

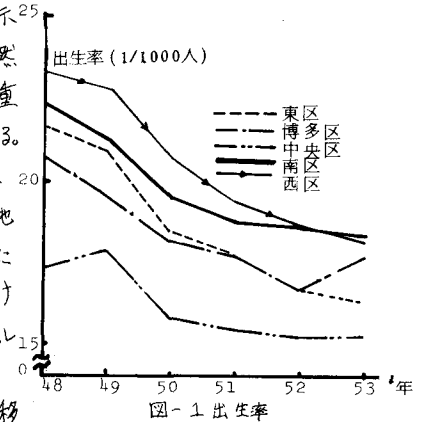
人口の域内流動モデルとその適用

九州大学工学部 正会員 榎木 武
九州大学工学部 学生員 永尾 祐治

1. はじめに

福岡市等のかなり発達した都市圏の人口は、一般に従来の急増基調から、漸増基調へと変化してきているが、都市圏内の人口動態を見ると、必ずしも一樣な変化を示しているとは言えない。人口は、主として、都心部から郊外へより安い住宅、土地、或いは、よりよい生活環境を求めて移動してゆく傾向にあるが、都市圏内部の地域内細分ゾーンでみると、安い地価や、良好な生活環境にも拘らず、地形、行政上の制約等の種々の理由から、人口の増加が押えられている地域や、過疎、過密の現象が如定に見られる地域が混在し、これらの複雑な現象を説明することが難しい状態にある。これに対し、従来から提案されてきた計量経済モデル、重力モデル等の手法は、市区町村単位程度の人口予測には、十分活用できるが、地域内細分ゾーンでの人口動態を説明する上で、必ずしも満足いく手法とは言えない面がある。そこで本研究では、都市及びその周辺地域における人口動態を、その細部にわたって説明する域内流動モデルの確立を試みるものである。

都市における人口動態は、周知のごとく、自然増と社会増に分けられる。自然増については、さらに出生増、死亡減に、社会増については、自地域内移動と他地域間移動による変動成分に分けられる。福岡市を例にとれば、図-1に示すように、出生率は、近年なめらかな曲線に従う低下傾向を示



してあり、また死亡率に関しては、ほぼ横ばい状態にある。従って自然増に関しては、時系列モデルや、各地域の人口、年齢構成等を用いた重回帰分析より得られる統計モデルの活用も十分可能であると判断される。社会増のうち、他地域間移動成分に関しては、その地域の地域構造や、全体的な経済変動等による外生的影響を受けるものである(図-3)。自地域内移動成分は、例えば、都心から郊外へ住宅立地を求めることなどにより移動する人口動態であり、各地域の土地利用の性質により特徴づけられるものであるが、これと同時に、都心から郊外へ向うポテンシャル・フローの類似性質をあてはめることが可能であろう。

以上の考察を踏えて、本研究では、自然増、社会増のうち他地域間移動成分については、従来型人口動態モデル、或いは統計モデルにより別途算出されるものと考え、この成果を指標として組み込みながら、自地域内移動成分を流体力学に類似し、その支配方程式を作成し、これを用いることにより、都市内の細部にわたる人口動態を、精度よく予測せんとするものである。

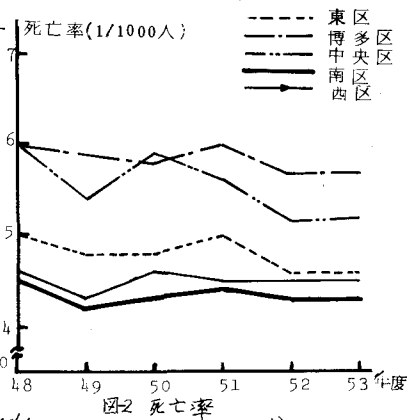
2. 解析概要

①. 支配方程式の誘導

図-4に示すように、対象地域に基準直交座標系 x, y を導入し、その微小要素 $dxdy$ を取り出すものとする。 x, y 方向よりの流入入による微小要素内の人口変化は、次式で与えられる。

$$u \frac{\partial D}{\partial x} dy - \{ uD + \frac{\partial (uD)}{\partial x} dx \} dy + v \frac{\partial D}{\partial y} dx - \{ vD + \frac{\partial (vD)}{\partial y} dy \} dx = - \frac{\partial (uD)}{\partial x} dxdy - \frac{\partial (vD)}{\partial y} dx dy$$

ここに D (人/ha): 居住人口密度, u, v (人/年): x, y 方向の人口移動速度成分



また、要素内での出生、死亡、他地域間移動による人口増加は、

$$(\alpha - \beta + \gamma) D dx dy \quad (2)$$

ここに α (‰):出生率, β (‰):死亡率, γ (‰):他地域間移動率

一方、人口の密度変化を時間当り量とすると、微小要素全体の人口変化は、

$$\left(\frac{\partial D}{\partial t} \right) dx dy \quad (3)$$

である。人口に関して保存則が成立すると仮定すれば、式(1)(2)の総和は、式(3)に等しくなければならない。このことから次式が得られ、これが本題の連続方程式となるものである。

$$\left\{ -\frac{\partial(uD)}{\partial x} - \frac{\partial(vD)}{\partial y} \right\} dx dy + (\alpha - \beta + \gamma) D dx dy = \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right) dx dy$$

すなわち、

$$-\frac{\partial(uD)}{\partial x} - \frac{\partial(vD)}{\partial y} + (\alpha - \beta + \gamma) D = \frac{\partial D}{\partial t} \quad (4)$$

式(4)における人口移動速度成分 u, v は、地下水流れの Darcy 則の類似概念と、式(4)の解析上の便宜を配慮して、次式を仮定する。

$$u = -\frac{R_x}{D} \frac{\partial D}{\partial x}, \quad v = -\frac{R_y}{D} \frac{\partial D}{\partial y} \quad (\text{ここに } R_x, R_y \text{ は人口移動係数と見做せる定数})$$

式(4)の意味するところは、人口移動速度成分が、密度勾配に比例し、密度に反比例するというものである。人口移動速度成分は、人口密度が同じレベルにあれば、密度勾配が大きいほど速いと考えられ、また密度勾配が同じでも人口密度が大きい所では、速度は遅く、小さい所では速いと考えられる。加えて、 R_x, R_y は各要素毎に変化士せて調整する計算法をとるので、式(4)を仮定することも十分妥当であると考えられる。式(4)に式(5)を代入すれば、

$$R_x \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + R_y \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} + (\alpha - \beta + \gamma) D - \frac{\partial D}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

式(6)が本理論における支配方程式である。なお式(6)の境界条件は、次の2つが考えられる。

①境界で人口密度が既知である場合； $D = D_0$ (既知) (7)

②境界を介して人口の移動量が押えられする場合； $-uD_x - vD_y + \gamma = 0$

$$\text{すなわち、} R_x \frac{\partial D}{\partial x} + R_y \frac{\partial D}{\partial y} + \gamma = 0 \quad (8)$$

ここに (x, y) : 境界線上に并する辺上の法線の x, y 軸に関する方向余弦

γ : 境界単位長さ当りの流出入量

残された問題は、式(6)を式(7)または式(8)の条件のもとに解析することであるが、 $R_x, R_y, \alpha, \beta, \gamma$ は、ゾーン単位に大きく変動する不均質状態にあり、また境界も複雑であるから、これを関数的に解析することは困難である。そこで、式(6)の汎関数を求め、その停留値問題として近似的に解析するものとする。すなわち、式(6)の汎関数を Π とすれば、

$$\Pi = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left\{ R_x \left(\frac{\partial D}{\partial x} \right)^2 + R_y \left(\frac{\partial D}{\partial y} \right)^2 - (\alpha - \beta + \gamma) D^2 \right\} + \frac{\partial D}{\partial t} D \right] d\Omega \quad (\text{ここに } \Omega : \text{解析領域}) \quad (9)$$

である。また式(6)の境界条件を用いる場合には、境界項を加えた次式で与えられる。

$$\Pi = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left\{ R_x \left(\frac{\partial D}{\partial x} \right)^2 + R_y \left(\frac{\partial D}{\partial y} \right)^2 - (\alpha - \beta + \gamma) D^2 \right\} + \frac{\partial D}{\partial t} D \right] d\Omega + \int_C \gamma D d\Omega \quad (\text{ここに } C : \text{境界線}) \quad (10)$$

②、人口密度の形状関数及び FEM 基本式の導出

図-5 に示すように、対象地域を三角形要素で区切り、要素内人口密度を、 x, y による一次式と仮定する。

$$D = [1 \quad x \quad y] [a_0 \quad a_1 \quad a_2]^T = \mathbf{x}^T \mathbf{a} \quad (11)$$

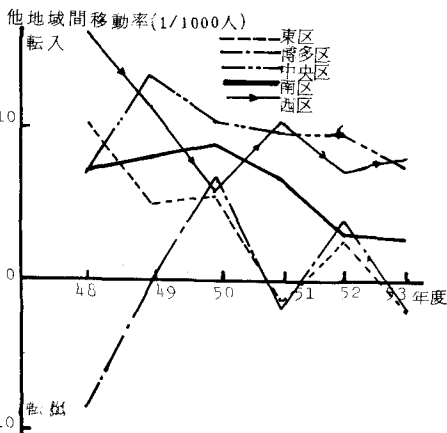


図-3 他地域間移動率

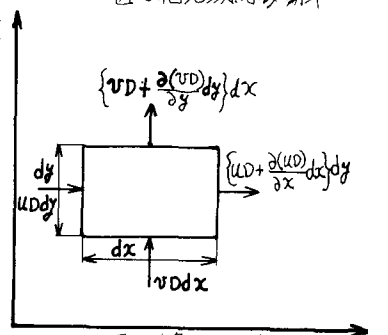


図-4 対象地域の基準座標系

ここに a_0, a_1, a_2 は、次式により定まる定数である。

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_R & y_R \end{pmatrix}^{-1} = P^{-1} D^e \quad (2) \quad \left(\begin{array}{l} \text{但し } (x_i, y_i) \text{ 等は、基準直交座標系 } x, y \text{ に対し} \\ \text{する3節要素頂点の座標値、} D_i \text{ 等は、3節形} \\ \text{頂点 } i \text{ 等における人口密度である。} \end{array} \right)$$

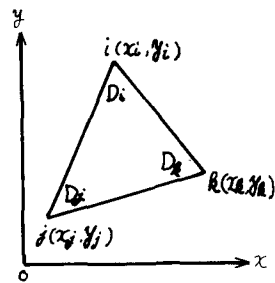


図-5 考察対象地域

式(2)を式(1)に代入すれば、 $D = [N_i \ N_j \ N_R] D^e$

$$\therefore N_{ijR} = \frac{1}{2\Delta} (a_{ijR} + b_{ijR}x + c_{ijR}y), \quad 2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_R & y_R \end{vmatrix},$$

$$a_i = x_j y_R - x_R y_j, \quad b_i = y_j - y_R, \quad c_i = x_R - x_j$$

$$a_j = x_R y_i - x_i y_R, \quad b_j = y_R - y_i, \quad c_j = x_i - x_R$$

$$a_R = x_i y_j - x_j y_i, \quad b_R = y_i - y_j, \quad c_R = x_j - x_i$$

式(4)に関して、その変分方程式を求めると、次の式(4)を得る。

$$\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial D} \right\}^e = \int_S \left\{ R_x \frac{\partial D}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\}^e + R_y \frac{\partial D}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\}^e - (\alpha - \beta + \gamma) D \left\{ \frac{\partial D}{\partial x} \right\}^e + \frac{\partial D}{\partial y} \left\{ \frac{\partial D}{\partial x} \right\}^e \right\} dS \quad (4)$$

$$\therefore \frac{\partial D}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} [b_j \ b_R] D^e, \quad \frac{\partial D}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} [c_j \ c_R] D^e, \quad \frac{\partial (\frac{\partial D}{\partial x})}{\partial x} = \frac{b_j}{2\Delta}, \quad \frac{\partial (\frac{\partial D}{\partial x})}{\partial y} = \frac{c_j}{2\Delta}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = N, \quad \frac{\partial D}{\partial t} = [N_i \ N_j \ N_R] \frac{\partial D^e}{\partial t} \quad \text{となるので、式(4)の第1項は、}$$

$$\text{第1項} = R_x \int_S \frac{1}{2\Delta} [b_j \ b_R] D^e \left\{ \frac{b_j}{2\Delta} \right\}^e dS = \frac{R_x}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_j & b_R \\ b_j b_j & b_j b_R \\ b_j b_R & b_R b_R \end{bmatrix} \text{SYM} D^e = \frac{R_x}{4\Delta} B D^e \quad (5)$$

$$\text{同様にして、第2項を計算すれば、第2項} = \frac{R_y}{4\Delta} C D^e \quad (6)$$

$$\therefore B = \begin{bmatrix} b_j^2 & b_j b_R \\ b_j b_R & b_R^2 \end{bmatrix} \text{SYM}, \quad C = \begin{bmatrix} c_j^2 & c_j c_R \\ c_j c_R & c_R^2 \end{bmatrix} \text{SYM}$$

第3項 $= -(\alpha - \beta + \gamma) \int_S D \left\{ \frac{\partial D}{\partial x} \right\}^e dS$ であるが、計算を簡単にするため、座標系 x, y は、毎要素に、その図心に原点を移動するものとする。このとき、

$$\text{第3項} = -\frac{(\alpha - \beta + \gamma)}{48\Delta} F D^e \quad (7)$$

$$\therefore F = \begin{pmatrix} 12a_i^2 + b_j^2 x_i^2 + c_j^2 y_i^2 + 2b_j c_j x_i y_i & 12a_j^2 + b_j^2 x_j^2 + c_j^2 y_j^2 + 2b_j c_j x_j y_j & 12a_R^2 + b_R^2 x_R^2 + c_R^2 y_R^2 + 2b_R c_R x_R y_R \\ 12a_i a_j + b_j b_R x_i x_j + c_j c_R y_i y_j + 2b_j c_j x_i y_j & 12a_j a_R + b_j b_R x_j x_R + c_j c_R y_j y_R + 2b_j c_j x_j y_R & 12a_i a_R + b_i b_R x_i x_R + c_i c_R y_i y_R + 2b_i c_i x_i y_R \\ 12a_i a_R + b_i b_R x_i x_R + c_i c_R y_i y_R + 2b_i c_i x_i y_R & 12a_j a_R + b_j b_R x_j x_R + c_j c_R y_j y_R + 2b_j c_j x_j y_R & 12a_R^2 + b_R^2 x_R^2 + c_R^2 y_R^2 + 2b_R c_R x_R y_R \end{pmatrix} \text{SYM}$$

$$\text{さらに、第4項} = \frac{F}{48\Delta} \frac{\partial D^e}{\partial t} \quad (8)$$

以上の式(4),(5),(6),(7)を用いると、式(4)の変分方程式に対する一要素からの寄与が、次のように算定されることになる。

$$\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial D} \right\}^e = \left(\frac{R_x}{4\Delta} B + \frac{R_y}{4\Delta} C \right) D^e - \frac{(\alpha - \beta + \gamma)}{48\Delta} F D^e + \frac{F}{48\Delta} \frac{\partial D^e}{\partial t} \quad (9)$$

$$= \left(\frac{R_x}{4\Delta} B + \frac{R_y}{4\Delta} C - \frac{(\alpha - \beta + \gamma)}{48\Delta} F \right) D^e + \frac{F}{48\Delta} \frac{\partial D^e}{\partial t} \quad (10)$$

$$\text{式(9)において、} \frac{R_x}{4\Delta} B + \frac{R_y}{4\Delta} C - \frac{(\alpha - \beta + \gamma)}{48\Delta} F = g, \quad \frac{F}{48\Delta} = h \quad (11)$$

$$\text{とすると、} \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial D} \right\}^e = g D^e + h \frac{\partial D^e}{\partial t} \quad (12)$$

$$\text{式(2)を解析領域全体で集積すると、} \sum (g D^e + h \frac{\partial D^e}{\partial t}) = 0$$

$$\therefore G D + H \frac{\partial D}{\partial t} = 0 \quad (13)$$

ここに G : 解析領域全体で g を集積したもの

H : 解析領域全体で h を集積したもの

D : 解析領域全体の D のベクトル。

汎関数として、式(10)を用いるとき、2頂点間で、 D が直線変化するが、その面に、 g が一定であると仮定すれば、境界項は、次のように得られる。

$$\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial D} \right\}^e \left(\int_C g D d\sigma \right)^2 = \left\{ \frac{g^2 L}{2} \right\} \quad (\therefore L: \text{境界長}) \quad (14)$$

(3). 時間に関する離散化

ここで式(2)の時間微分項の処理として、Crank-Nicolson法を適用する。すなわち、式(10)を $(t + \frac{1}{2}\Delta t)$ におい

てたれば、

$$G \{ \varepsilon D^{trot} + (1-\varepsilon) D^t \} + H \{ \varepsilon \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^{trot} + (1-\varepsilon) \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^t \} = 0 \quad (24)$$

ここに、 $\varepsilon: 0 \leq \varepsilon \leq 1$ なる定数、 $G, H: (t+\varepsilon\Delta t)$ におけるマトリックス

一方、

$$D^{t+\Delta t} = D^t + \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^t \Delta t + \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^{trot} - \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^t \right\} \Delta t \quad (25)$$

$$\text{式(24)を式(25)に代入すれば、} \quad G \{ \varepsilon D^{trot} + (1-\varepsilon) D^t \} + H \left\{ \frac{1}{\Delta t} D^{trot} - \frac{1}{\Delta t} D^t \right\} = 0$$

$$\therefore (E G + \frac{1}{\Delta t} H) D^{trot} = \{ -(1-\varepsilon) G + \frac{1}{\Delta t} H \} D^t \quad (26)$$

式(26)が本題解析の基本連立方程式となるものであり、当該時間段階の境界密度や出生率及び前時間段階の人口密度が与えられれば、本式を解くことにより、 $\varepsilon\Delta t$ 時間後の人口密度が求められる。この結果に要素面積を乗ずることにより、要素単位の人口が予測できる。

(4). R_x, R_y の算出

式(24)において、 R_x, R_y に具体的なデータを求めることは困難である。そこで、ここでは次のような方法で R_x, R_y を算出する。式(24)において一要素からの寄与は、

$$\left[\frac{1}{4\Delta} B D^e - \frac{1}{4\Delta} C D^e \right] \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} - \frac{(\alpha-\beta+\gamma)}{4\Delta} E D^e + \frac{1}{4\Delta} E \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^e \quad (27)$$

式(28)を、 $(t+\varepsilon\Delta t)$ において考えれば、一要素からの寄与は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} B & C \end{bmatrix} \left[\frac{E D^{(trot)e}}{E D^{(trot)e} + (1-\varepsilon) D^{(trot)e}} - \frac{R_x}{R_y} \right] - \frac{(\alpha-\beta+\gamma) E}{4\Delta} \left\{ \varepsilon D^{(trot)e} + (1-\varepsilon) D^{(trot)e} \right\} \\ & + \frac{1}{4\Delta} E \left\{ D^{(t+\Delta t)e} - D^{(trot)e} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)で、 $\{R_x, R_y\}^T$ の係数マトリックスを A^e 、第2,3項を Q^e とおくと、

$$A^e K^e + Q^e = 0 \quad (29)$$

式(29)を解析領域全体でたてれば、

$$A K + Q = 0 \quad (30)$$

ここに $A: A^e$ を解析領域全体で集積したマトリックス

$Q: Q^e$ を解析領域全体で集積したマトリックス

$K: [R_x, R_y]^T$ で構成される列ベクトル

式(30)は、 R_x, R_y を未知数とする連立方程式であるが、一般に未知数 R_x, R_y の数は、式の数より少なく、同時に全ての方程式を満足する R_x, R_y を決定することは、困難である。従って、最小二乗法により、 R_x, R_y を決定するものとすれば、結局次式により算定されることになる。

$$K = -(A^T A)^{-1} A^T Q \quad (31)$$

3. 計算手順

以上に述べる理論を用いて、解析を行う場合の計算手順を示せば、図6のとおりである。

(1) 出生率 α 、死亡率 β 、他地域間移動率 γ の推定

本理論では、解析単位である三角形単位と、国勢調査における統計区を基礎にして分割する。このため、各三角形要素ごとに α, β, γ を与える必要があるが、実際には、そのようなデータの入手は困難であった。そこで区単位、あるいは町村単位の地域構造指標を用いて、重回帰分析により α, β, γ の回帰式を定め、それを統計区単位に適用して、各三角形要素の α, β, γ を推定する方法が考えられる。すなわち、地域構造的説明指標として、市町村単位と統計区単位に共通して得られるものを用いることとし、 α, β, γ の回帰モデル式を作成するものである。福岡市の例では、表-1に示すとき指標を取り上げ、これより α, β, γ の回帰式をステップ・ワイズ法により求めたが、その結果は次のとおりである。

$$\alpha = -29.83 - 0.048X_2 - 1.424X_3 - 1.161X_4 + 1.050X_7 + 1.036X_8 + 2.984X_9 \quad (32)$$

$$\beta = 8.415 - 0.001X_2 - 0.149X_4 + 0.057X_6 - 0.169X_8 - 0.203X_9 \quad (33)$$

$$\gamma = 142.195 + 0.001X_1 + 0.308X_2 - 0.798X_5 + 1.396X_6 - 1.392X_7 - 1.381X_8 \quad (34)$$

表-1 α, β, γ の説明変量名

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
人口密度	人口密度対前年度伸び率	年少人口指数	老年人口指数	従業者一人当り工業製品出荷額	15歳以上人口従業者数
X_7	X_8	X_9			
第三次従業者比率	第二次従業者比率	第一次従業者比率			

②. R_n, R_p の推定

得られた三角形要素毎の α, β, γ , 及び過去2期の三角形要素毎の頂点人口密度を評価して、式③に代入し、 K を算出する。より厳密には、過去の数期にわたって K を算出し、その時系列モデルを作成して、予測年度における K の値とする方法、或いは統計的手法にもとづく回帰モデル式を作成して、予測年度の K を推定すべきであろう。しかし K の変化が差程大さくない場合には、前期にえられた K を、そのまま活用する近似手法も容認できる。

③. 人口密度の算出

前述の②で得られた K 及び α, β, γ の値、及び前時間段階の人口密度を、式④に代入しこれに境界条件を考慮すれば、予測年度における人口密度が算出される。

④. 人口の算出

手順③で得られた人口密度と、各三角形要素の面積から、各三角形要素内の人口が算出される。簡便的には、三角形要素の3頂点の人口密度の平均値に、要素面積を乗ずる方法が考えられ、推定数の推定精度の関連から、これでも十分実用的であろう。さらに各三角形要素の人口を、統計区単位、区単位、全市においてまとめれば、所要の領域の人口が得られることになる。

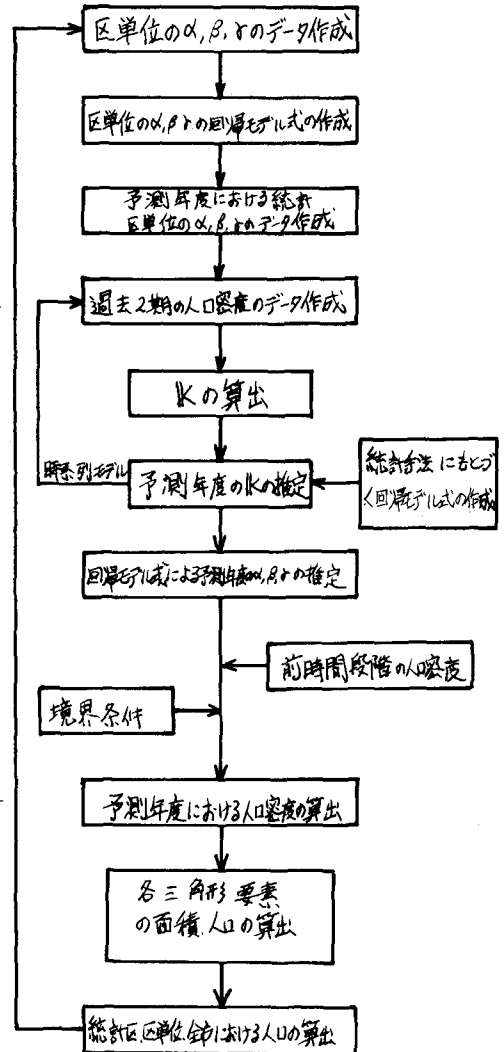


図-6 計算手順