交通量調査データだけを用いるＯＤ交通量推計法

岡山大学　正員　井上博司

1．はじめに

道路網上の交通量観測データからＯＤ交通量を推計する手法については，これまでいろいろな手法が提案されてきた。それらはベースとなるＯＤ交通量の分布パターンの設定の仕方によって２つの型に大別できる。第１の型は過去になされたＯＤ調査の結果を分布の基本的なパターンとするものである。この場合，ＯＤ調査がサンプリング調査であることや，ＯＤ交通量の日変動などを考慮して交通量観測データよりＯＤ交通量の修正が行われる。第２の型は分布の基本的なパターンとして重力モデルを用いるものである。いうまでもなく重力モデルは分布交通量によく適合するモデルであることが知られており，このモデルを用いることは当然なことである。この場合には，重力モデルの発生係数およびトリップ長指数の２つのパラメーターを交通量観測のデータより求めることが主眼点となる。このようなものには Low[1]，Overgard[2]，Jensen および Nielsen[3),4)] などの研究がある。

これらの推定手法ではＯＤ交通量を推定する際に，各トリップがどのような経路を選択するのか，またそれらの経路をどのような割合で選択するのかを先験的情報として与える必要がある。しかしこれについての研究はまだ十分ではない。１つの可能な方法は，ネットワークへの交通量配分と分布交通量推計とを交互に繰り返し，一定の状態に収束させるというものである。Jensen等はこの方法を用いている。しかしこのような方法では厳密に収束させようとするならば，多数の繰り返しが必要となることは明らかである。

筆者はかねてから，道路網上の交通量観測データからＯＤ交通量を推計する問題をネットワーク均衡理論により取り扱うことを考えてきたが，これが可能であるという見通しが得られた。ネットワーク均衡理論として取り扱うことの最大の利点は，経路選択率を先験的情報として与える必要がないということである。本稿では以下にネットワーク均衡理論の概要およびネットワーク均衡理論にもとづく交通量観測データからのＯＤ交通量推計のモデルおよびその計算法と計算例について述べる。

2．ネットワーク均衡理論の概要

ネットワーク均衡問題を最初に提唱したのはWardrop[5)]である。Wardrop は交通量配分においてフローディペンデントな走行時間関数を用いるべきことを指摘し，もしこのような走行時間関数が用いられるならば，最短時間の経路にトリップが配分されるとき，道路網上の交通流は"どの運転者も経路変更によって自己の旅行時間を小さくすることができないような均衡状態に到る"と考えた。これは今日ワードロップ均衡と呼ばれ，この原則はワードロップの第一法則と呼ばれている。その後1950年代に Prager[6),7)]，Beckmann[8),9)] 等によってこの問題が発展させられ，数学的に整理された形をもつようになった。この問題の一般的定式化は次のように表現することができる。

x_{ij}：アーク ij上のフロー，　x_i^k：ノード i からノード k へのフローデマンド，　x_{ij}^k：目的地が k のアーク ij 上のフロー，　t_{ij}：アーク ij の旅行時間，　t_i^k：ノード i からノード k への旅行時間

とし，また旅行時間 t_{ij} はフロー x_{ij} の単調増加関数 $t_{ij}=f_{ij}(x_{ij})$ として表わされ，また一方フローデマンド x_i^k は時間 t_i^k の単調減少関数 $x_i^k=h_i^k(t_i^k)$ として表わされるとする。

このとき，ネットワーク上の均衡交通流は，目的関数

$$F=\sum_{ik}\int_0^{x_i^k} h_i^k(x)\,dx-\sum_{ij}\int_0^{x_{ij}} f_{ij}(x)\,dx \qquad (1)$$

を制約条件

$$x_{ij} = \sum_k x_{ij}^k \tag{2}$$
$$x_i^k = \sum_j (x_{ij}^k - x_{ji}^k) \tag{3}$$
$$x_{ij}^k \geqq 0 \tag{4}$$

のもとで最大化する問題となる。ここに $h_i^k(x)$ は $g_i^k(t_i^k)$ の逆関数である。この非線形計画問題はアークフロー x_{ij} およびフローデマンド x_i^k について一意的な解をもつことが明らかにされており，この問題に対する種々の解法が開発されている。

上記の数理計画問題は弾力需要ネットワーク均衡問題と呼ばれるが，これに対して需要交通量 x_i^k が外生的に与えられてモデルの中ではその値が固定されるとき，固定需要ネットワーク均衡問題と呼ばれる。この場合には式(1)の右辺第1項は定数となるので，目的関数は

$$S = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} f_{ij}(x)\, dx \tag{5}$$

の最小化となる。この問題の定式化はJørgensen[10]によってなされた。この種の問題は等時間原則配分として知られているものである。

一方，総トリップ数をT，$p_i^k = x_i^k / T$ とおき，目的関数(5)にエントロピー項

$$\frac{1}{\beta} \sum_i \sum_k p_i^k \log(p_i^k) \tag{6}$$

を加えたものは分布配分結合モデルと呼ばれる[11),12)]。この場合にはもちろんフローデマンドは固定されない。この問題の分布交通量の解は，ウイルソンのエントロピー法[3]と同じ形をもつことが明らかにされている。

以上の問題において，対象とするネットワークが道路だけではなく，他の輸送機関のネットワークも同時に考慮されるならば，問題は分布・分担・配分同時推定モデルとなる。

3．ネットワーク均衡問題として見たOD交通量の推計

ここでは交通量観測データからのOD交通量の推計をネットワーク均衡問題として定式化する。いまノード i からノード j へのトリップコストを C_{ij}，ノード i からノード j へのトリップデマンドを T_{ij} として，デマンド T_{ij} はコスト C_{ij} の単調減少関数 $T_{ij} = f_{ij}(C_{ij})$ として表わされるとする。またこの逆関数を $C_{ij} = g_{ij}(T_{ij})$ とする。つぎに

x_{ij}^r：ノード i からノード j に向う経路 r を通るトリップ数，

$\delta_{ij}^{ar} = \begin{cases} 1：ノード\ i\ からノード\ j\ への経路\ r\ がアーク\ a\ を通るとき, \\ 0：その他のとき, \end{cases}$

v_a：アーク a 上のトリップ数

$S_a(v_a)$：アーク a 上の1トリップ当りのコスト関数

とすると，ネットワーク均衡問題は次のようになる。

$$\min \sum_a \int_0^{v_a} S_a(t)\, dt - \sum_{ij} \int_0^{T_{ij}} g_{ij}(u)\, du \tag{7}$$
$$v_a = \sum_{ij} \sum_r \delta_{ij}^{ar} x_{ij}^r \tag{8}$$
$$\sum_r x_{ij}^r = T_{ij} \tag{9}$$
$$x_{ij}^r \geqq 0 \tag{10}$$

ここでアーク a 上のトリップ数 v_a は交通量観測によってその値がわかっているとする。このとき目的関数(7)の第1項は定数となるので，問題は制約条件(8)，(9)，(10)のもとで目的関数

$$\sum_{ij} \int_0^{T_{ij}} g_{ij}(u)\, du \tag{11}$$

を最大化する問題となる。$g_{ij}(u)$ はフロー u の単調減少関数を仮定しているので，この問題のトリップデマンド T_{ij} についての解は一意的であることが容易に証明できる。しかしパスフロー x^r_{ij} は一般的には一意的ではない。いまこの問題の解の性質を調べるために Kuhn-Tucker 条件を求めてみる。ラグランジェ関数は，

$$\Phi = \sum_{ij} \int_0^{\sum_r x^r_{ij}} g_{ij}(u)\, du - \sum_a \lambda_a \Big(\sum_{ij} \sum_r \delta^{ar}_{ij} x^r_{ij} - v_a \Big) \tag{12}$$

となり，

$$\partial\Phi / \partial x^r_{ij} = g_{ij}(T_{ij}) - \sum_a \lambda_a \delta^{ar}_{ij} \tag{13}$$

であるから，Kuhn-Tucker 条件は，

$$x^r_{ij} = 0 \quad なら \quad g_{ij}(T_{ij}) \leqq \sum_a \lambda_a \delta^{ar}_{ij} \tag{14}$$

$$x^r_{ij} > 0 \quad なら \quad g_{ij}(T_{ij}) = \sum_a \lambda_a \delta^{ar}_{ij} \tag{15}$$

となる。このときトリップデマンド T_{ij} は

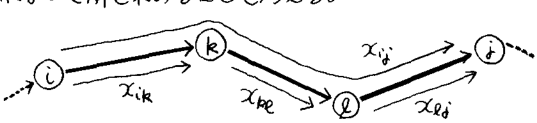
$$T_{ij} = f_{ij}\Big(\min_r \sum_a \lambda_a \delta^{ar}_{ij} \Big) \tag{16}$$

となる。これらの式より明らかなように，ラグランジェの未定乗数 λ_a はアーク a のコストを表わしている。ただしこのコストは実際に計って求められるものではなく，トリップメーカーが無意識のうちにもっている隠れたコストである。つまり経済学でいうシャドウプライスの概念に相当するものである。ノード i とノード j の間のトリップデマンドは ij 間の最短経路のコストの関数になっている。またこのときのネットワーク上のフローは起終点間の使用される経路についてはコストが皆等しく，使用されないどの経路のそれよりも小さいというワードロップ均衡の状態になっている。

4. 計算法

定式化された問題は，線形制約条件をもつ非線形計画問題である。これに対する有力な解法はローゼンの勾配射影法を適用することである。しかしこの方法では逆行列を求めることが必要になるので，ここではフローアルゴリズムにより反復計算によって解を求める方法を考えてみる。

この問題の特徴は，アークフロー v_a の値が固定されるということである。それゆえパスフローの値が改善されるとき，アークフローの値が不変となるように他のODペアーのフローをその分だけ逆に増減してやる必要がある。いま勾配法によって解を求めることを考える。



図のようにノード i からノード k, ℓ を通りノード j に向うフロー x_{ij} および ik 間のフロー x_{ik}, $k\ell$ 間のフロー $x_{k\ell}$, ℓj 間のフロー $x_{\ell j}$ について考える。まず制約条件を満足する各フローの初期値が与えられているものとする。このとき目的関数のフロー x_{ij}, x_{ik}, $x_{k\ell}$, $x_{\ell j}$ に関する勾配は，それぞれ $g_{ij}(T_{ij})$, $g_{ik}(T_{ik})$, $g_{k\ell}(T_{k\ell})$, $g_{\ell j}(T_{\ell j})$ である。そこで x_{ij} を改良する方向として，

$$d_{ij} = c_{ij} - (c_{ik} + c_{k\ell} + c_{\ell j}) \tag{17}$$

を考える。このときアークフローの値が不変でなければならないので，x_{ik}, $x_{k\ell}$, $x_{\ell j}$ の改良の方向は，

$$d_{ik} = d_{k\ell} = d_{\ell j} = -d_{ij} = -c_{ij} + (c_{ik} + c_{k\ell} + c_{\ell j}) \tag{18}$$

でなければならない。一般的にはフロー x^r_{ij} の改良の方向は，

$$d^r_{ij} = c_{ij} - \sum_a \delta^{ar}_{ij} c^a_{pq} \tag{19}$$

となる。ここに $C_{p_a q_a}$ はアークaの起点pから終点qへのトリップコストを表わす。なおこのとき $-d_{ij}^{r}$ を経路rの経由する各アークの起点と終点の間のパスフローの解の改良の方向に加えておかなければならない。こうしてそれぞれのパスフローの改良の方向が求められると，トリップデマンド T_{ij} の改良の方向は

$$d_{ij} = \sum_{r} d_{ij}^{r} \tag{20}$$

となる。

さて求められた方向への一次元最小化であるが，これにはNewton 法を用いるのが適当である。このときステップ幅 λ は

$$\lambda = -\frac{\mathbf{d}^T \nabla F(\mathbf{T})}{\mathbf{d}^T \nabla^2 F(\mathbf{T}) \mathbf{d}} = -\frac{\sum_{ij} d_{ij} C_{ij}}{\sum_{ij} d_{ij}^2 C'_{ij}} \tag{21}$$

となる。ここに $C'_{ij} = dg_{ij}(T_{ij}) / dT_{ij}$ である。

もし一次元最小化によってパスフローが負になることがあれば，0になる直前までステップ幅を短縮する。このパスフローがさらに次のステップで負の方向をもつなら，このパスを対象から除外する。こうして一次元最小化を繰り返して行っていくと，探索方向ベクトルが次第に小さくなることが期待され，これがある一定値よりも小さくなったとき，最適性の判定をKuhn-Tucker 条件を用いて行う。もしKuhn-Tucker条件が成り立たないならば，すなわちフローの流れていないさらにコストの小さい経路が存在するならば，これを対象経路に含め，同様の計算を行っていけばよいのである。

なお $f_{ij}(C_{ij})$ の関数形であるが，重力モデルを用いると ij 間のトリップデマンドは

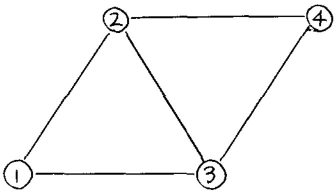
$$T_{ij} = \alpha U_i V_j C_{ij}^{-\gamma} \tag{22}$$

と表わされる。ここに U_i, V_j はノード i およびノード j の発生指標，吸引指標たとえば総人口，従業人口などである。このときこの逆関数 $g_{ij}(T_{ij})$ は

$$C_{ij} = \left(\frac{\alpha U_i V_j}{T_{ij}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{23}$$

となる。計算上はαの値は不用であり，γの値さえ与えればよい。

5. 計算例



右図のような簡単なネットワークを考える。ここでは簡単のためアークの方向は考えない。ノード 1，2，3，4 の人口をそれぞれ 3000人，1000人，1000人，2000人 とし，また $U_i = V_j$ とする。重力モデルの発生係数を $\alpha = 0.1$，トリップ長指数を $\gamma = 2.0$ とする。ここでトリップコストを $C_{12} = 15$分，$C_{13} = 10$分，$C_{23} = 20$分，$C_{24} = 15$分，$C_{34} = 20$分 と仮定する。このとき重力モデル式(22)より各ノードペアー間のトリップデマンドを計算すると，

$T_{12} = 1333.3$,　$T_{13} = 3000$,　$T_{23} = 250$,　$T_{24} = 888.9$,　$T_{34} = 500$,　$T_{14} = 666.7$

となる。①-④間の経路は①-②-④と①-③-④の2本あるので，前者のフローを 366.7，後者のフローを 300 と仮定する。この結果，各アークのフローは次のようになる。

$v_{12} = 1700$,　$v_{13} = 3300$,　$v_{23} = 250$,　$v_{24} = 1255.6$,　$v_{34} = 800$

さてここで，このアークフローおよび人口，トリップ長指数のみをデータとして与えて，すでに述べた方法によってトリップデマンドを求め，これが上記の計算値に一致するかどうかを見る。

まず初期値として次のようなパスフローを与える。

$x_{12}^1 = 1200$,	$x_{13}^1 = 3300$,	$x_{14}^1 = 500$,	$x_{23}^1 = 250$,	$x_{24}^1 = 755.6$,	$x_{34}^1 = 800$
(①-②)	(①-③)	(①-②-④)	(②-③)	(②-④)	(③-④)

このとき $C_{ij}=\sqrt{U_i V_j / T_{ij}}$ の値は，

$C_{12}=50.000$，$C_{13}=30.151$，$C_{14}=109.545$，$C_{23}=63.246$，$C_{24}=51.448$，$C_{34}=50.000$

となる。ここでKuhn-Tucker条件の判定を行う。ノードペアー①-④間については，

$C_{13}+C_{34}=80.151<C_{14}=109.545$

であるから，経路①-③-④を新に x_{14}^2 として対象に含める。以下の計算の過程は次の表に示す通りである。

ステップ1

ODペアー	経路	方向d	ステップ幅λ	フローx	コストC
1-2		-8.096		1160.1	50.853
1-3		-29.393		3155.1	30.836
1-4		37.490		684.9	93.600
	1	8.096	4.931	539.9	
	2	29.393		144.9	
2-3		0		250.0	63.246
2-4		-8.096		7156.8	52.864
3-4		-29.393		6550.6	55.255

ステップ2

ODペアー	経路	方向d	ステップ幅λ	フローx	コストC
1-2		10.117		1335.7	47.391
1-3		-7.508		3024.7	31.493
1-4		-2.609		639.6	96.857
	1	-10.117	17.363	364.3	
	2	7.508		275.3	
2-3		0		250.0	63.246
2-4		10.117		891.3	47.369
3-4		-7.508		524.7	61.740

ステップ3

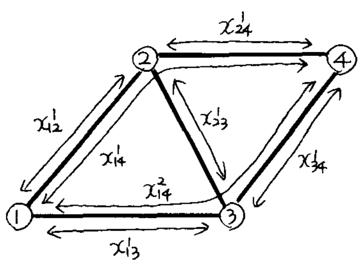
ODペアー	経路	方向d	ステップ幅λ	フローx	コストC
1-2		-2.097		1325.3	47.578
1-3		-3.624		3006.6	31.588
1-4		5.721		668.1	94.766
	1	2.097	4.989	374.7	
	2	3.624		293.4	
2-3		0		250.0	63.246
2-4		-2.097		880.9	47.649
3-4		-3.624		506.6	62.832

ステップ4

ODペアー	経路	方向d	ステップ幅λ	フローx	コストC
1-2		0.462		1333.5	47.430
1-3		-0.346		3000.4	31.621
1-4		-0.115		666.0	94.913
	1	-0.462	17.907	366.5	
	2	0.346		299.6	
2-3		0		250.0	63.246
2-4		0.462		889.1	47.427
3-4		-0.346		500.4	63.220

ステップ5

ODペアー	経路	方向d	ステップ幅λ	フローx	コストC
1-2		-0.055		1333.3	47.435
1-3		-0.072		3000.0	31.623
1-4		0.127		666.7	94.867
	1	0.055	5.012	366.7	
	2	0.072		300.0	
2-3		0		250.0	63.246
2-4		-0.055		888.9	47.435
3-4		-0.072		500.0	63.243



5回の繰り返しによって方向ベクトルがほぼ0となった。このときのフローはKuhn-Tucker条件を満足している。また得られたOD交通量ははじめに計算された値と完全に一致している。なお C_{ij} の値がはじめに仮定された値と違うのは，計算では α を考慮していないためである。この場合最終ステップのコスト C_{ij} の値ははじめに仮定された値の $\sqrt{10}$ 倍すなわち3.1623倍になっている。当然のことであるが，α をいかなる値に仮定して計算してもトリップデマンドの値は皆同じになる。

6. おわりに

道路網上の交通量観測データからOD交通量を推計する問題をネットワーク均衡問題として定式化し，その解法と簡単な計算例を示した。

このようなネットワーク均衡問題としての定式化によって，この問題の交通量配分などのネットワークフロー問題との統一的な解釈が可能となり，その位置づけが明確になった。

ネットワーク均衡問題として取り扱うことの利点は，

(1) 解の性格が明確である。

(2) 計算がシステマティックに行える。

(3) 経路を先験的情報として与える必要がない。

(4) 起終点間のトリップコストを与える必要がない。

などである。今後は計算法の確立を図るとともに，大規模ネットワークへの適用を行いたい。

参考文献

1) Low, D.E.: A new approach to Transportation systems modeling, Traffic Quarterly, pp. 391～404, July, 1972.

2) Overgard: Development of a simplified traffic model for the city of Silkeborg, Paper presented at the O.E.C.D. T.7 group in Copenhagen, 1972.

3) Jensen, T. and S.K. Nielsen: Calibrating a gravity model and estimating its parameters using traffic volume counts, Proceedings from the English University Traffic Engineer's yearly congress, Janualy, 1973.

4) Holm, J., T. Jensen, S.K. Nielsen, A Christensen, B. Johnsen and G. Ronby: Calibrating traffic models on traffic census results only, Traffic Engineering and Control, Vol. 17, No. 4, pp. 137～140, April, 1976

5) Wardrop, J.G.: Some theoretical aspects of road research, Proceedings, Institute of Civil Engineers, Part 2, 1952, pp. 325～378

6) Prager, W.,: Problems in traffic and transportation, Proceedings of a Symposium in Operations Research in Business and Industry, Midwest Research Institute, April, 1954.

7) Prager, W.: On the Role of Congrestion in transportation problems, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 35, 264～268, 1955

8) Beckmann, M.: Optimum transportation on networks, Cowles Comission Discussion Paper 2023, August 1951.

9) Beckmann, M, C.B. McGuire and C.B. Winsten: Studies in the Economics of transportation, Yale University Press, 1956

10) Jorgensen, N.O.: Some Aspects of the urban traffic assignment problem, I.T.T.E. Graduate Report, University of California, Berkley, 1963

11) Evans, S.P.: Derivation and Analysis of some models for combining trip distribution and assignment, Trans. Res. 10, 37～57, 1976

12) Florian, M, S. Nguyen and J. Felland,: On the combined distribution and assignment of traffic, Trans. Sci. 9, 43～53, 1975.

13) Wilson A.G.: Entropy in Urban and Regional Modeling, Pion Ltd., London, 1970