ で与えられる。また時刻t_0以降の配分曲線の勾配は $S_1q/(S_1+S_2)$ となることが導ける。

以上の結果をまとめると次のとおりである。

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq t < t_0 \text{ のとき} \\ \quad u_1 = 0, \quad u_2 = q \\ t_0 \leq t \text{ のとき} \\ \quad u_1 = \dfrac{S_1}{S_1+S_2}q, \quad u_2 = \dfrac{S_2}{S_1+S_2}q \end{array}\right\} \quad (17)$$

○ $m_2/S_2 > m_1/S_1$ の場合

この場合は点Eが点P'より下に存在し，最初経路1の方にすべての需要交通量が流れる。したがって配分曲線は時刻0からt_0'までは点Eを通りABに平行な直線で表わされることになる。このときのt_0'は $t_0'=(m_2S_1-m_1S_2)/S_2q$ で与えられる。

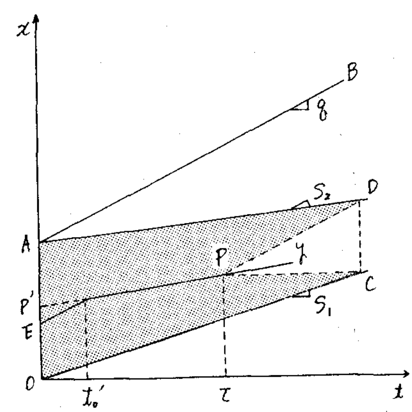

図-8. 図解による動的等時間原則配分(その2)

以上の結果をまとめると（図-8），

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq t < t_0' \text{ のとき} \\ \quad u_1 = q, \quad u_2 = 0 \\ t_0' \leq t \text{ のとき} \\ \quad u_1 = \dfrac{S_1}{S_1+S_2}q, \quad u_2 = \dfrac{S_2}{S_1+S_2}q \end{array}\right\} \quad (18)$$

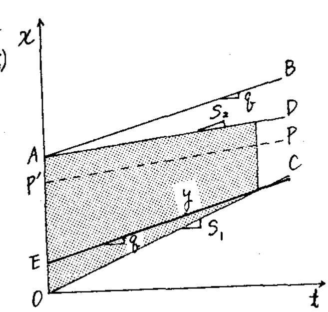

図-9. 図解による動的等時間原則配分(その3)

○ $m_2S_1 - m_1S_2 > m_2q$ の場合（図-9）。

このケースは点Eを通りABに平行な直線とPの軌跡線$\overline{PP'}$が陰影部分内で交点をもたない場合であって，このときは制御時間中常に

$$u_1 = q, \qquad u_2 = 0 \qquad (19)$$

が成立する。またこのときは図から明らかなように等時間原則配分は総走行時間最小化配分の1つの解となっている。

• $m_1S_2 - m_2S_1 > m_1q$ の場合（図-10）。

この場合は点Eを通りt軸に平行な直線とPの軌跡線$\overline{PP'}$が陰影部分内で交点をもたない場合であって，このときは常に

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = q \qquad (20)$$

が成立し，このときも等時間原則配分が総走行時間最小化配分の1つの解となっている。

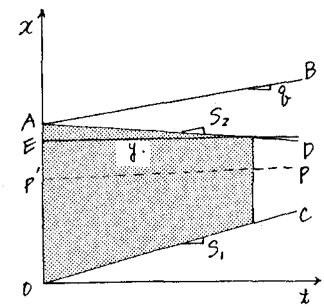

図-10. 図解による動的等時間原則配分(その4)

5. 動的交通量配分問題の一般的解法

q, S_1, S_2が一定値をとると仮定した場合は4で示したような図解によって解くことも可能であるが，3で示した一般的な動的交通量配分問題を解くことは困難である。さて3で示した一般的な問題を振りかえってみると，問題は数学的にいえば連立微分方程式系で与えられる状態方程式の下で積分形で与えられる評価関数を最適化する問題として定式化されている。したがってこの問題は最大原理問題となりその一般的な解法が得られることになる。実際の問題においては状態方程式が非線形となることが多いので，問題を離散化して離散型最大原理によって解くことが必要となる。最大原理を採用して動的総走行時間最小化問題を解いた例が既に報告されている。[4]

ところで動的等時間原則配分問題については，3で示したように評価関数の積分範囲が経路ごとに異なってくるため，このままでは最大原理を適用できない。そこで図-5に示した動的等時間原則配分の評価関数を図-11に示すような部分AとBに区分し，さらにBの部分を三角形で近似することにすると

$$J=\int_0^t (x_1+x_2)\,dt+\frac{1}{2S_1^*}x_1^2(t)+\frac{1}{2S_2^*}x_2^2(t) \tag{21}$$

となり，Bolza型の最大原理の問題となって解法が得られることとなる。

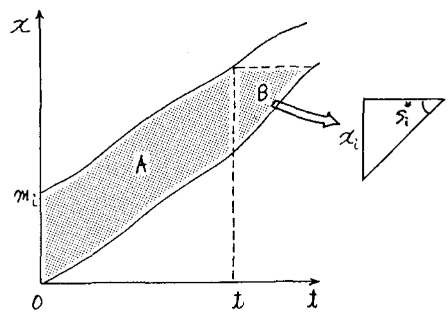

図-11　評価関数の近似

6．多種OD問題への拡張

本文では1OD 2経路の最も簡単なネットワークフローについて考えてきたが，これらの議論は multi-origin — one destination の問題にはそのまま適用できる。しかし multi origin — multi destination のネットワークフローにはこのままでは適用できない。多種OD問題への拡張に関しては，ODの種類ごとに状態方程式を考えてそれらを重ね合わせる方法，ネットワークフローをマルコフ流とみなし分岐点での推移確率を導入し，これを計算結果によって繰り返し計算で求める方法等が考えられるが，いずれにせよその具体的解法は今後の課題である。

7．あとがき

本文では動的交通量配分問題を取りとげ，特に動的総走行時間最小化配分と動的等時間原則配分についてその定式化を行ないその解法について述べた。動的交通量配分問題は特に等時間原則配分に適しており，実用的にも意味のある配分理論となる。バイパスへの迂回制御や最近注目されつつある分流制御（diversion control）[5]などネットワークフローの最適制御問題への適用などが考えられよう。

参考文献

1). J. G. Wardrop "Some theoretical aspects of road traffic research" Proc. Inst. Civ. Eng. 1, Part II, pp 325-378, (1952)

2). N. O. Jorgensen "Some aspects of the urban traffic assignment problem" I.T.T.E. Graduate Report, University of California, Berkeley (1963)

3) K. C. Chu and D. G. Gazis "Dynamic allocation of parallel congested traffic channels" Proc. of 6th Int. Symp. on Trans. and Traffic Theory (1974)

4) 木下浩，佐藤佳部，松井寛 "動的交通量配分に関する一考察" 土木学会中部支部研究発表会 (1981)

5). C. R. Berger, R. L. Gordon and P. E. Young "Single point diversion of freeway traffic" T.R.R. No.601 (1976)