不確実性とファジー性下の意思決定の定式化

京都大学　正員　黒田勝彦
京都大学　正員　長尾義三

Synopsis

本研究は，プロジェクト代替案の評価や各種設計代替案の評価の際に不可避的に存在する不確実性（Uncertainty）とファジー性（Fuzziness）を同時に考慮した意思決定の方法を定式化したものである。不確実性としては，代替案の評価項目毎の結果（Consequence）の不確実性を考え，予測式に含まれる変数のランダム性（Randomness），パラメーター推定に伴なう不完全性（Imperfect Information）及びモデル誤差（Modeling error）を取り上げている。ファジー性は，意思決定者（Decision maker）の評価に伴なう曖昧さを取り上げている。例題の結果から，代替案の結果（Consequence）の不確実性の低い程，望ましい結果の値の集合（ファジー集合）に入る確率の高い代替程，選択され易いことが明らかになった。但し，代替案の評価基準はファジー確率最大化基準を設定した。

Introduction

計画や設計の代替案の評価には，予測される結果の不確実性や意思決定者の評価に於るファジー性は不可避的である。代替案がもたらす結果の予測には，確率・統計モデル，決定論的モデルの如何を問わず，前記したような原因による不確実性が伴なう。これらは，自然現象，社会現象のいずれにも云える。一方，水質・大気質の評価にみられるように＊＊ p.p.m.～○○ p.p.m.は良いとか悪いとかのはっきりした集合の境界値を決定できない問題が存在する。即ち，より良い（better）値とか，より悪い（worse）値とかの境界値を明示的に示し難い問題を含む評価には，必然的に曖昧さが混入する。このような意思決定に伴なう不確実性とファジー性は如何に処理すれば良いか，現在，大きな社会的関心を呼んでいる問題である。不確実性の下での意思決定は，Von Neumann & Morgenstern（1947）以来，Schlaifer（1967），Raiffa（1968），Christenson（1965），Wilson（1966），Martin & Harvey（1972）及び Cochrane & Zeleny（1973）等による一連の理論展開がなされており，Fishburn（1964）の理論を基に Keeny（1972）は多属性効用理論を総合評価，グループの意思決定に応用し急速な発展を遂げている。又，ファジー代数を応用した意思決定は，Zadeh（1965）以来，Bellman & Zadeh（1970），菅野（1974），Zadeh, Fu, Tanaka & Shimura（1975），田畑・関田（1976），Ramesh（1976），Gaines（1976）及び田中・浅居（1979）等によって理論展開がなされている。これらは，不確実性とファジー性が別個に存在する問題の定式化であり，両者が同時に存在する問題の定式化はなされていない。両者を結合した意思決定の定式化には，不確実性の定式化，ファジー性の定式化を通じてなされる必要がある。次節以下，この定式化を試みる。

Mathematical Model of Uncertainty

前述したように，こゝで取り扱う不確実性は，代替案 x_j の属性（Attribute）a_i に関する結果（Consequence）y_{ij} の不確実性に限定する。代替案 x_j は，決定変数（$x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{nj}$）の関数又は集合である。

属性 a_i とは，評価項目の測度である単位（unit）を持つ計量可能な量である。このとき，代替案 x_j の属性 a_i に対応する結果 y_{ij} は、次の変換によって予測できるものとする。

$$y_{ij}=f_i(x_j,\boldsymbol{z}/\Theta)+e_i \qquad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n) \qquad \cdots(1)$$

但し，$\boldsymbol{z}$ は変換 f_i に含まれるランダム変数のベクトルで，$\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_r)$ とする。Θ は，同じく f_i に含まれるパラメーターで $\Theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_s)$ とする。e_i は変換 f_i が持つ誤差（モデル誤差と呼ぶ）である。今，$\boldsymbol{z}$ の平均値を $M_{\boldsymbol{z}}$，即ち

$$M_{\boldsymbol{z}}=(\mu_{z_1},\mu_{z_2},\cdots,\mu_{z_r})$$

とすると，(1)式を $M_{\boldsymbol{z}}$ の回りにTaylor展開し，1次までの項で近似すると

$$y_{ij}\simeq f_i(x_j,M_{\boldsymbol{z}}/\Theta)+\sum_{\ell=1}^{r}\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_\ell}\bigg|_{\boldsymbol{z}=M_{\boldsymbol{z}}}\right)(z_\ell-\mu_{z_\ell})+e_i \qquad \cdots(2)$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

となる。このような1次近似を行なう理由は，ほとんどの変換 f_i が、ランダム変数の複雑な関数となっており，個々のランダム変数 z_ℓ $(\ell=1,2,\cdots r)$ の分布が既知だとしても，関数の分布形を決定するのは不可能に近いし，不必要と考えられるからである。y_{ij} 及び e_i の平均値及び標準偏差をそれぞれ，$\bar{y}_{ij}$，$\bar{e}_i$ 及び $\tilde{y}_{ij}$，$\tilde{e}_i$ とすると，これらは(1)式より，

$$\bar{y}_{ij}=f_i(x_j,M_{\boldsymbol{z}}/\Theta)+\bar{e}_i \qquad \cdots(3)$$

及び

$$\tilde{y}_{ij}^{\,2}=\sum_{\ell=1}^{r}\sum_{\ell'=1}^{r}\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_\ell}\bigg|_{\boldsymbol{z}=M_{\boldsymbol{z}}}\right)\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_{\ell'}}\bigg|_{\boldsymbol{z}=M_{\boldsymbol{z}}}\right)\mathrm{cov}(z_\ell,z_{\ell'})+\tilde{e}_i^{\,2} \qquad \cdots(4)$$

但し，(4)式では，z_ℓ と e_i は統計的に独立と仮定した。今，y_{ij} は正規分布に従うものとすると，y_{ij} の確率密度関数 $\phi(y_{ij})$ は

$$\phi(y_{ij})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\tilde{y}_{ij}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_{ij}-\bar{y}_{ij}}{\tilde{y}_{ij}}\right)^2\right] \qquad \cdots(5)$$

(5)式によって，結果 y_{ij} の不確実性を確率で与えることができる。

Membership Function of Fuzzy Set and Its Probability

今，結果（Consequence）y_i の値について，望ましい y_i の値の集合をファジー集合 $\tilde{F}_i$ とする。y_i の集合 $\tilde{F}_i$ への帰属度を関数 $m_i(y_i)$ とする。但し，$0\leq m_i(y_i)\leq 1$ の実数。y_i は式(5)で定義された確率変数と考えられるので，$m_i(y_i)$ はボレル可測関数であることが証明できる。このとき，ファジー集合 $\tilde{F}_i$ を，ファジー事象と呼ぶ。さて，以上の準備の下で，ファジイ事象の確率 $P(\tilde{F}_i)$ を $m_i(y_i)$ の期待値として定義する。

即ち，

$$P(F_i)=\int m_i(y_i)\phi(y_i)dy_i \qquad (i=1,2,\cdots,m) \qquad ---(6)$$

従って，代替案 x_j （$j=1,2,\cdots,n$）に関する属性 a_i についてのファジー確率 $P(F_{ij})$ は

$$P(F_{ij})=\int m_i(y_{ij})\phi(y_{ij})dy_{ij} \qquad ---(7)$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

で求めることができる。

以上の如く定義されたファジー確率 $P(F_{ij})$ は，結果（Consequence）y_{ij} の望ましさの期待値として解釈できる。即ち，ファジーな期待効用とも考えられる。

Optimal Alternative (1) — Case with equally weighting attributes —

(7)式によるファジー確率及びランダム化された代替案集合を定義することにより，m次元空間上での代替案のとつ集合を作ることができる。一方，帰属度関数 $m_i(y_i)$ と $m_k(y_k)$ を考えると，通常

$$\left.\begin{array}{l} m_i(y_i,y_k)=m_i(y_i) \\ m_k(y_k,y_i)=m_k(y_k) \end{array} \quad (i,k=1,2,\cdots,m)\right\} \qquad ---(8)$$

であるので，ファジ事象 F_i と F_k の積集合の確率 $P(F_iF_k)$ は，積集合 F_iF_k の帰属度関数が

$$\begin{aligned} m_{ik}(y_i,y_k)&=m_i(y_i,y_k)\cdot m_k(y_k,y_i) \\ &=m_i(y_i)\cdot m_k(y_k) \end{aligned} \qquad ---(9)$$

であるから

$$P(F_iF_k)=\iint m_i(y_i)\cdot m_k(y_k)\,\phi(y_i,y_k)dy_i dy_k \qquad ---(10)$$

で与えられる。但し，$\phi(y_i,y_k)$ は，y_i と y_k の同時確率密度関数である。特に y_i と y_k が互いに独立な場合は

$$\phi(y_i,y_k)=\phi(y_i)\cdot\phi(y_k) \qquad ---(11)$$

であるので，(10)式は

$$P(F_iF_k)=\int m_i(y_i)\phi(y_i)dy_i\cdot\int m_k(y_k)\phi(y_k)dy_k=P(F_i)\cdot P(F_k) \qquad ---(12)$$

となる。

以上のことから，一般的には $\{P(F_1),P(F_2),\cdots,P(F_m)\}$ の m次元空間上で定義された代替案のとつ集合の内，ファジー同時確率 $P(F_1F_2\cdots F_m)$ を最大にする代替案が選択される。即ち，ファジー同時確率最大を満たす代替案が最適代替案として定義される。

Optimal Alternative (2) — Case with weighting attributes —

評価項目の間にウェイト付をする場合については，(9)式の積集合の帰属度関数 $m_{ik}(y_i,y_k)$ は，

$$m_{ik}(y_i, y_k) = m_i(y_i)^{\alpha_i} \cdot m_k(y_k)^{\alpha_k} \qquad \text{------} \ (13)$$

として与えることができる。このとき，ファジー同時確率は次式で定義できる。

$$P(\tilde{F}_i \tilde{F}_k) = \iint m_i(y_i)^{\alpha_i} \cdot m_k(y_k)^{\alpha_k} \phi(y_i, y_k)\, dy_i\, dy_k \qquad \text{---} \ (14)$$

特に，y_i, y_k が独立な場合は

$$P(\tilde{F}_i \tilde{F}_k) = \int m_i(y_i)^{\alpha_i} \phi(y_i)\, dy_i \cdot \int m_k(y_k)^{\alpha_k} \phi(y_k)\, dy_k \qquad \text{----} (15)$$

となるから，

$$\int m_i(y_i)^{\alpha_i} \phi(y_i)\, dy_i = \left[\int m_i(y_i) \phi(y_i)\, dy_i \right]^{\lambda_i} \equiv P(\tilde{F}_i)^{\lambda_i} \qquad \text{---} \ (16)$$

と定義する。　即ち，

$$\lambda_i = \ln \left[\int m_i(y_i)^{\alpha_i} \phi(y_i)\, dy_i \right] \Big/ \ln \left[\int m_i(y_i) \phi(y_i)\, dy_i \right] \qquad \text{----} \ (17)$$

を用いて，(15)式の同時確率を次式で与えることができる。

$$P(\tilde{F}_i \tilde{F}_k) = P(\tilde{F}_i)^{\lambda_i} P(\tilde{F}_k)^{\lambda_k} \qquad \text{---} \ (18)$$

一般に，

$$\left. \begin{aligned} & P(\tilde{F}_1 \tilde{F}_2 \cdots \tilde{F}_m) = P(\tilde{F}_1)^{\lambda_1} \cdot P(\tilde{F}_2)^{\lambda_2} \cdots\cdots P(\tilde{F}_m)^{\lambda_m} \\ & \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \quad 0 \le \lambda_i \le 1 \end{aligned} \right\} \qquad \text{----} \ (19)$$

(19)式は，両辺の対数をとると

$$\ln P(\tilde{F}_1 \tilde{F}_2 \cdots \tilde{F}_m) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ln P(\tilde{F}_i) \qquad \text{---} \ (20)$$

となるので，$\{ \ln P(\tilde{F}_1), \ln P(\tilde{F}_2), \cdots, \ln P(\tilde{F}_m) \}$ の m 次元空間上で定義された代替案のとつ集合のうち，$\ln P(\tilde{F}_1 \tilde{F}_2 \cdots \tilde{F}_m)$ を最大とする代替案が最適である。

Example

実数 x の 5 つの異なる点で与えられる代替案 $x_1, x_2, \cdots, x_5$ があるものとしよう。この場合，決定変数は離散的な値をとる実数であり，同時に代替案を表わす。代替案を評価する項目は 2 つとし，それぞれの属性を a_1, a_2 で表わすものとする。さて，代替案 x_j $(j = 1, 2, \cdots, 5)$ を実施した時の属性 a_i $(i = 1, 2)$ の結果を y_{ij} $(i = 1, 2;\ j = 1, 2, \cdots, 5)$ とする。結果 y_i の予測式は

$$y_i = ax + bz_i + c + e_i \qquad (i = 1, 2) \qquad \cdots \ (21)$$

で与えられているものとする。但し，a, b, c は一定値をとるパラメータで，z_i は平均 $\bar{z}_i$，標準偏差 $\hat{z}_i$ なる確率変数，e_i は平均 $\bar{e}_i$，標準偏差 $\hat{e}_i$ なる確率変数とする。

この時、代替案 x_j の属性 a_i に対する結果の予測値は、平均値及び標準偏差が

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_{ij} &= a x_j + b\bar{z}_i + c + \bar{e}_i \equiv \mu_{ij} \\ \tilde{y}_{ij} &= \sqrt{(b\tilde{z}_i)^2 + \tilde{e}_i^2} \equiv \sigma_{ij} \end{aligned}\right\} \quad (i=1,2;\ j=1,2,\cdots,5) \qquad \cdots(22)$$

である正規確率変数とする。簡単のため a, b, c, を含むパラメータ μ_{ij}, σ_{ij} は全て既知とする。
いま、結果 y_i に対し、次式で帰属度関数が定義されているものとする、

$$m_i(y_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{d_i} & \text{for } 0 \le y_i \le y_i^*, \quad d_i > 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \qquad (i=1,2) \qquad ---(23)$$

式(22), (23)を式(7)に適用して、ファジー確率を求めると

$$P(F_{ij}) = \frac{1}{d_i}\int_0^{y_i^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_{ij}-\mu_{ij}}{\sigma_{ij}}\right)^2\right] dy_{ij}$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{d_i}\left[\Phi\left(\frac{y^*-\mu_{ij}}{\sigma_{ij}}\right) - \Phi\left(-\frac{\mu_{ij}}{\sigma_{ij}}\right)\right] \qquad ---(24)$$

$$(i=1,2;\ j=1,2,\cdots,5)$$

さて、不確実性の影響をみる為に式(24)を少し検討しよう。 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の累積確率を表わしているので、

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij} \longrightarrow \infty \text{ のとき} \quad & P(F_{ij}) = \frac{1}{d_i}[\Phi(0) - \Phi(0)] \to 0 \\ \sigma_{ij} \longrightarrow 0 \text{ のとき} \quad & P(F_{ij}) = \frac{1}{d_i}[\Phi(+\infty) - \Phi(-\infty)] \to \frac{1}{d_i} \end{aligned}\right\} \qquad ---(25)$$

となる。即ち、不確実性の大きい代替案程、ファジー確率は小さくなる。このことは図-1に於て、原点に近い点に寄るという意味でファジー同時確率を小さくする代替案を意味し、選択され難くなる。

以上の例題は、パラメータに関して完全情報(Perfect Information)を仮定したが、従来の統計的決定理論に準じてパラメータを情報に基づいて推測する過程も導入できるし、ファジー情報の取扱いも可能である。但し、その場合は、図中の $P(F_{ij})$ は情報に依存した推定ファジー確率 $\hat{P}(F_{ij}|\mathcal{D})$ となる。更に例題から理解されるように、結果 y_{ij} の評価に伴なう曖昧さは、帰属度関数の適当な設定によって表現し得るし、これらは、ファジー確率に直接影響するので、ファジーな状態の程度も代替案選択過程に折り込める。

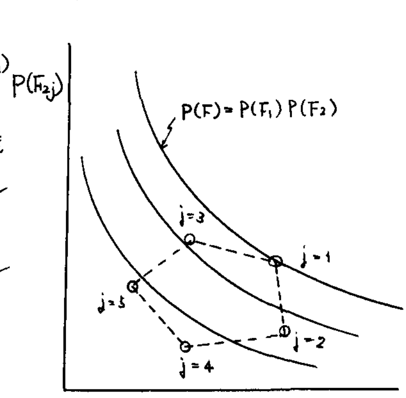

図-1. ランダム化代替案とファジー確率

最后に、式(13)〜式(20)で示したように、属性間にウェイト付を行なって評価する場合は、図-2の模式図の如く了解される。

図-2は属性a_1にλ_1, 属性a_2にλ_2（$\lambda_1+\lambda_2=1$）なるウェイトを式(19)の如く付けた場合の解の存在性を図式的に示したものである。これから, 複数の評価主体が存在し, 個々人が評価項目に付けるウェイトが異なる場合なども, ある仮定の下で合理的な代替案選択が可能である。筆者らは これら一連の意思決定の定式化を研究中であり, まとまり次第, 公表する予定でいる。

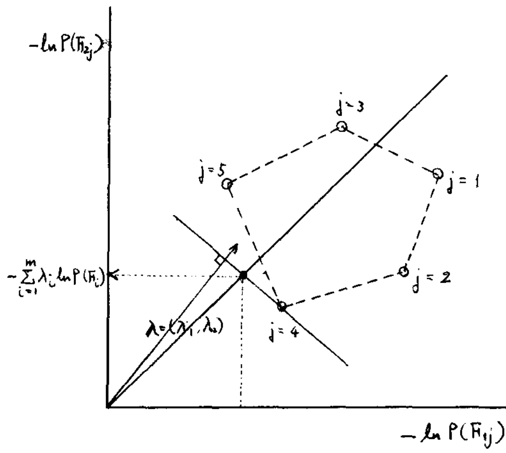

図-2. 評価項目間にウェイト付を行なう場合

References

1) Bellman, R.E. & Zadeh L.A. (1970): "Decision Making in a Fuzzy environment", Management Science 17B.

2) Christensen, C. (1965): "Strategic Aspects of Competitive Bidding for Corporate Debt Securities," Div. of Res., Havard Bussiness School.

3) Cochrane J.L. & Zeleny M. (1973): "Multiple Criteria Decision Making," Univ. of South Carolina Press., Columbia

4) Fishburn, P.C. (1964); "Decision and Value Theory", John & Wiley, New York.

5) Gaines, B.R. (1976); "Foundations of Fuzzy reasoning", Int. Jour. Man-Machine Studies, 8

6) Keeny, R.L. (1972): "Utility functions for multiattributed Consequences." management Science 18.

7) Raiffa, H. (1968); "Decision Analysis, Introductory lectures on Choices under Uncertainty." Addison-Wesley.

8) Ramesh, J. (1976); "Decision Making in the Presence of Fuzzy Variables," I.E.E.E. Trans. on Syst. Man and Cybenetics.

9) Schlaifer, R.O. (1967): "Analysis of Decisions under Uncertainty", McGraw-Hill.

10) 菅野 (1973): "Fuzzy 測度と Fuzzy 積分", 計測自動制御学会論文集, 9.

12) 田畑・関田 (1976): "Fuzzy 論的意思決定と O.R.", オペレーションズ・リサーチ, Vol. 21, No. 5

13) 田中・浅居 (1979): "ファジイ意思決定について", 数理科学, No. 191.

14) Von Neumann J. & Morgenstern, O. (1944): "Theory of Games and Economic Behaviour," Princeton Univ. Press.

15) Wilson, R. (1966); "On the Theory of Syndicates." Working Paper No. 71R, Stanford Univ. Graduate School of Bussiness.

16) Zadeh L.A. (1965): "Fuzzy Sets", Information and Control, Vol. 8.

17) Zadeh, L.A, Fu, Tanaka & Shimura (1975); "Fuzzy Sets and their Application to Cognitive and Decision Processes.", Academic Press, New York