交通配分・分布同時推定モデルとその信頼区間について

岐阜大学工学部　正員　宮城俊彦
岐阜大学工学部　正員　加藤晃

1. はじめに

将来の交通需要や交通施設のパフォーマンスの予測は，代替交通施設の設計，評価の基礎となる情報を与えるため必要欠くべからざるものである。予測に基づく将来の交通施設設計に係わる意志決定の有効性は、予測値の信頼性に依存する。交通需要予測の研究は予測値の信頼性を向上させるための方法論の追究ということができ，長年にわたり多くの努力が払われてきた。予測値の信頼性向上を考えるとき，基本的には2つの方向が考えられる。その1つは現象の合理的記述方法，すなわちモデルの定式化の理論的側面からの追究であり，人の交通行動に関する法則性あるいは普遍性の発見であろう。重力モデルの発見，あるいはWardropの原理などはこうした考え方の発露である。他の1つは，利用可能なデータとモデルとの関係の統計的ふるまいに関する記述より導かれる予測方法論である。無論，両者は互いに独立するものではなく，むしろ強くかかわりあいを保ちつつ発展させるべきものである。

ところで，交通施設利用量の予測に関し重要となるのは，個人の交通行動を記述する需要関数と交通施設特性を記述するパフォーマンス関数そして需要量と施設供給量とをバランスさせる均衡手法である。しかし，単に個人の需要関数を得ただけでは施設供給量との均衡は行なえない。なぜならばパフォーマンス関数はその施設の総利用量に対して定義されるものだからである。均衡量を求めるためには個人の需要関数の集計化が必要となるが，もし個人が全ったく同様な交通行動をとると仮定でき，選好に関し独立であると仮定できるならば単純集計によって全体の需要曲線を得ることができる。このような集計的需要曲線が与えられ，また個人の経路選択行動に関し最小時間経路選択仮説が成立するとき，地域間の交通需要量，施設利用量は需要曲線とパフォーマンス曲線の交点で与えられることがBeckmannによって示された[1]。しかし，Beckmannによる集計的均衡モデルは近年の確率的選択行動に関する理論からみれば不満が多い。というのも非集計需要モデルは予測精度において集計モデルよりも秀れていることが明らかにされつつあるからである。しかし，交通需要予測の本来の目的からすれば，すべての計画に常に高精度のモデルが要求される訳ではなく，費用・労力などの点を考慮してモデルを選択する必要がある。したがって，単純集計に基づく需要曲線による予測は要求される精度さえ満足していれば，予測値のバラツキが多少大きくとも問題はないであろう。こうした判断を下すためには利用するモデルによる予測値の精度に関する情報が必要となる。さて，Beckmannモデルのもう1つの難点は，予測された起終点間交通量が集計することによって得られる起終点での発生量，集中量に一致しないことである。

本研究は以上の観点よりBeckmannモデルを用いた場合の交通量推定法について，発生・集中制約を満足する修正モデルを提案し，その予測精度について議論するものである。すなわち，2節においてはBeckmannモデルとEvansモデルの等価性について述べる。さらに，これらのモデルはKullback情報規準を最小化する問題に等価であることも示す。3節では推定モデルの誤差構造について述べ，4節では3節で述べられる誤差分類について，それを重力モデルにあてはめ重力モデルの誤差構造とその修正法およびその信頼区間について述べる。5節では，異時点あるいは他地域のデータが利用できる場合のモデル・パラメータの改良法をベイズ理論に基づいて示す。最後に，Beckmannモデルに基づく交通量予測の区間推定法について述べる。

2. Beckmannモデルによる配分・分布交通量同時推定法

個人の交通行動は交通需要関数によって表現できるものとする。交通需要関数は個人の行なうトリップ数をそ

の人の社会経済的特性や交通条件で説明しようとするもので，短期的な交通行動は交通サービス水準を変数にして説明できる。一方，交通サービス水準は交通施設を利用する総量の関数として表現でき，一般に量の増加に伴なって交通サービスは低下する。この関係を記述する関数をパフォーマンス関数と呼ぶ。交通サービス水準を表わす要因はいくつも考えられるが，本研究をとおしてこれを時間のみで代表させる。すなわち，交通施設利用のために滞留する時間であり，道路交通を対象とする場合は道路区間の走行時間や信号待ち時間等がこれに相当する。ところで，個人の交通行動がその社会経済的要因や交通条件に依存せず一様と仮定できる場合には平均的な個人に全体を代表させることができる。

Beckmannの提案した予測モデルは平均的需要曲線と個々の道路区間のパフォーマンス曲線が与えられた場合に起終点間のトリップ量と個々の道路区間の利用量をいかに求めるかを与えるものである。これは個人の最小時間経路選択仮説を含む数学的存在問題を与えるが，等価的に非線形最適化問題となることが知られている。ところで，平均的需要曲線を得るのに回帰分析を適用するのが一般的方法であるが，しかしこうして得られるモデルは現在のところ実用的な意味をほとんど持ちえない。というのはこうして得られたモデルによって推定された地域間移動量を集計して得られる各ゾーンの発生・集中量が実際の値と大きくかけ離れることがよくみるからである。この矛盾を解決するためBeckmannモデルに発生・集中制約を設けたモデルを考える。これは以下に示す最適化問題[P1]で与えられる。

[P1]

最小化：
$$\sum_{l=1}^{L}\int_{0}^{y_l} B_l(y)\,dy - \sum_{i}^{I}\sum_{j}^{J}\int_{0}^{X_{ij}} g_{ij}(x)\,dx \qquad (1)$$

制約条件：
$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j} X_{ij} = O_i\ , \quad \sum_{i} X_{ij} = D_j\ , \quad X_{ij} \geq 0\\ &\sum_{ij}\sum_{r} \delta_{l,r}^{ij}\, x_r^{ij} = y_l\ , \quad \sum_{r} x_r^{ij} = X_{ij}\ , \quad x_r^{ij} \geq 0\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

X_{ij}：ゾーン$(i-j)$間の分布交通量，　O_i：ゾーンiの発生交通量$(i=1,2,\cdots,I)$
$\delta_{l,r}^{ij}$：パス行列の要素　　D_j：ゾーンjの集中交通量$(j=1,2,\cdots,J)$
x_r^{ij}：ゾーン$i-j$間の交通量のうちr番目経路を選択する交通量
$B_l(\cdot)$：リンクlのパフォーマンス関数，　$g_{ij}(\cdot)$：ゾーン$i-j$間の逆需要関数

ところで，ゾーン$i-j$間の需要曲線として次式のような重力型モデルを考えてみよう。

$$X_{ij} = \kappa A_{ij}\, e^{-\gamma t_{ij}} \qquad (3)$$

ここに，t_{ij}：ゾーン間所要時間，$A_{ij} = (O_i D_j)^{\alpha}$，$\kappa, \alpha, \gamma$：パラメータ

このとき，[P1]は次の最小化問題[P2]となる。

[P2]

最小化：
$$\frac{1}{\gamma}\sum_{i}\sum_{j} X_{ij}\left\{\log(X_{ij}/\kappa A_{ij}) - 1\right\} + \sum_{l}\int_{0}^{y_l} B_l(y)\,dy \qquad (4)$$

制約条件：　式(2)に等しい

ただし，式(4)を誘導する際，$\lim_{X_{ij}\to 0} X_{ij}\log X_{ij} \to 0$ を仮定している。

式(4)は明らかにEvansの提案した同時推定[2]モデルと等価である。[P1]あるいは[P2]の解は以下のようである。

$$\overset{*}{X}_{ij} = \kappa (O_i D_j)^{\alpha} e^{-\gamma(\theta_{ij}-\lambda_i-\mu_j)} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_{ij} = \sum_{l} \delta_{l,r}^{ij} \, B_l(y_l) & \quad \overset{*}{x}{}_r^{ij} > 0 \\ \varphi_{ij} \le \sum_{l} \delta_{l,r}^{ij} \, B_l(y_l) & \quad \overset{*}{x}{}_r^{ij} = 0 \end{array}\right\} \tag{6}$$

$$\sum_j X_{ij}^{*} = O_i \quad , \quad \sum_i X_{ij}^{*} = P_j \tag{7}$$

ここで，λ_i, μ_j, φ_{ij} は各々 Kuhn-Tucker 乗数である。上式において，$a_i = e^{r\lambda_i}$; $b_j = e^{r\mu_j}$ とおき，式(7)を考慮すると，

$$X_{ij} = \kappa a_i b_j (O_i D_j)^{\alpha} e^{-r\varphi_{ij}} \tag{8}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_i = 1 / \kappa O_i^{\alpha-1} \sum_j b_j D_j^{\alpha} e^{-r\varphi_{ij}} \\ b_j = 1 / \kappa D_j^{\alpha-1} \sum_i a_i O_i^{\alpha} e^{-r\varphi_{ij}} \end{array}\right\} \tag{9}$$

Evans はパラメータ r の決定方法について具体的な方法を示してないが，ここではこれを先験モデル(3)を用いてデータより回帰分析で求められているものとする。r が先決されているので [P1] は Evans の提案したアルゴリズムを用いて解くことができる。

[P1]，[P2] はともに走行時間にかかる係数 r が与えられるものとして解かれている。次に与える [P3] は，この係数を別の基準で決定しようとするものであり，また，[P2] が Kullback 情報量を最小化（あるいは先験確率を与えてのエントロピー最大化）する問題として定式化できることを示したものである。

まず，[P2] の目的関数の第2項に着目して次の新しい関数 $\bar{C}_l(y_l)$ を定義する。

$$\bar{C}_l(y_l) = \left[\int_0^{y_l} B_l(y)\,dy \right] / y_l \tag{10}$$

したがって，第2項は

$$\sum_l \int_0^{y_l} B_l(y)\,dy = \sum_l \bar{C}_l(y_l) \cdot y_l$$

となり，$\bar{C}_l$ は新しい平均走行時間関数を与えている。そこで，$\sum_i\sum_j X_{ij} t_{ij}^{\#} = \sum_l \bar{C}_l(y_l)\, y_l$ を満足するような OD 間走行時間 $t_{ij}^{\#}$ を定義するならば，[P2] の目的関数は次のように変形できる。

$$\frac{1}{r} \sum_i\sum_j X_{ij} \left\{ \log X_{ij} / \kappa A_{ij} e^{-r t_{ij}^{\#}} \right\}$$

すなわち，式(4)は先験 OD モデルとして $X_{ij}' = \kappa A_{ij} e^{-r t_{ij}^{\#}}$ を考えたときの Kullback 情報規準に等価である。以上のことより [P2] は次の最小化問題 [P3] を与える。

> [P3]
>
> 最小化：　$\sum_i\sum_j X_{ij} \log X_{ij} / X_{ij}'$ ，　$X_{ij}' = \kappa A_{ij} \exp(-r t_{ij})$　　(11)
>
> 制約条件：　式 (2)
>
> $$\sum_i\sum_j X_{ij} t_{ij} = \int_0^{y_l} B_l(y)\,dy \tag{12}$$

r の決定は式(12)を満足するように行なう。すなわち，式(12)の右辺の値 C を仮定する。このとき，[P3] は Wilson モデルに類似し，r は総走行時間が C に一致するように定められる。次に求められた OD 交通量を等時間原則を満足するように配分してやる。そこで新たな C の値を求めて同様の計算をくり返す。このような計算を C あるいは r が一定になるまでくり返す。r が一定値になれば $\int_0^{y_l} B_l(y)\,dy$ も一定値になることが Erlander によって示されており[3]，また $\sum\sum X_{ij} t_{ij} = C$ に対応して分布交通量を求めることができる。こうして与えられる OD 交通量は等時間配分の結果得られる t_{ij} を用いて得られる分布交通量を与えるものと思われる。

3．推定モデルの予測誤差の要因

[P1] あるいは [P2] を解いて得られる OD 交通量，道路区間交通量がどの程度信頼できるかは，利用する需要

曲線とパフォーマンス関数の精度および Wardrop の第1原理の現実性に依存している。本研究では需要曲線に係わる誤差分析に焦点をあて，パフォーマンス関数のパラメータの決定，均衡プロセスは誤差を含まないものと仮定する。すなわち，すべての誤差は需要モデルに帰せられるという前提で議論する。

需要モデルに係わる誤差の原因は大きく以下の3つに分類できよう。

①モデル構造の特定化に伴う誤差〜非線形な関係を誤まって線形と仮定したり，本来モデルに含めるべき変数を誤まって除去したことによる誤差

②平均化に伴う誤差〜本来，異なるパラメータをもつグループに対し同一のパラメータを適用することの誤差，あるいは説明変数に平均化した数値を用いることの誤差

③データ誤差〜データの不完全さに伴う誤差あるいは他の予測モデルによってデータを作成することに伴う誤差

特定の地域，時点のデータを用いて決定されたモデルが他地域あるいは異時点の予測に使われる場合の予測誤差，すなわちモデルに転写性*があるかどうかは①あるいは②に大きく起因すると思われる。以下の節では特に式(3)のモデルを対象に上述の①〜③のタイプの誤差について触れ，その誤差分析法について言及する。

4. 重力モデルの誤差構造

重力モデルのパラメータ推定には，次式のようなモデルが仮定される。

$$\tilde{X}_{ij} = \kappa\,(O_i D_j)^{\alpha}\,\exp(-\gamma t_{ij})\,\tilde{\varepsilon}_{ij} \tag{13}$$

記号「〜」はその変数が確率変量であることを表わしている。式(13)の両辺の対数をとることによって，また変数と添字を変換することによって次の線形モデルを得る。

$$\tilde{y}_i = \theta_1 x_{1i} + \theta_2 x_{2i} + \theta_3 x_{3i} + \tilde{\varepsilon}_i \quad , \quad x_{1i} = 1 \quad (\text{for all } i) \tag{14}$$

パラメータ推定には通常の最小二乗法（OLS）を用いるものとし，誤差項についても通常と同様の仮定を設ける。$\tilde{X}_{ij}$ の推定値は一般に(15)式で与えられるが，しかし，このようにして求められる値は $V[\hat{\varepsilon}_i]$ がかなり小さくならない限り不偏推定量とはならない。厳密な推定量は Goldberger[4] によって与えられているが，Bolch & Huang[5] は(16)式のような漸近的不偏推量を与えている。

$$\text{通常推定量}\qquad \hat{X}_{ij} = e^{\hat{\theta}_1}(O_i D_j)^{\hat{\theta}_2}\exp(\hat{\theta}_3 t_{ij}) \tag{15}$$

$$\text{漸近推定量}\qquad \hat{\hat{X}}_{ij} = \hat{X}_{ij}\exp\left\{\tfrac{1}{2}\left[S^2 - S^2_{\hat{Y}_{ij}}\right]\right\} \quad , \quad Y_{ij} = \log X_{ij} \tag{16}$$

ここに，$\hat{\kappa} = \exp(\hat{\theta}_1)$，$\hat{\alpha} = \hat{\theta}_2$，$\hat{\gamma} = -\hat{\theta}_3$．また，$S^2$ は $V[\tilde{\varepsilon}_i] = \sigma^2$ の不偏推定量，$S^2_{\hat{Y}_{ij}}$ は Y_{ij}（ODペア i-j を単一文字で表わした場合には y_i）の分散推定量である。しかし，本研究ではOLSに基づく式(15)のタイプの推定法について以下に議論を進める。

式(14)を行列表示するならば，

$$\tilde{y} = X\theta + \tilde{\varepsilon} \tag{17}$$

このとき，データ x_0 が与えられての $E[\tilde{y}_{i0}]$ の $(1-\alpha)100\%$ 信頼区間は次式で与えられる。

$$E[\tilde{y}_{i0}] = \hat{y}_{i0} \pm t_{\alpha/2}\cdot s\sqrt{x_0(X^t X)x_0} \tag{18}$$

したがって，X_{ij} の期待値の信頼区間は，式(18)の上限，下限値を単純に指数変換することによって得られる。[6]

ところで，前述の誤差タイプのうち，①の非線形性の線形モデルへの変換による誤差および②は $\tilde{\varepsilon}$ に反映される。すなわち，σ^2 に含まれる性質のものである。これについては後述するものとし，この節では説明変数の欠落による誤差とデータの不完全さに伴う誤差について触れ，その修正法について述べる。

(a) データの不完全さに伴う誤差

今，発生・集中量の真の値を O_i^*，D_j^* とし，得られたデータあるいは他のモデルによって予測された量 O_i, D_j との間に $O_i^* = u_i O_i$，$D_j^* = v_j D_j$ なる関係があるものとする。すなわち，X の2列目の変数に対し，

* 京都大学 佐々木教授によって"Transferability"の訳語として提案された用語である。

$$X^{*}_{(2)} = X_{(2)} + w \qquad (19)$$

を仮定する。ここで，w は $w_k = u_i v_j$ を要素とする列ベクトルである。式(19)を式(17)に代入することによって

$$\tilde{y} = X\theta + \tilde{\varepsilon}' \quad , \quad \tilde{\varepsilon}' = \hat{\varepsilon} - \theta_2 \tilde{w} \qquad (20)$$

を得る。$\tilde{\varepsilon}'$ は観測されない誤差項であるが，期待値と分散が次式で与えられる正規分布にしたがうと仮定する。

$$E[\tilde{\varepsilon}'] = -\theta_2 \bar{w} \quad , \quad V[\tilde{\varepsilon}'] = V[\hat{\varepsilon}] + \theta_2^2 V[\tilde{w}] \qquad (21)$$

$\bar{w}$, $V[\tilde{w}]$ が求めうるならば，正しい推定モデルは

$$\hat{y} = X\hat{\theta} - \hat{\theta}_2 \bar{w} \qquad (23)$$

で与えられ，$\hat{y}$ の期待値と分散-共分散行列は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} E[\hat{y}] &= X' E[\hat{\theta}] = X'\theta \\ V[\hat{y}] &= X' V[\hat{\theta}] X'^{t} \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

ただし，X' は X の第2列から w を引いた値をもつ行列である。

この方法は走行時間 t_{ij} が偏りもつ場合にも同様に適用できる。

(b) モデルの特定化に伴う誤差

式(15)を用いて得られるOD交通量 X_{ij} は発生・集中制約式(7)を満足するとは限らない。したがって，式(5)に含まれる Kuhn-Tucker 乗数 λ_i, μ_j は真のモデルより除去された変数を補なうべく導入された変数とみなして分析することができるであろう。このとき，式(17)は次の構造をもつと仮定できる。

$$\tilde{y} = X\theta + \tilde{\varepsilon}^{*} \quad , \quad \tilde{\varepsilon}^{*} = \hat{\varepsilon} + \theta_3 z \qquad (25)$$

ここで，z は $z_k = (\log a_i b_j)/N$ を要素とする列ベクトル。

$\tilde{y}$ の期待値と分散は，

$$E[\tilde{y}] = X\theta + \theta_3 \bar{z} \quad , \quad V[\tilde{y}] = V[\hat{\varepsilon}] + \theta_3^2 V[\hat{z}] + 2\theta_3 Cov[\tilde{\varepsilon}, \tilde{z}] \qquad (26)$$

z を単なる係数とみなし，これを定数値として扱うならば

$$E[\tilde{y}] = X\theta + \theta_3 z \quad , \quad V[\tilde{y}] = \sigma^2 I \qquad (27)$$

この場合の推定モデルは

$$\hat{y} = X'\hat{\theta} \qquad (28)$$

ただし，X' は $X'_{(3)} = X_{(3)} + z$ とする行列。

$\hat{y}$ の期待値，分散-共分散行列は

$$E[\hat{y}] = X' E[\hat{\theta}] = X'\theta \quad , \quad V[\hat{y}] = X' V[\hat{\theta}] X'^{t} \qquad (29)$$

ところで，(a), (b) のタイプの誤差を考慮するならば

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &= V[\hat{\varepsilon}] + \theta_2^2 V[\tilde{w}] + \theta_3^2 V[\tilde{z}] + 2\theta_3 Cov[\hat{z}, \tilde{\varepsilon}] \\ \text{あるいは，}\quad \Sigma' &= V[\tilde{\varepsilon}] + \theta_2^2 V[\tilde{w}] \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

したがって，これらの誤差要因の中でどれが最も効いているのかを識別することが重要である。$V[\hat{\varepsilon}]$ が支配的であれば，モデルの線形性を検討する必要があろうし，また平均値による集計化モデルを捨て非集計モデルを用いることが必要となろう。しかし，$V[\tilde{w}]$ が大きいのであれば，とりあえずこの誤差を小さくすることがまず検討されねばならないだろう。

信頼区間のもとめ方は式(18)と同様である。また，予測誤差は

$$E[\tilde{y} - \hat{y}] = 0 \quad , \quad V[\tilde{y} - \hat{y}] = V[\tilde{y}] + V[\hat{y}]$$

予測区間は

$$E[\tilde{y}] = E[\hat{y}] \pm z_{\alpha/2} \left[V[\tilde{y}] + V[\hat{y}] \right]^{1/2}$$

となってかなり広い区間となることが予想される。したがって，予測区間を求めても余り有益な情報は得られな

いと思われる。計画者はとりあえず $V[\hat{\theta}]$ あるいは $V[\hat{y}]$ の値を求めることによって利用するモデルの精度を知り，そして計画対象の必要とする精度と比較することができる。そして必要ならばさらにデータを累積することによってモデルの精度を向上させる必要があろうし，ある場合はモデルの定式化そのものを変更することが要求されよう。データの累積に伴うモデルの精度向上の可能性とその方法については次節で述べる。モデルの信頼区間を狭め，予測の精度を高める他の方法としてはデルファイ法の考え方を応用した方法が考えられる。すなわち，複数個のモデルによって予測を行ないそれらの信頼区間の共通領域を選択する方法である。この場合，予測を行なうのは複数の専門家ではなく，一人の専門家による複数個のモデルである。

5. 異なるデータ集合に基づくパラメータ推定法

同じパラメータ θ をもつ母集団から得られた大きさ n_1 と n_2 のデータ集合が利用できる場合には，大きさ $n = n_1 + n_2$ のデータ集合として解析することが望ましいが，こうした解析法が常に実行できるとは限らない。しかし，データ集合 $\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ に基づくパラメータの期待値と分散−共分散行列，すなわち $\hat{\theta}_{\mathrm{I}}$，$\hat{\theta}_{\mathrm{II}}$ と $\Sigma_{\hat{\theta}_{\mathrm{I}}}$，$\Sigma_{\hat{\theta}_{\mathrm{II}}}$ が判っており，また，θ が期待値 $\hat{\theta}$，分散−共分散行列 Σ_{θ} にしたがう正規分布である場合には，$\hat{\theta}$，$\Sigma_{\hat{\theta}}$ を求めることができる。

このような情況が生じるのは次のようなケースが考えられる。

(i) 異時点のデータ集合が利用できる．あるいは異時点のデータを利用した θ の推定値 $\hat{\theta}_{\mathrm{I}}$，$\Sigma_{\hat{\theta}_{\mathrm{I}}}$ が利用できる。

(ii) 他地域のデータ集合，あるいは他地域において推定された θ の推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{I}}$，$\Sigma_{\hat{\theta}_{\mathrm{I}}}$ が利用できる。

(iii) 異なるグループのデータ集合，あるいは異なるグループのデータを利用して得られた θ の推定値 $\hat{\theta}_{\mathrm{I}}$，$\Sigma_{\hat{\theta}_{\mathrm{I}}}$ が利用できる。

同じパラメータにしたがうと考えられる母集団から得られた2組の異なる推定値をもとに，より信頼できるパラメータを求める方法としてはいくつかの方法が考えられるが，ここではベイズ論的方法を示す。

ベイズ論的方法による未知パラメータ θ の推定法は，θ に関する事前確率法則 $\pi(\theta)$ とデータ X と θ が与えられての y の確率法則 $f(y \mid X, \theta)$ をもとに事後確率法則 $\pi(\theta \mid X, y)$ を

$$
\begin{aligned}
\pi(\theta \mid X, y) &= \pi(\theta) f(y \mid X, \theta) \Big/ \int \pi(\theta) f(y \mid X, \theta) \\
&\propto \pi(\theta) f(y \mid X, \theta)
\end{aligned} \tag{32}
$$

で与え，$\pi(\theta \mid X, y)$ の期待値として θ の推定する方法である。

ところで，$\hat{\theta}$ の事前確率法則が平均 $\hat{\theta}_{\mathrm{I}}$，分散−共分散行列 $\Sigma_{\hat{\theta}_{\mathrm{I}}}$ をもつ正規分布であるとする。このとき，X，y が与えられての $\hat{\theta}$ の事後確率法則 $\pi(\theta \mid X, y)$ もやはり正規分布となり，その平均と分散−共分散行列は，それぞれ次式で与えられる。[7]

$$
E[\hat{\theta} \mid X, y] = \hat{\theta} = [\Sigma_{\hat{\theta}_{\mathrm{I}}}^{-1} + \sigma^{-2}(X^t X)]^{-1} [\Sigma_{\hat{\theta}_{\mathrm{I}}}^{-1} \hat{\theta}_{\mathrm{I}} + \sigma^{-2} X^t y] \tag{33}
$$

$$
V[\hat{\theta} \mid X, y] = \Sigma_{\theta} = [\Sigma_{\hat{\theta}_{\mathrm{I}}}^{-1} + \sigma^{-2}(X^t X)]^{-1} \tag{34}
$$

式(33)，(34)を書き改めると

$$
\left.
\begin{aligned}
\hat{\theta} &= [\Sigma_{\hat{\theta}_{\mathrm{I}}}^{-1} + \Sigma_{\hat{\theta}_{\mathrm{II}}}^{-1}]^{-1} [\Sigma_{\hat{\theta}_{\mathrm{I}}}^{-1} \hat{\theta}_{\mathrm{I}} + \Sigma_{\hat{\theta}_{\mathrm{II}}}^{-1} \hat{\theta}_{\mathrm{II}}] \\
\Sigma_{\theta} &= [\Sigma_{\hat{\theta}_{\mathrm{I}}}^{-1} + \Sigma_{\hat{\theta}_{\mathrm{II}}}^{-1}]^{-1}
\end{aligned}
\right\} \tag{35}
$$

を得る。すなわち，異なるデータ集合 $\mathcal{D}_{\mathrm{I}}$，$\mathcal{D}_{\mathrm{II}}$ に基づく $\hat{\theta}$ の期待値，分散−共分散行列が与えられれば，$\mathcal{D}_{\mathrm{I}} \cup \mathcal{D}_{\mathrm{II}}$ に基づくパラメータの推定値 $\hat{\theta}$ とその分散−共分散行列 Σ_{θ} を得ることができる。また，Theil は一般化最小二乗法を用いて式(35)と同様の結果を導いている。[8] より一般的に m 個のデータ集合に基づく θ に関する情報が利用できる場合には，

$$
\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{m} \{\Sigma_{\hat{\theta}_i} \hat{\theta}_i\} \Sigma_{\hat{\theta}}, \quad \Sigma_{\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^{m} [\Sigma_{\hat{\theta}_i}]^{-1} \tag{36}
$$

ここで再度 **2**. で述べた平均化に伴う誤差を考えてみよう。

$$\hat{y}_i = \theta_1 x_{1i} + \theta_2 x_{2i} + \theta_3 x_{3i} + \tilde{\varepsilon}_i \qquad (14)$$

さて，個人sに関する需要曲線を考えると，

$$\hat{y}_{i,s} = \theta_1 x_{1i} + \theta_2 x_{2i,s} + \theta_3 x_{3i,s} + \tilde{\varepsilon}_{i,s} \qquad (37)$$

ここで，

$y_{i,s}$ = 個人sがODペアiを選択したときのトリップ数の対数値

$x_{2,s}$ = 個人sが起点iを選択する回数$u_{i,s}$と目的地jを選択する回数$v_{j,s}$の積の対数値

$x_{3,s}$ = 個人sがODペアiを選択するときのOD間走行時間

また，$E[\tilde{\varepsilon}_{i,s}]=0$，$V[\tilde{\varepsilon}_{i,s}]=\delta^2$，$Cov[\tilde{\varepsilon}_{i,s}\ \tilde{\varepsilon}_{i,s'}]=0$ と仮定する。

個人の数をMとするとき，式(37)に対し平均化した数値を用いることによって代表的な個人のトリップ・パターンを求めることができる。すなわち，式(14)における x_{2i}，x_{3i} はそれぞれ個人に関する平均値が用いられていると考えるならば，これを次のように表わすことになる。

$$\hat{y}_i = \theta_1 x_{1i} + \theta_2 \hat{\bar{x}}_{2i} + \theta_3 \hat{\bar{x}}_{3i} + \tilde{\varepsilon}_i^{*} \qquad (38)$$

このとき，

$$E[\hat{y}_i] = \theta_1 x_{1i} + \theta_2 E[\hat{\bar{x}}_{2i}] + \theta_3 E[\hat{\bar{x}}_{3i}] \qquad (39)$$

$$V[\hat{y}_i] = \theta_2^2 V[\hat{\bar{x}}_{2i}] + \theta_3^2 V[\hat{\bar{x}}_{3i}] + \delta^2 \qquad (40)$$

となり，x_{2i}，x_{3i} を定数として扱っていた式(14)よりも平均化に伴う誤差が加わることになる。すなわち，式(37)の個人モデルを真のモデルと考えるとき，平均値に基づく集計モデルは個人データに平均化の操作を行なう分だけ余分に誤差が増すことになり，式(14)での $V[\tilde{\varepsilon}_i]=\sigma^2$ の仮定は実際には

$$\sigma^2 = \theta_2^2 V[\hat{\bar{x}}_{2i}] + \theta_3^2 V[\hat{\bar{x}}_{3i}] + \delta^2$$

ということになる。したがって，式(14)が式(37)と同等の説明力を持ちうるのは平均化に伴う誤差が零の場合に限る。x_{2i}を例にこのことを考えてみると以下のようである。

$$\sum_s x_{2i,s} = \log \prod_s u_{i,s} v_{i,s}$$

であるから，

$$\bar{x}_{2i} = \log \left(\prod_s u_{i,s} v_{i,s}\right)^{\frac{1}{M}}$$

よって，$u_{i,s}=u_i$，$v_{i,s}=v_j$ に限り

$$\left(\prod_s u_{i,s} v_{i,s}\right)^{\frac{1}{M}} = O_i D_j$$

となって，式(13)に一致する。したがって，$V[\hat{\bar{x}}_{2i}]$を小さくしようと思うならば，$u_{i,s}\ v_{i,s}$ が近い値をもつ個人にグループ化して式(13)のモデルを適用することが考えられる。ただし，この場合にはこのような集計化が $V[\hat{\bar{x}}_{3i}]$ をより大きくすることがないかどうかを吟味する必要がある。最終的にはゾーン間に関する集計値が必要とするが，個々のグループで推計されたパラメータに対し式(35)を適用すればよい。

6．交通量の信頼区間

本研究では交通量の均衡プロセスを決定論に考えているので，このプロセスに伴う統計的誤差は考慮する必要はない。問題[P1]を解くことによって経路交通量 x_r^{ij}，OD交通量 X^{ij} およびリンク交通量 y_l が得られるが，x_r^{ij} が与えられれば X^{ij}，y_l はユニークに定まる。今，x_r^{ij} の X_{ij} に対する比率を P_r^{ij} とおき，次のようなフローベクトルと比率行列 **P** を定義する。

リンク・フローベクトル　$\underset{(1\times L)}{\mathbf{X}_L} = [y_1, y_2, \cdots, y_L]^t$，$\underset{(1\times K)}{\mathbf{X}_{OD}} = [X_{11}, X_{12}, \cdots, X_{IJ}]^t$　(ODフロー・ベクトル)

パス・フロー・ベクトル　$\mathbf{x} = [x_1^{11}, x_1^{11}, \cdots, x_{r_{11}}^{11}, x_1^{12} \cdots, x_{r_{12}}^{12}, \cdots\cdots, x_1^{IJ}, \cdots, x_{r_{IJ}}^{IJ}]^t$　$(1\times N)$

このとき，各フローベクトルの関係式は

$$X_L = \delta x$$

$$x = P X_{OD}$$

$$P_{(N\times K)} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \begin{matrix} P_1^{11} \\ P_2^{11} \\ \vdots \\ P_{r_{11}}^{11} \end{matrix} & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & \begin{matrix} P_1^{12} \\ \vdots \\ P_{r_{12}}^{12} \end{matrix} & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} P_1^{IJ} \\ \vdots \\ P_{r_{IJ}}^{IJ} \end{matrix} \end{array}\right]$$

よって，$X_L = \delta P X_{OD}$

したがって，　$V[X_L] = \delta V[x] \delta^t$, $V[x] = P V[X_{OD}] P^t$

であるから，

$$V[X_L] = \delta P V[X_{OD}] (\delta P)^t$$

したがって，$\tilde{X}_L$ の信頼区間は

$$E[\tilde{X}_L] = \hat{X}_L \pm z_{\alpha/2} \{V[X_L]\}^{1/2}$$

で与えられる。

7. 結語

本研究はBeckmannモデルに発生・集中制約を考慮したときの交通量推計法について述べた。また，そのときに利用する需要曲線として重力モデルを用い，そのパラメータ推定を回帰分析で行なう場合の誤差介入の可能性とその性質および推定値の修正法について述べた。まず，**2.**ではBeckmannモデルによる同時推定法とEvansモデルの等価性およびそれらのモデルがKullback情報量最小化問題として定式化できることを示した。しかしそのアルゴリズムについて十分吟味されておらずさらに研究を進める必要がある。**3.**では同時推定モデルにおける誤差介入の可能性について触れ，特に需要モデルの誤差要因について分類を行なった。ネットワークのモデル化に伴う誤差については述べなかったが，これは需要モデルあるいはパフォーマンス関数の誤差に反映させることが可能と考えられる。**4.**では重力モデルの対数線形化モデルの誤差構造について述べたが，ここでは通常の方法，すなわち，回帰モデルを指数変換して得られる推計値に関する誤差構造について述べたに過ぎない。対数線形化モデルの厳密な展開に基づく誤差分析法については今後の課題としたい。

近年の非集計モデルの発展に伴い非集計モデルの有効性が明らかにされつつある現在，ネットワーク均衡モデルについても非集計均衡モデルを開発する必要があるが，この場合問題となるのが非集計需要モデルの集計化の問題である。**5.**ではBayse流的方法によるパラメータの更新法を述べたが，この方法は集計化の1つの方法を与えるものと考える。また，非Wardrop均衡モデルへの1つのアプローチとも考えられ今後の課題としたい。

Beckmannモデルは逆需要関数を必要とするため，LogitモデルなどのshareモデルとE直接応用することができない。しかし，[P1]の双対問題を考えることによって，通常の非集計モデルが利用可能となる。これについて別の機会に報告したい。

最後に，本研究の1部，特に**4.**以降は著者の1人の宮城が内地留学生として京都大学で過ごした間に発想されたものであり，その間暖かい御助言をいただいた交通土木工学科　佐佐木教授にこの場を借りて心から感謝の意を表するものです。

参考文献

(1) Beckmann, M.J et al. ; Studies in the Economics of Transportation (1956).
(2) Evans, S.P. : Derivation and Analysis of Some Models for Combining Trip Distribution and Assignment, Transp. Res. (1976).
(3) Erlander, S et al. : On the Calibration on the Combined Distribution-Assignment Model, Transp. Res.(1979)
(4) Goldberger, A.S. : The Interpretation and Estimation of Cobb-Douglas Production Function, Econometrica,(1968)
(5) Bolch B.W & Huang C.J. : Multivariate Statistical Methods for Business and Economics, (1978)
(6) Wonnacott R.J & Wonnacott T.H. : Econometrics (1970)
(7) 宮沢光一「情報・決定理論序説」(1976)　(8) Theil, H. : Theory and Measurement of Consumer Demand, Vol.1, (1975)