

不動点アルゴリズムによる交通均衡の計算法

岐阜大学工学部 正 員 加藤 晃
岐阜大学工学部 正 員 宮城俊彦
岐阜大学工学部 学生員 ○野々山弘紀

1. はじめに

本研究の目的は、ネットワーク均衡問題に対し不動点アルゴリズムの考え方に基づく新しい均衡条件の誘導と、その解法を提案することである。不動点原理に基づく均衡モデルとしては、交換経済における均衡モデルがよく知られている。しかし、本研究における交通均衡の定義は、経済均衡とは本質的に異なるものである。交通における均衡とは、通常 Wardrop 均衡と呼ばれ、次のような交通状況をさしている。すなわち“実際に利用されている経路の走行時間はすべて等しく、利用されていない経路のそれよりも小さい”⁽¹⁾ というものである。また、Wardrop 均衡は利用者が新たな経路を選択することによって、より利益をあげることができないような状況を表現しているという意味で Nash 均衡とも呼ばれている⁽²⁾。

ところで、Wardrop 均衡と不動点原理がどのように結びつくのかという点で、重要な論文が Smith により発表された⁽³⁾。Smith による証明は Brouwer の不動点原理を用いているが、Brouwer の不動点原理とは次のように説明できる⁽⁴⁾。“単体から単体自身への連続写像を考えた時、少なくとも1つの不動点が存在する”というものである。詳しい証明は3章で述べられるが、上述した不動点が本研究で対象とする Wardrop 均衡を満足する交通分布となる。

従来の Wardrop 均衡モデルは Beckmann や Jorgensen による均衡モデルにみられるように、非線型凸計画問題^(5,6)として定式化し、その結果得られる均衡解が Wardrop 均衡を満足するというような説明がなされた。しかし、この場合には積分可能条件が成立するパフォーマンス関数や、需要関数が前提となっていることに注意する必要がある。だが、実際の交通状況においては、たとえば交差点における交通流にみられるように、ある道路区間の走行コストはその区間のみの交通量だけでなく、他方向の交通量によっても影響を受ける。このとき、Jorgensen のモデルにおいては、積分可能になるとは限らない。同様に、現実的な需要関数を用いた場合には、Beckmann モデルにおける逆需要関数の存在の仮定に疑問が残る。また、競合モデルの場合においても可積分条件が問題を複雑にする。ここでいう競合モデルとは、あるモードもしくはある地域の需要量が、そのモードもしくはその地域の交通サービス水準だけでなく、他モード・他地域の交通サービス水準の影響を受けると想定したモデルである。事実こうしたモデルを扱う具体的な解法は、十分発表されていない。それに対し、不動点アルゴリズムに基づく方法は、Wardrop が述べた均衡条件を直接解こうとするものであり、したがって、点対集合関数に対して適応可能である。この意味において、従来の数値最適化手法を用いる場合より、より現実的な交通均衡をモデル化することが可能であると考えられる。

本研究は、こうした目的のため不動点アルゴリズムに基づく交通均衡条件の誘導と、解法を提案しようとするものである。ただし、ここで述べられる均衡条件は、Smith による Wardrop 均衡の不動点原理による存在定理を前提とし、不動点アルゴリズムと Wardrop 均衡の関係を述べたものである。しかし、本研究はまだ初歩の段階にあるため、パフォーマンス関数に関し、上述のような点対集合関数は扱っておらず、従来のようなパフォーマンス関数を前提としている。

2. 交通均衡問題の変遷

交通均衡問題を最初に提唱したのは Wardrop であろう⁽¹⁾。彼は各道路区間の走行時間が交通量によって変化する

ことを前提とし、利用者は起終点間の所用時間が最小となる経路を選ぶという仮定から等時間原則を発表した。彼自身はこの等時間原則を“走行時間は実際に使用される経路についてすべて等しく、使用されないどの経路のそれよりも小さい”と述べている。また“交通の状態は、最終的には新しい経路を選択することによって走行時間を小さくすることができないような平衡状態に到る”と考えた。これは、今日 Wardrop 均衡と呼ばれ、この等時間原則も Wardrop の第 1 原則と呼んでいる。その後多くの均衡問題に対する研究が発表されているが、均衡の概念はこの Wardrop の第 1 原則によるところが多い。

Wardrop 均衡が提唱されて以来、交通均衡問題を扱った論文が多く発表されているが、これらの論文は大別すると以下の図 1 のように表わることができる。

まず、数理最適化手法を用いた交通均衡問題の解法は大きく 2 つに分けられる。その 1 つは需要変動型の交通均衡問題である。需要変動型の交通均衡モデルは Beckmann によって提案された⁽⁶⁾。彼は Wardrop 均衡を制約条件付き非線形凸計画問題として定式化し、また均衡解の満足すべき Kuhn-Tucker 条件が Wardrop の第 1 原則を満足することを確認した。その後、非線形最適化理論の発達と共に Frank-Wolf 法、勾配法、D.F.P (Davidon-Fletcher-Powell) 法などを用いた論文が発表さ

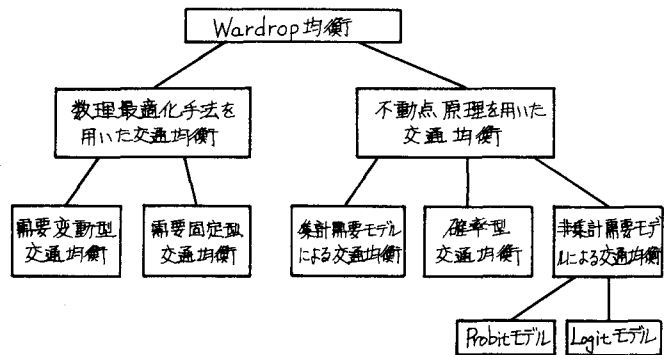


図-1 交通均衡問題を扱った論文の分類

れている。この分野での論文のレビューは加藤・宮城において述べられている。⁽⁷⁾

数理最適化手法を用いた交通均衡問題の解法のもう 1 つの分野、つまり需要固定型交通均衡問題については、1963 年に Jorgensen によって数理最適化問題として定式化されたが、この分野においてはヒュースティックな解法を始め、多くの解法が提案され、また論文の紹介も多くされているので、ここでは論文のレビューは割愛する。その後数理最適化手法の発達と共に精度が高く、また計算時間の早いアルゴリズムの試みが行なわれているが、著者らの知る限りでは井上博司の勾配射影法による計算法が最も効率的であると思われる。⁽⁸⁾

以上が数理最適化手法を用いた交通均衡問題の解法についての概略であるが、交通均衡問題について考えたもう 1 つの大きな流れがある。それは、Wardrop 均衡を不動点原理から説明し、求めようとするものである。この考え方は、数理最適化手法を用いた目的関数の最小化問題として問題をとらえているのではなく、Wardrop の均衡原理そのものを直接計算することも意図したものである。この方法は、計算の効率性を目的としていることとさせることながら、Beckmann や Jorgensen とは異なる方法で均衡解にアプローチしている点で興味深い。

ところで、図-1 に示した不動点原理を用いた交通均衡問題の分類では、これを 3 つのモデルに分けているが、これらは集計型需要モデルとロジットモデルの場合を除いていずれも十分に確立されたモデルではなく、その分野で不動点原理が有効であろうと示されたものである。この流れにおいてまずあげられる研究論文として Almond⁽⁹⁾ がある。これは、不動点原理を明示的に示してはいないがそれに類似の考え方に基くもので、経験的にパラメータを選択することによって all or nothing な配分手法によっても解が収束することを述べたものである。彼のアプローチは不動点原理の考え方に近い発想がある。次に Pereira の論文をあげておこう。彼は この論文において Scarf の不動点アルゴリズム⁽¹⁰⁾によって、交通における均衡解が求められると示唆している。不動点原理による Wardrop 均衡の数学的定式化は Smith⁽³⁾ によって行なわれた。しかし、彼は解法については述べていない。具

体的な解法について示したものに Mathtech, Inc. による研究報告と Asmuth による論文がある。^{(11), (12)} これらの論文によって初めて不動点原理より均衡解を求めるアルゴリズムが明らかになったが、アルゴリズム上の操作方法とネットワーク上の交通流との結び付きについては不明瞭である。

さて、次に確率的な交通配分へのアプローチについて述べよう。この分野での論文はまだ数少なく、著者らの知る限りでは Vile⁽¹³⁾ らの論文があるのみである。彼らは以下にあげる2点を満足すれば、この分野でも不動点原理による説明が可能であると述べている。

- (a) リンクコストのベクトルが閉じている
- (b) 配分写像が連続である

第1の条件(a)については、通常のコスト関数によれば満足されるものである。つまり、一般的に C_a は、ゼロフロー時に於いてすべてのリンクに対し最小のコストが定義される。また、もし最大のコストが明確に定義されない場合は、予期されるコストの範囲を越えて最大値を人為的に定めてやればよい。よって任意のリンクに於いて閉じた範囲が定められる。第2の条件(b)については、これを満足させるアルゴリズムを発見する必要があるが、少なくとも次の2つの条件が要求される。(i) リンク a の交通量 $\{V_a\}$ は、リンク a のコスト $\{C_a\}$ の連続関数である。(ii) リンク a のコストの微係数 $\{C'_a\}$ は、リンク a の交通量 $\{V_a\}$ の連続関数である。条件(i)は、用いられる関数が連続関数であれば一般的に満足される条件である。条件(ii)は、 $C_a(V_a^{\max}) \rightarrow \infty$ となるような関数の場合には成立しなくなるが、上述の方法でこの問題点は解消できるとであろう。したがって通常の交通配分に用いられている関数を用いれば不動点は定められるように思われる。Vile⁽¹³⁾ らは、これを例をあげて説明している。

さて最後に、非集計需要モデルを前提とした交通均衡の不動点原理の適用について述べよう。この場合、交通均衡を定義するためには、非集計需要関数を集計化するのか、あるいは需要関数とパフォーマンス関数の両方を非集計化するのかという大きな問題点が残る。非集計需要モデルの代表的なものに Logit モデルと Probit モデルがある。まず、Logit モデルの場合について述べよう。この分野では Hasan と Talvitie⁽¹⁴⁾ の論文があげられる。この論文ではパフォーマンス関数を非集計化しており、均衡解は Scarf のアルゴリズム⁽¹⁰⁾ を用いているが、ただし交通回廊という特殊な条件に適用したものである。もう一方の Probit モデルを前提としたアプローチには、Sheffi と Daganzo⁽¹⁵⁾ による論文があげられるが、彼らは不動点原理による厳密な証明はしておらず、不動点原理に類似した考え方を述べているに止まる。しかし、不動点原理が発想の根底にあることは確かであろう。

現在では、数理最適化手法を用いた交通均衡問題の解法が主流となっているが、しかし、この場合積分可能となるような関数にモデルが限定されるため、適用範囲が限定される。また、現在注目集めている非集計需要モデルによって交通均衡を求めたいためには、不動点アルゴリズムが有効であると考えられる。

3. 不動点アルゴリズムによる需要固定型均衡問題の解法 — 単一ODの場合 —

まず、次の例を考える。

今、A市とB市を結ぶ3本の経路を考え、A市からB市への交通量を $D=10$ (台) とする。また、経路1, 2, 3のパフォーマンス関数は

$$\left. \begin{aligned} \text{経路 1. } C_1 &= 1.0 + X_1 \\ \text{経路 2. } C_2 &= 3.0 + 0.5 X_2 \\ \text{経路 3. } C_3 &= 5.0 + 0.25 X_3 \end{aligned} \right\} (1)$$

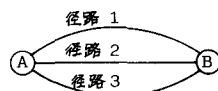


図-2 模擬ネットワーク

で与えられる単調増加関数であるとする。

以後の記述は不動点アルゴリズムを用いて均衡解を求めるプロセスを、この例題に基づいて展開されるものである。今後使用する記号について説明しておく。

経路1, 2, 3上の交通量を各々 X_i ($i=1, 2, 3$) とすると、経路交通量ベクトル X は

$$X = (X_1, X_2, X_3) \quad (2)$$

で与えられ、また経路交通量は次式を満足する。

$$\sum_{i=1}^N X_i = D \quad (N: \text{経路数}) \quad (3)$$

重心座標によるフローの表現

式(3)を次のように規格化し、このときの $x_i (i=1, 2, 3)$ を単位経路交通量と呼ぶ。

$$x_i = \frac{X_i}{D} \quad (i=1, 2, 3) \quad (4)$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 1, \quad x_i \geq 0 \quad (5)$$

が成立している。

単位交通量 x_i を表示するのに、図-3 に示すような重心座標 (Barycentric coordinates) を用いると便利である。ここで (5) 式を満足するような x から成る集合 S を単体と呼ぶ。

$$S = \{x \mid \sum_{i=1}^3 x_i = 1, x_i \geq 0\} \quad (6)$$

図-3 に示された単体の次元は $(N-1)$ で与えられる。ここで N は経路数であり、 -1 は式(3)の制約式のために減じられる。このとき端点の数は $N-1+1 = N$ である。

一般に、単体 S 上の点 x は、その単体の端点の座標を $V^1, V^2, \dots, V^N$ とするとき、次式で与えられることに注意する。

$$x = x_1 V^1 + x_2 V^2 + \dots + x_N V^N \quad (7)$$

ただし、 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_N \geq 0$ かつ $x_1 + x_2 + \dots + x_N = 1$

ここで $x_1, x_2, \dots, x_N$ は点 x の重心座標と呼ばれる。さらに $\delta_{\ell j}$

を次式のように定義すれば、リンクフロー、ルートコストを求める式は、式(9)、(10)によって表わされる。

$$\delta_{\ell j} = \begin{cases} 1 & \text{if link } \ell \text{ is on path } j \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (8)$$

$$f_{\ell}(x) = (\sum_j \delta_{\ell j} x_j) D \quad (9)$$

$$C_{\ell}(x) = \sum_{\ell} \delta_{\ell j} C_{\ell}(f_{\ell}(x)) = \sum_{\ell} \delta_{\ell j} C_{\ell}((\sum_j \delta_{\ell j} x_j) D) \quad (10)$$

ここで $C_{\ell}(f_{\ell}(x))$ はリンク ℓ 上を交通量 f_{ℓ} が通過したときのコストを表わす。

単体分割

図-3 は 1 個の単体であるが、これは $n=2, 3, \dots$ というように次元を大きくすることによって、 n 次元に分割 (barycentric subdivision) することができる。たとえば $n=5$ としたときの分割図は図-4 のように示される。このとき、分割された単体上の端点の座標は次式で示すことができる。

$$x = \frac{1}{n} (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (11)$$

ただし、 $\text{all } x_i \geq 0, \sum x_i = n$

ところで、単体の大きさを示す指標をダイアメータ Δ と呼ぶことにすると、分割された小単体 (セルと呼ぶ：図-4 の斜線部分) のダイアメータは Δ/n であり、したがって分割数 n を $n \rightarrow \infty$ とする

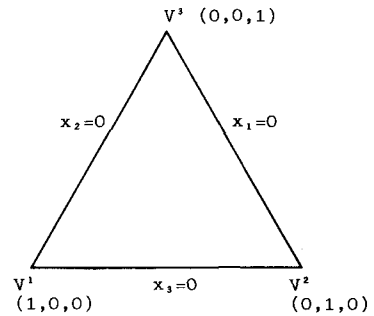


図-3 重心座標

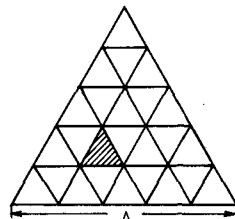


図-4 $N=3, n=5$ における単体分割

と、セルは点に収束する。このように、セルのダイアメータは均衡解を求める場合の精度を示す指標となる。したがって、 n を大きくすれば精度が上がるし、またその逆も言える。これは計算時間と精度のトレードオフの問題となる。

分割数を n とすると、小単体の数 S_n は次式によって与えられる。

$$S_n = n^{N-1} \quad (12)$$

均衡とラベル付け

不動点アルゴリズムによる均衡解を求めるため、端点 X につけるラベル付けの規則について説明しておこう。ラベル付けは次の規則にしたがって行なわれるものと規定する。

規則 1

交通流 X に対し

$$C_k(X) = \max_{j, X_j > 0} C_j(X) \quad (13)$$

ここに、 $C_j(\cdot)$ は X が与えられた時の経路 j の走行時間を表す。

このとき、 X に対応した単位交通量 x でのラベルは

$$L(x) = h \quad h \in P \quad (14)$$

で与えられる。なお、 P は、経路番号の集合 $P = \{1, 2, \dots, N\}$ である。

たとえば上述の例において

$$X = (X_1, X_2, X_3) = (4, 4, 2)$$

とすると、 $x = (x_1, x_2, x_3) = (0.4, 0.4, 0.2)$ であり、このとき

$$C_3 = \max C_j(X) = \max(C_1, C_2, C_3) = \max(5, 5, 5.5)$$

であるから $L(x) = 3$ とラベル付けをする。

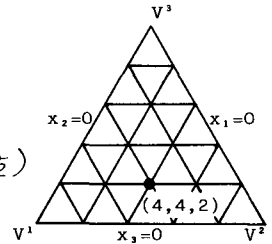


図-5 端点とラベル付け

定義

分割された小単体(セル)上の端点のラベルの集合 ω が

$$\omega = \{1, 2, \dots, N\} \quad (15)$$

と、 N 個の異なったラベル付けがされた時、 ω は完備であるという。

さて次に、規則1に従うラベル付けを行ったとき、分割された小単体(セル) S の中には必ず完備なラベルを持つ単体が存在することを示しておこう。しかし、その前にWardrop均衡と、不動点の存在と、完備なラベル付けとの関係についてふれておかなければならない。

Wardrop均衡は、Browerの不動点原理によ、て不動点をもつことが多くの研究者によって明らかにされており(特にSmithの論文参照)、また、Spernerの構題によ、て不動点の存在と完備なラベル付けとの関係も明らかにされている。したがって、ここではBrowerの不動点原理を直接用いて交通均衡解の存在を証明するのではなく、Wardrop均衡ならば不動点をもつという事実を利用し、

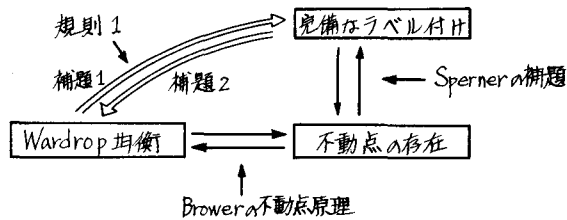


図-6 Wardrop均衡、不動点の存在、完備なラベル付けの関係

Wardrop 均衡ならば上述の規則 1 に従うラベル付けは完備であることを示す。またそれと同時に、完備なラベル付けが行なわれた場合、それが均衡解であることを示す。図-6 は、以上述べたことから図示したものである。

補題 1

$\bar{X}$ を均衡解とするならば、そのとき $\bar{X}$ の ε -近傍において規則 1 に従う完備なラベルが存在する

(証明) まず、均衡解を満足するすべてのフローが正の値をもつ場合を考える。すなわち $\bar{X} > 0$ の場合、 $\bar{X}$ は均衡解であるから次式が成立する。

$$\text{const} = \min_{j, \bar{X}_j > 0} C_j(\bar{X}) \quad (16)$$

したがって $\bar{X} > 0$ である任意の経路に対し

$$C_j(\bar{X}) \geq \text{const} \quad \forall j \in P \quad (17)$$

となる。このことは $G(\cdot)$ が連続な単調増加関数であること、かつ $\bar{X}$ の ε -近傍を考えたときには正の値をもつ均衡流によって与えられる OD 間所要時間は、微少に単位経路交通量を変えることによって、異なる経路に対し、必ず/回は最大値を付与することができることを意味している。

以上のことを例をあげて説明しよう。図-7 は、真の均衡解 $\bar{X}$ (点で示される) を内包するセルの状態を示している。真の均衡解 $\bar{X}$ においては各々の経路コストはすべて等しく $C_1 = C_2 = C_3$ の状態である。ここでセルの端点 v^1, v^2, v^3 について考えてみよう。

端点 v^1 は、均衡点 $\bar{X}$ に対し X_2, X_3 が減少し、 X_1 が増加する方向にある。したがって、経路 1 はコストが増加し、逆に経路 2, 3 はコストが減少する。よって、均衡点の状態 ($C_1 = C_2 = C_3$) に対し、端点 v^1 では $C_1' > C_1 > C_2$, $C_1' > C_1 > C_3$ の関係となり、

結局、端点 v^1 にはラベル 1 が付けられることになる。他の端点 v^2, v^3 についても同様のことがいえ、端点 v^2 にはラベル 2 が、端点 v^3 にはラベル 3 がつけられる。よって均衡解を内包するセルには完備なラベルが付けられるのである。

次に均衡解がゼロの値を含む場合を想定してみる。こうした状況は以下の式で書き表わすことができる。

$$\bar{X}_h = 0 \quad \text{and} \quad C_h(\bar{X}) \geq \min_{j, \bar{X}_j > 0} C_j(\bar{X}) \quad (18)$$

つまり真の均衡解が境界線上に存在する場合である。一般性を失うことなく $X_1 = 0, X_2 > 0, X_3 > 0$ の場合を考えてみよう。この場合、真の均衡解 $\bar{X}$ は図-8 の端点 v^3, v^2 を結ぶ境界線上 (・印) に存在する。このとき、各端点のラベル付けは以下のように行なわれる。

いま、式 (18) より

$$\bar{X}_1 = 0 \quad \text{かつ} \quad C_1(\bar{X}) \geq C_2(\bar{X}) = C_3(\bar{X}) \quad (19)$$

が成立している。 v^3 に対応する交通状況は $\bar{X}$ にくらべ X_3 が増加し、 X_2 が減少した状況である。したがって、所要時間が最大の経路にラベルを張るという規則 1 に従えば、端点 v^3 にはラベル 1 か 3 が張られる。同様に端点 v^2 については、 X_2 が増加し、 X_3 が減少するため、

そこにはラベル 1 か 2 が張られることになる。しかし、いずれの場合にも $X_1 = 0$ であるから、結局、端点 v^2 にはラベル 3 が、端点 v^3 にはラベル 2 が張られることになる。より一般的に、端点 v^i, v^j で結ばれる線分上のラベルは必ずしも j となる。この事実、一般的な不動点アルゴリズムで知られているラベル付けによる結果

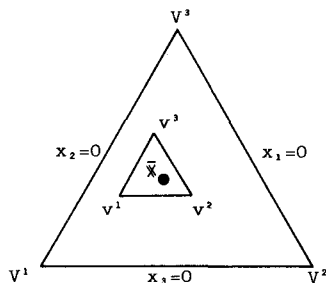


図-7 真の均衡解を内包するセルの状態

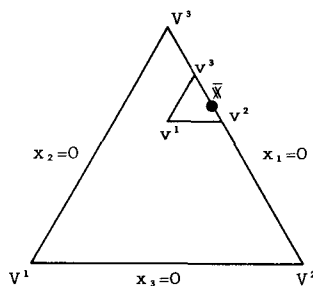


図-8 真の均衡解が境界線上に存在する場合

に一致するものである。さて、端点 v^1 では x_3, x_2 が減少し、 x_1 が増加するため、当然のことながらラベルは1となる。このように、式(18)のようにゼロフローを含む均衡解の場合にも完備なラベル付けが行なわれることが示される。

Q. E. D.

補題 2

単体 s の端点に完備なラベルがつけられたならば、そのとき s 上の端点は均衡解 $\bar{x}$ の ϵ -近傍点を与える。

(証明) 図-9に示すようにある1つの単体に対し、完備なラベル付けがされた場合、次のことを意味している。

$$\left. \begin{aligned} x_1 > 0 \quad \text{かつ} \quad C_1 &= \max_{j: x_j > 0} C_j \quad \text{よって} \quad C_1 \geq C_2, C_1 \geq C_3 \\ x_2 > 0 \quad \text{かつ} \quad C_2 &= \max_{j: x_j > 0} C_j \quad \text{よって} \quad C_2 \geq C_1, C_2 \geq C_3 \\ x_3 > 0 \quad \text{かつ} \quad C_3 &= \max_{j: x_j > 0} C_j \quad \text{よって} \quad C_3 \geq C_1, C_3 \geq C_2 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

したがって、式(20)の意味するところは、均衡解 $\bar{x}$ の ϵ -近傍にあり

$$x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0 \quad \text{かつ} \quad C_1 = C_2 = C_3 \quad (21)$$

であり、したがって得られた単体経路交通量 $\bar{x}$ に対応する $\bar{x}$ は均衡解である。

Q. E. D.

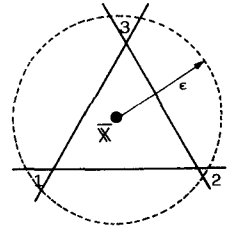


図-9 完備なラベルと均衡解 $\bar{x}$ の ϵ -近傍

では、完備なラベル付けがされなかったセルはどういった状況にあるのかも、図-10の斜線を引いたセルを用いて説明しよう。

このセルの端点には、ラベルの1と3が付けられている。すなわち、ラベルの1が付けられたところでは

$$x_1 > 0 \quad \text{かつ} \quad C_1 = \max_{j: x_j > 0} C_j \quad \text{よって} \quad C_1 \geq C_2, C_1 \geq C_3 \quad (22)$$

ラベルの3が付けられたところでは

$$x_3 > 0 \quad \text{かつ} \quad C_3 = \max_{j: x_j > 0} C_j \quad \text{よって} \quad C_3 \geq C_1, C_3 \geq C_2 \quad (23)$$

となっている。

式(22), (23)より次式が導き出せる。

$$C_1 = C_3 \geq C_2 \quad (24)$$

しかし、(24)式の第2の関係式において、等号が成立しないことを示そう。

具体的に端点 v^1 から v^2 へ交通流を変化させた状況を考えてみよう。この辺上では x_1 は変化しない。しかし、 v^1 から v^2 へ向うことにより x_3 は減少し、 x_2 が増加している。ときかめらず v^2 にラベル3が乗られているということは端点 v^1 において次式が成立していたことを意味している。

$$C_3 > C_2 \quad (25)$$

その他の11かたの端点間の交通流の変動パターンを想定しても式(24)の関係式は変わりない。よって式(24)と式(25)の関係と同時に満足しなければならないので、結局図-10の状況は

$$C_1 = C_3 > C_2 \quad (26)$$

を意味し、均衡解($C_1 = C_2 = C_3$)を与えていない。

均衡解を得るためには、 C_2 が増加する方向、つまり、完備なラベルを持ったセルの方向への移動を考えなければならない。

このためには、こうしたセルからセルへの移動は、図に示すピボッティングという操作によって行うことができる。

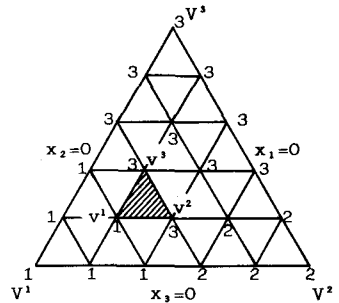


図-10 完備なラベルをもたないセルの状況

ピボッティング

見出しラベルをもったセルを求める過程において、ピボッティングという操作を必要とするが、これは次のように定義できる。

定義

ピボットとは、単体内の任意のセルにおいて、セルを構成するある1つの端点を削除し、残った端点より作られる面を通して、その面を共有するセルの新しい端点を決定することである。

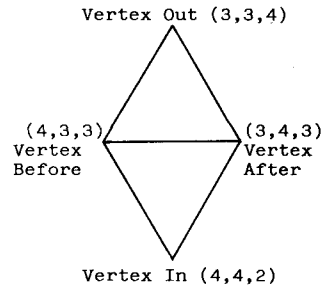


図-11 ピボッティングの定義

この操作は図-11 に示される。

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vertex Before (4,3,3)} \\ \text{Vertex After (3,4,3)} \\ \text{Vertex Out (3,3,4)} \end{array} \right\} \longrightarrow \text{Vertex In (4,4,2)}$$

$$\text{Vertex In} = \text{Vertex Before} + \text{Vertex After} - \text{Vertex Out} \quad (27)$$

さて、ピボッティングを以上のように定義し、このピボット操作と、規則1にしたかうラベル付けによって、見出しラベルをもったセルが求められることを示そう。

単体を $m=10$ に分割した場合を、図-12 を用いて説明しよう。まず単体内の任意のセルとして、端点 $x: \frac{1}{10}(4,4,2), \frac{1}{10}(3,5,2), \frac{1}{10}(3,4,3)$ をもつセルを考える。ここで、端点の座標を行列表示する。行は、各端点の座標を表わしている。この場合の座標は式(11)における $\bar{a}$ に対応していることに注意する。また、列は各経路を表わす。

	単位経路交通量			経路コスト			ラベル
	経路1	経路2	経路3	C_1	C_2	C_3	
端点1	4	4	2	5	5	<u>5.5</u>	3
端点2	3	5	2	4	5.5	<u>5.5</u>	3
端点3	3	4	3	4	5	<u>5.75</u>	3

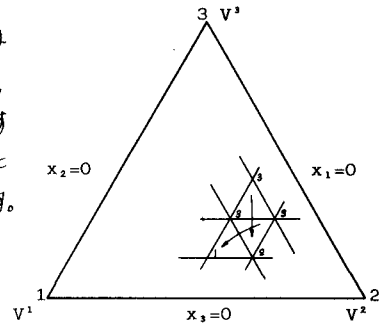


図-12 ラベリングとピボッティングによる見出しラベルをもったセルの追求

規則1のラベル付けにしがえは、それぞれの端点には3,3,3とラベルが付けられる。すべての端点にラベルが3と付けられたということは、経路3を通るコストが他の2本の経路のコストに比べて高過ぎ、また均衡解ではないことを示している。したがって、ピボット操作によって経路3のコストが減少する方向へと端点を移し、新しいセルを求める。この場合、3行目、つまり、端点(3,4,3)の経路3のコストが最も高いので、3番目の行を削除し、ピボット操作

$$\text{Vertex After (第1行)} + \text{Vertex Before (第2行)} - \text{Vertex Out (第3行)} \quad (29)$$

によって新しい端点 Vertex In (第3行) を求める。

$$\left[\begin{array}{ccc} 4 & 4 & 2 \\ \leftarrow 3 & 5 & 2 \\ \rightarrow 4 & 5 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 5 & 5 & \underline{5.5} \\ 4 & 5.5 & \underline{5.5} \\ 5 & 5.5 & 5.25 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 2 \end{array} \right] \quad (30)$$

新しいセルの端点にはラベル3,3,2がつけられる。

この場合、神題2の説明で述べた式(28)に相当し、 $C_3 = C_2 > C_1$ の場合である。したがって C_1 の値が増加する方向へ端点を移動させなければならない。ここで、重複したラベルが付けられた第1行、第2行において、

経路1のコストで最小値をもつ第2行をピボットオフ(削除)し、ピボット操作によって新しい端点を持ったセルを求める。その結果

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 & \underline{5.5} \\ \underline{6} & 5 & 5.25 \\ 5 & \underline{5.5} & 5.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

が得られ、このセルにおいて完備なラベル付けがなされた。これは、補題2より、このセルが均衡解にはかならないことを意味している。また、このときの均衡解は、このセルを構成する端点の中の1つによって与えられる。たとえば、端点 $v^1(5, 4, 1)$ が選ばれたとしたならば、この時の交通量は、

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 \times D = \frac{5}{10} \times 10 = 5 \text{ (台)} \\ X_2 &= x_2 \times D = \frac{4}{10} \times 10 = 4 \text{ (台)} \\ X_3 &= x_3 \times D = \frac{1}{10} \times 10 = 1 \text{ (台)} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{aligned}} \right\} (32)$$

また、経路走行時間は

$$\begin{aligned} C_1 &= 1.0 + X_1 = 6 \\ C_2 &= 3.0 + 0.5 X_2 = 5 \\ C_3 &= 5.0 + 0.25 X_3 = 5.25 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{aligned}} \right\} (33)$$

となる。

完備なラベルと精度

完備なラベルをもったセルから得られる均衡解は、真の均衡解の ε -近傍であることはすでに述べたが、さらに詳しく説明すると以下のようになる。

完備なラベル付けがされたセルから得られる均衡解は、真の均衡解(完備なセルの内点で表わされる)より、セルのダイアメータ以上、つまり Δ/n 以上異なることはない。

上述のことより均衡解の精度は Δ/n に依存する。したがって、 n を適当に選ぶことによって真の均衡解に任意に近づくことができる。

$N=3, n=10$ の場合の例で説明すると、端点 $v^1(4, 4, 2)$, $v^2(5, 4, 1)$, $v^3(4, 5, 1)$ はそれぞれラベル3, 1, 2 が付けられ完備である。また、この場合は $\Delta=D$ としているので真の均衡解より $\Delta/n=1$ 以上異なることはない。しかし、この例の結果では3本の経路の等時間性の精度は、余り高いものとはいえない。このように、均衡フローの解の精度はセルのダイアメータで表現されるが、これは必ずしも等時間性の精度を表わす指標とはならないため、等時間性に関する別の規準を設ける必要がある。たとえば

$$|\max_i C_i - \min_i C_i| < \sigma \quad (34)$$

という規準を設け、 $\sigma=0.009$ とすると、前の計算例ではこの規準を満足しない。この場合、セルのダイアメータをさらに細かくとってより精度の高い均衡解を求める必要がある。このように所与の精度を満足しない場合に計算をやり直す手順を、再計算手順と呼び以下に説明する。

再計算手順

より真の均衡解に近い ε -近傍解を得ようとするには、 $n \rightarrow \infty$ としてセルのダイアメータ Δ/n をより小さく点に収束させればよい。つまり、単体法をより細かなセルに分割すればよいことになる。もし、 n に大きな値を代入すると、人為的に与える初期シンアレックス(単体内の1つのセルを表わす)が真の均衡解に近い場合には短い計算時間で解が得られるであろうが、真の均衡解はどこに存在するかかわらず、真の均衡解に近いセルを初期シンアレックスとして選ぶことは、偶然性にたよるしかない。一般的には、 n の値を大きくすればするほど、

初期ミニアレックスから均衡解（完備なラベルをもったセル）を求めるのに要するピボットニング操作の回数が増し、計算時間は長くなってしう。こうした問題を解決する1つの方法は、最初に適切な値（ $n=5 \sim 10$ くらい）を与えて、いくらか誤差は大きいかもしれないが、完備なラベルをもったセルを早く見つけ出し、見つけ出された完備なセルを新たな単体と考えて、その単体をさらに細かくして均衡解を求める方法である。この手順を再計算手順と呼ぶことにする。すなわち、再計算手順によって、均衡解の精度を任意に選択することができると。

フローチャート
最後に、以上に概要した不動点アルゴリズムを用いた需要固定型均衡問題のフローチャートをあげておく。

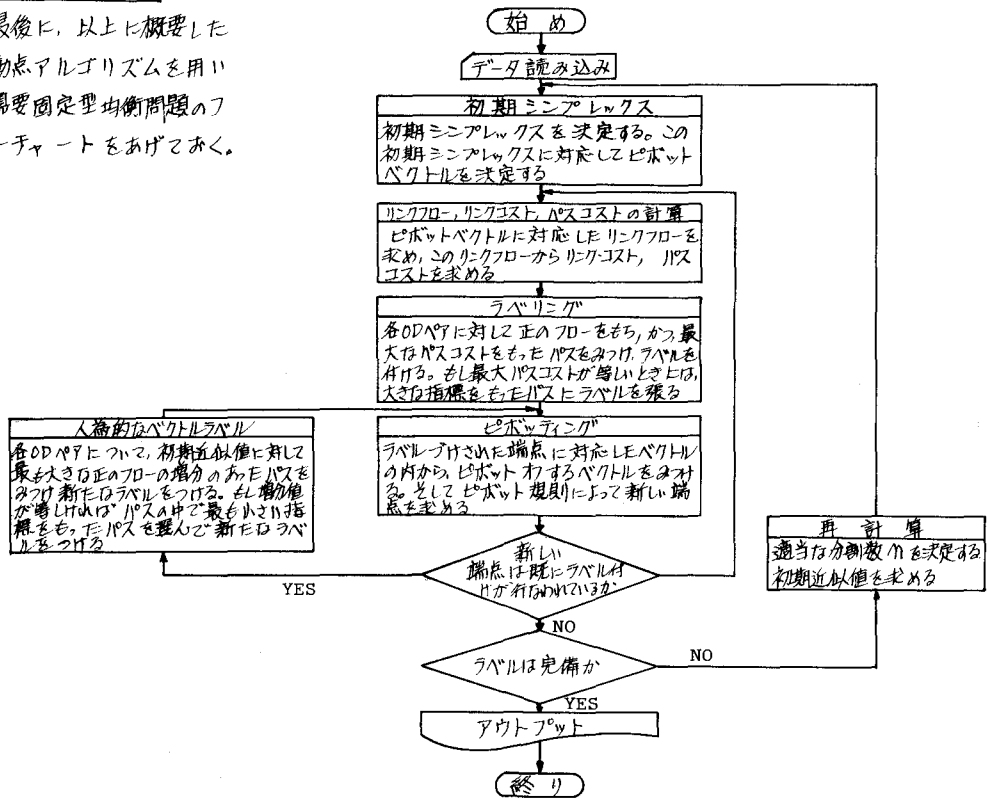


図-13 不動点アルゴリズムを用いた需要固定型均衡問題に対するフローチャート

4. 計算結果

3章で示した例題に対し、本研究で提案する不動点アルゴリズムによって得られた計算結果をここに示す。

例題に用いたネットワークは図-14 に示され、単一ODで、OD間に経路が3本存在する場合を想定した。また、A市からB市へ向う交通需要量として $D=10$ (台) を与えた。各経路のパフォーマンス関数は式(35)として与え、パス

$$\begin{aligned}
 \text{経路 1} \quad C_1(X) &= 1.0 + X_1 \\
 \text{経路 2} \quad C_2(X) &= 3.0 + 0.5 X_2 \\
 \text{経路 3} \quad C_3(X) &= 5.0 + 0.25 X_3
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

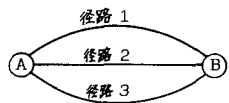


図-14 模擬ネットワーク

コスト $C(X)$ は交通量 X に対し、単調増加関数である。

まず、単体 S (ダイアメータ $\Delta=1$) を、次数 $n=10$ で、 $(n^{N-1}=10^2 \Rightarrow)$ 100個のセルに分割した。そして、初期シニアレックスとして端点 $v^1: \frac{1}{10} \times (4, 3, 3)$, $v^2: \frac{1}{10} \times (3, 4, 3)$, $v^3: \frac{1}{10} \times (3, 3, 4)$ と任意にセルを選んだ結果、完備なラベルが張られたセルの端点は以下に示すように求められた。

$$\left. \begin{array}{ll} \bar{v}^1: \frac{1}{10} \times (5, 4, 1) & \text{ラベル 1} \\ \bar{v}^2: \frac{1}{10} \times (4, 5, 1) & \text{ラベル 2} \\ \bar{v}^3: \frac{1}{10} \times (4, 4, 2) & \text{ラベル 3} \end{array} \right\} (36)$$

このセルの端点より、各経路の交通量、パスコスト、パスコストの最大値と最小値の差、及び、ネットワーク全体で費やされた総費用が計算される。その結果を表-1に示す。

しかし、この結果は $n=10$ とした場合の均衡解であって、均衡解の精度としては荒い値を示している。そこで、再計算手順によって n の値を大きくし、均衡解の精度が所与の値 σ より小さくなるまで、つまり次の規準を満足するまで計算をくり返した。

$$\left| \max_j C_j - \min_j C_j \right| < \sigma = 0.009$$
 この結果を表-2に示す。なお、括弧内の数値は真の均衡解を表す。この時、 n の値は 7654、そしてこの結果は、6回目目の再計算手順において求められた。

表-2の結果から、不動点アルゴリズムを用いた計算法によって、真値に十分近い均衡解が得られることが確かめられた。

5. おわりに

本研究は、交通均衡問題に対し、不動点アルゴリズムを用いた交通均衡の定義と、計算法を示したものである。本研究で定義された Wardrop 均衡は明らかに従来の定義とは異なっている。本研究での定義によれば、ラベル付けの規則が交通均衡の定義に大きく影響することは明らかであろう。ここでは、ラベル付けを最大コストをもつ経路との関係で定義したが、(しかし、不動点アルゴリズムによる交通均衡計算をより実用的にしていくためには、最小コストをもつ経路との関係でラベル付けを定義する必要がある)、この点が本研究の課題となる。また、補題の証明については、幾分数学的な厳密さを見ているが、しかし、より直観的に理解しやすい形での証明法を与えた。この点についても、今後より厳密な証明法が必要となろう。また、均衡計算の方法についても現在の段階では実用的な規模のネットワークに不動点アルゴリズムを適用した例はなく、本研究でも、単一ODに複数の経路が存在する、小規模な模擬ネットワークに対して不動点アルゴリズムの適用を試みた。しかし、ここで提案したアルゴリズムは、複数ODへも容易に拡張することが可能であると考えられる。この点についても、今後の課題

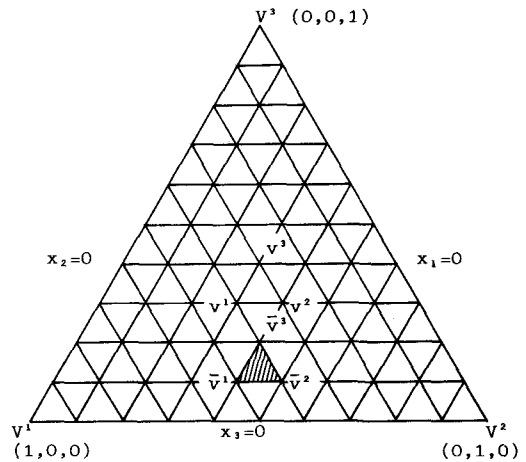


図-15 例題に用いた単体と初期シニアレックス および完備なセル

表-1 初めて完備なラベルが張られた時の計算結果

	PATH 1	PATH 2	PATH 3
PATH FLOW	5.000	4.000	1.000
PATH COST	6.000	5.000	5.250
MAXIMUM DIFFERENCE OF PATH COST	1.000		
TOTAL COST	55.250		

表-2 最終的な計算結果と真の均衡値との比較

	PATH 1	PATH 2	PATH 3
PATH FLOW (TRUE VALUE)	4.288 (4.286)	4.571 (4.571)	1.141 (1.143)
PATH COST (TRUE VALUE)	5.288 (5.286)	5.285 (5.286)	5.285 (5.286)
MAXIMUM DIFFERENCE OF PATH COST	0.003		
TOTAL COST	52.867		

としたい。

参考文献

- (1) Wardrop, J.G.: Some theoretical aspects of road traffic research, Proc. Inst. Civil Engineerings, Part II, Vol. 1, pp.325-378, (1952)
- (2) Pereira, S.: Some comments on the traffic assignment problem, Proc. of The IVth International Symposium on the Theory of Traffic Flow, pp.220-223, (1968)
- (3) Smith, M.J.: The existence, uniqueness and stability of traffic equilibria, Transpn. Res. Vol. 13B, pp.295-304, (1979)
- (4) Brower, L.E.: Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Mathematische Annalen, 71, pp.97-115, (1912)
- (5) Beckmann, M.J., C.B. McGuire and C.B. Winsten: Studies in the economics and transportation, Yale University Press, pp.46-101, (1956)
- (6) Jogensen, N.O.: Some aspects of the urban traffic assignment problem, Graduate Report, Institute of Transportation and Traffic Engineering, University of California, Berkeley, (1963)
- (7) 加藤 晃, 宮城俊彦: 交通ネットワークにおける需要均衡問題とその解法, 土木学会論文報告集 No. 289 (1979-9)
- (8) 井上博司: 道路網における均衡交通量配分の勾配法影法による計算法, 土木学会論文報告集 No. 313 (1981-9)
- (9) Almond, J.: Traffic assignment with flow-dependent journey times, Proc. Symp. Vehicular Traffic Science 1965, Elsevier, pp.222-234, (1967)
- (10) Scarf, H.: The approximation of fixed points of a continuous mapping, SIAM Journal on Applied Math., 15, pp.1328-1343, (1967)
- (11) Mathetech, Inc.: A fixed point method for treating traffic equilibria, Transportation Systems Center, Cambridge, Mass. (1978)
- (12) Asmuth, R.L.: Traffic network equilibria, Technical Report SOL-78-2, Dpt. Operations Research, Stanford University, (1978)
- (13) Viliet, D.V. and P.D.C. Dow: Capacity-restrained road assignment: The convergence of stochastic methods, Traffic Engineering and Control, pp.296-305, (1979)
- (14) Hasan, I. and Talvitie, A.: An equilibrium mode-split model of work trips along a transportation corridor, Proc. of the third World Conference on Transportation Research. pp.129-136, (1977)
- (15) Sheffi, Y. and C.F. Daganzo.: Hypernetworks and supply-demand equilibrium obtained With disaggregate demand models, TRR 637, pp.113-121, (1978)