

均衡交通流の存在範囲について

岐阜大学工学部 正員 加藤 晃

岐阜大学工学部 正員 宮城俊秀

1. はじめに

交通量の予測は将来の交通施設に対する代替案の設定・評価の基礎となる情報を提供するための交通計画策定上の最も重要なプロセスの一つである。ところで、従来の予測方式の特徴は、靜点であることと一点予測方式であることが挙げられよう。こうした予測方式は比較的簡単で安価であり、0-1の決定情報を与えるため、代替案の設定・評価が容易に行なえるという利点がある。その反面、靜的予測方式は交通需要の变化の動的な側面を無視しているため予測精度が低下するという欠点もあり、データの累積に伴う予測精度の向上の可能性を無視している。また、一点予測方式による計画概念は、計画代替案集合を不当に狭める結果となる。すなわち、予測の不確実性により、将来予測される交通量はかなりの範囲の値をとりうるにも拘らず、限定された交通量のみを対象として計画策定を行なうことになる。そのため計画を繰り返し修正することを強いられてしまう。

本研究はこうした従来の一点予測方式に対するものとして区間予測方式を提案する。区間予測方式による将来交通量はある中をもつて与えられる。したがって、代替案の設定・評価に対し確率情報を与えることになる。たとえば、将来交通量が現在の交通施設容量を越えるか否かに対し、一点予測方式では“容量を越える”あるいは“現在の容量で十分である”のどちらかであるのに対し、区間予測方式では“70%の可能性で越えると思われる”というような判断を下すことになる。こうした区間予測方式に対する計画概念は、予測のもつ不確実性を考慮するための長期の計画に対しては抽象的にならざるをえない。そして、データの累積に伴い推定値の中を狭めることによってより具体的な計画代替案の策定、評価という段階的計画プロセスとなる。すなわち、予測方式と計画プロセスが一体となったシステムを提供する。また、それ故に動的予測方式とならざるをえない。

本稿は上述の区間予測方式についてその理論的裏付けを求めようとするもので予測値の変動の原因について述べるように考えている。すなわち、交通量予測の不確実性は分析者が現象に対し十分な知見を得てないために生じるものと、よりミクロに、トリップ主体の効用(トリップに対し)の不確実性の重め合わせである。第1点については、モデルのパラメータ推定に係わる問題であり、第2の点はトリップ主体の属性による評価基準の変動と代替案(モードあるいは経路)特性に関する情報の不完全さに起因する。

2. 交通均衡理論の一様化

交通均衡モデルはマクロ的モデルとミクロ的モデルに分けて考える必要がある。ここでいうマクロ的モデルとは単に交通需要量と施設供給量の均衡のみを考えてそこにトリップ主体の選択行動を含んでないモデルを指している。それに対し、ミクロ的モデルとはトリップ主体のモード選択や経路選択行動を含んだモデルのことで、選択行動を決定論的に記述するか確率論的に記述するかによって決定論的均衡モデルと確率論的均衡モデルに分類することができる。前者は特にWardrop均衡モデルと呼ばれることができる。数理最適化手法の応用によってWardrop均衡は高い精度で再現しうるのであったが、確率的均衡については具体的な計算法はまだ開発されていないように思う。したがって、本研究では予測方式としては決定論的手法を用い、その確率的に解釈するという方向で交通量予測の問題を考える。なお、簡単化のためモード選択行動は対象外とし、自動車交通のみを考える。

(1) 決定論的均衡 ----- Wardrop 均衡

決定論的ということは、代替経路集合 R の要素 r に対し、トリップ主体(個人またはグループ)の感じの効用 U_r が決定論的に定まるということである。今、トリップ主体の総数を N とし、同様な評価基準に従って行動するものと仮定する。また、最大の効用を与える経路集合を R_m ($R_m \subseteq R$) とし、そのときの効用を U_m とお

くとき、決定論的均衡は次のように記述できる⁽¹⁾

$$p_r = \begin{cases} > 0, & \text{if } U_r = U_m, U_m > U_j \text{ for all } j \neq R_m \\ = 0, & \text{if } U_r < U_m \end{cases} \quad (1)$$

ここに、 p_r は経路 r の選択率を表わし、 $p_r = n_r/N$, $\sum_{r \in R_m} n_r = N$ である。したがって、
 $\sum_{r \in R_m} p_r = 1 \quad (2)$

式(1)は次のようにも書ける。

$$U_r \begin{cases} = U_m & \text{if } n_r > 0 \\ < U_m & \text{if } n_r = 0 \end{cases} \quad (3)$$

初用が単に経路の所要時間の関数で与えられる場合を想定し、次のモデルを考える。

$$U_r = -\theta t_r$$

このとき、式(3)は次のようになる。

$$t_r \begin{cases} = t_m & \text{if } n_r > 0 \\ > t_m & \text{if } n_r = 0 \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 t_m は最短経路であることを意味し、上式はよく知られた Wardrop 均衡を表現している。

Wardrop 均衡問題は、非線形最適化問題に変換することができいくつかの解法が提案されている。しかし、著者らの経験によれば、厳密な均衡解は必ずしも実際の交通現象を説明しているとは言えず、非均衡の状況の方が現実的であるという結果を得ている⁽²⁾。次にこうした非 Wardrop 均衡について考えてみる。

(2) 確率的均衡

(1) では U_r を固定変数としたが、この変数と確率変数と考える方が現実的であろう。すなわち、

$$\tilde{U}_r = -\tilde{\theta} t_r \quad (5.a) \quad \tilde{U}_r = -\theta \tilde{t}_r \quad (5.b)$$

ここで、記号 $\sim$ はその変数が確率変数であることを表わしている。式(5.a)は経路 r の評価はトリップ主体の属性に依存して確率的に変動することを示し、式(5.b)はトリップ主体を集計的に扱っているが、日々所要時間の変動あるいは交差点での待ち時間等に関する情報が不完全であるためこれを確率変量としたものである。 θ , t_r の両変数と確率変数とする場合、あるいは多くの説明要因をもつ初用モデルの場合には、 $\tilde{U}_r = u_r + \tilde{\epsilon}_r$ という誤差モデルの方が有効であろう。

さて、 U_r と確率変量とした場合、もはや式(1)は成立せず、別の予測方式が必要となる。形式的には、

$$p_r = \Phi(\tilde{U}_r; r \in R) \quad (6)$$

ここで、記号 Φ は、単に関数と表わすだけでなく Φ を決定する方式と表わすものとする。通常の決定方式 Φ_I は、 U_r の確率分布関数 $F(u)$ を考え、代替経路集合 R からある経路 r を選択する確率は、 r の初用 $U_r = u_r$ と評価する確率と他の経路 $U_s < u_r$ と評価する確率の同時確率を考え、こうした評価が独立に行なわれるものとして、選択確率を次式で与えるものである⁽³⁾。

$$p_r = \int_{-\infty}^{\infty} f_r(u) \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^2 [1 - F_s(u_s)] du \quad (7)$$

ここに、 $f_r(u)$ は $F(u)$ の確率密度関数である。 t_r は交通施設のパフォーマンスによって決定され、フロー x_r (n_r/a , a は平均乗車人員) の関数であるから、

$$t_r = h_r(x_r) \quad (8)$$

また、 $p_r = n_r / \sum_{r \in R} n_r$ とは n_r から、 Φ_I における均衡とは、式(7), (8), (9) を満足する均衡フロー x_r^* を求めることである。しかし、決定方式 Φ_I によってこうした均衡解が求まるかどうか、ハッキリしたことはま

だれとんど解ってない。

次に本稿で提案する手法について述べる。この決定方式 Φ_E は、次のように書ける。

$$p_r = \begin{cases} >0, & \text{if } E[\tilde{U}_r] = E[\tilde{U}_m], E[\tilde{U}_m] > E[\tilde{U}_j] \text{ for all } j \in R_m \\ =0, & \text{if } E[\tilde{U}_r] < E[\tilde{U}_m] \end{cases}, \quad E[\tilde{U}_r] - \tilde{U}_r = -\theta \tilde{U}_r \quad (10)$$

すなわち、 Φ_E における p_r の決定は決定論的である。(したがって、 $E[X_r] = \Phi_E(-\theta E[h_v(X_r)])$ ⁽¹¹⁾ となるような均衡フロー $\tilde{x}_r$ が存在する。ここに、 E はその変量の期待値をとることを意味している。ところで、 $\tilde{U}_r$ は確率変数と定義したが、式(11)の左辺は $X_r = X p_r$ (X : OD交通量) で与えられ、 p_r は式(10)によって決定される。したがって、式(11)では OD交通量 X が確率的変動するものと解釈しなければならぬ。こうした X の変動によって X_r , $\tilde{U}_r$ も変動し、 $\tilde{x}_r$, $\tilde{U}_r$ は各々 $E[\tilde{x}_r]$, $E[\tilde{U}_r]$ のまわりに分布するであろう。このとき、Tchebycheff の不等式により、

$$\left. \begin{aligned} P\{E[\tilde{x}_r] - \varepsilon_x < \tilde{x}_r < E[\tilde{x}_r] + \varepsilon_x\} &\geq 1 - \sigma_{\tilde{x}_r}^2 / \varepsilon_x^2 \\ P\{E[\tilde{U}_r] - \varepsilon_U < \tilde{U}_r < E[\tilde{U}_r] + \varepsilon_U\} &\geq 1 - \sigma_{\tilde{U}_r}^2 / \varepsilon_U^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

決定方式 Φ_E では、 $E[\tilde{x}_r]$, $E[\tilde{U}_r]$ は Wardrop 均衡を求ることで得ることになるのである。したがって、各変量の分散を与えれば、日々の交通によって生じる値の範囲をある確からずをもって与えることができる。経路の所要時間の分散 $\sigma_{\tilde{U}_r}^2$ が小さくなればなる程、 $\tilde{U}_r$ が $\tilde{U}_m$ と等しくなる確率は小さくなり、Wardrop 均衡が成立する可能性は薄くなる。このことより、 Φ_E の与える均衡状態は次のようなものである。すなわち、期待値としては、Wardrop 均衡となるような経路選択行動 (p_r) で、しかも、各経路の分散 $\sigma_{\tilde{x}_r}^2$ が最小となるような経路選択行動 ($\tilde{x}_r$) が Φ_E の求める均衡状態である。期待値としては等しい所要時間の経路であっても、そのバウフキに大小がある場合、トリップ主体はバウフキの少ない経路を嗜好するであろう。この条件を加味したのが、 Φ_E における均衡状態である。

こうした方式 Φ_E は Φ_E と比較して次のような特徴をもつ。

- ① Φ_E は確定的状況 ($\tilde{U}_r$ を確定的に扱う) のもとでの確率的選択を扱うのに対し、 Φ_E は確率的状況での確定的選択を予測方式としている。
- ② Φ_E は日々繰り返されるトリップ行動のある1日(あるいは最も起こりやすい日)の状況を予測する。それに対し、 Φ_E は確率的選択行動が長い間には確定的選択に移行するものとして、その定常状態における行動を予測方式とする。しかし、日々の行動は確率的であるとし、実現する範囲を予測する。したがって、両方式ともある1日の行動に関しては Wardrop 均衡が成立してないことを示唆している。

3. 均衡交通流の存在範囲

ここでは予測方式 Φ_E に基づく均衡流の存在範囲についてさらに詳しく検討する。そのためには、フローと所要時間の分散を知る必要がある。しかし、日々の交通量の変動あるいは所要時間の変動に関するデータはほとんど入手不可能である。そこで次のように考える。すなわち、交通現象がモデルによって記述できるものとし、モデルの分散構造を明らかにすることによって求めるべき変量の分散を求めるようなものである。しかし、この場合次の疑問が生じる。すなわち、モデル構造が変われば分散も異なることになり、分散を小さくするためには説明変数の数を少なくすれば良いということになる。しかし、我々の交通現象に関する知見は不十分であり、一般にモデルはパラメータを金む形になっている。そして、現象を最も説明するようにパラメータが推定される。このときパラメータの推定量も確率変数となり、適合度が低下すればする程パラメータの推定値の分散も大きくなる。したがって、パラメータの推定値を金む形で感度分析を行えば上述の問題は解消する。

さて、今、リンクの所要時間が次の B.P.R 型モデルで与えられるものとする。

$$T_j = H_j(X_j) = H_j(0) \{1 + \alpha (X_j/C_j)^\beta\} \quad (13)$$

ここで、添字 \$j\$ はリンク番号を示し、各変数は次のように定義している。

\$X_j\$: リンク交通量, \$T_j\$: リンク走行時間, \$H_j(0)\$: 零フロー時走行時間, \$C_j\$: リンク容量, \$\alpha, \beta\$: パラメータ
このとき, \$\sigma_{T_j}^2\$ は付録 A の分散近似式より

$$\sigma_{T_j}^2 = \{H_j(X_j) - H_j(0)\}^2 \{(\theta/X_j)^2 \sigma_{X_j}^2 + 1/\alpha^2 \sigma_{\alpha}^2 + (\ln X_j/C_j)^2 \sigma_{\beta}^2 + 2 \ln(X_j/C_j)/\alpha \sigma_{\alpha, \beta}\} \quad (14)$$

式(14)において、パラメータの変動とリンクフローの変動は無相関と仮定している。パラメータの分散、共分散はパラメータ推定時に既知量となるので(付録 B)、式(14)は簡単に次のように書き表わせる。

$$\sigma_{T_j}^2 = \xi_j + \omega_j \sigma_{X_j}^2 \quad (15)$$

ここで、ある OD ペアの経路利用形態がバスマトリックス \$\mathcal{D}\$ で与えられ、経路の所要時間の分散が式(15)で与えられる。 $\sigma_{T_r}^2 = \sum_j (\delta_{j,r})^2 \sigma_{T_j}^2 = \sum_j (\delta_{j,r})^2 \sigma_{T_j}^2 \quad (16)$

ここに、\$\delta_{j,r}\$ はバスマトリックスの要素で、経路 \$r\$ がリンク \$j\$ を利用する場合に 1、そうでない場合には 0 と定義される。複数の OD ペアの場合には、OD ペアの番号を示す添字 \$r\$ をつけて次のように与えられる。

$$\sigma_{T_r}^2 = \sum_j \delta_{j,r}^2 \sigma_{T_j}^2 \quad (17)$$

ここで、OD 間の所要時間の期待値は等しいことと要請するが、分散が等しいという保証はない。そこで、\$\sigma_{T_r}^2\$ を得るためには、\$\sigma_{X_j}^2\$ が与えられる必要があり、次にこの点について考察する。

今、OD 交通量 \$X_{ij}\$ が式(1)のような重力型モデルで記述できるものと仮定する。

$$X_{ij} = \alpha_0 (O_i D_j)^{\alpha_1} t_{ij}^{-\alpha_2} \quad (18)$$

このとき、\$X_{ij}\$ の分散は

$$\begin{aligned} \sigma_{X_{ij}}^2 = X_{ij}^2 \{ & (\alpha_1/O_i)^2 \sigma_{O_i}^2 + (\alpha_1/D_j)^2 \sigma_{D_j}^2 + (\alpha_2/t_{ij})^2 \sigma_{t_{ij}}^2 + (1/\alpha_0^2) \sigma_{\alpha_0}^2 + (\alpha_1 \lg O_i D_j)^2 \sigma_{\alpha_1}^2 \\ & + (\alpha_2 \lg t_{ij})^2 \sigma_{\alpha_2}^2 + 2 \cdot \alpha_1 \lg O_i D_j / \alpha_0 \cdot \sigma_{\alpha_0, \alpha_1} - 2 \alpha_2 \lg t_{ij} / \alpha_0 \cdot \sigma_{\alpha_0, \alpha_2} \\ & - 2 \alpha_1 \alpha_2 \lg t_{ij} \cdot \lg O_i D_j \cdot \sigma_{\alpha_1, \alpha_2} \} \end{aligned} \quad (19)$$

各変数間および各変数とパラメータの共分散は 0 と仮定している。パラメータの分散、共分散はパラメータ推定時に求められるので、発生量と集中量の分散と仮定すると、式(19)は次のように単純化できる。

$$\sigma_{X_{ij}}^2 = \varphi_{ij} + \lambda_{ij} \sigma_{t_{ij}}^2$$

OD ペア \$i-j\$ を OD ペア \$k\$ と表示しなおすと、

$$\sigma_{X_k}^2 = \varphi_k + \lambda_k \sigma_{t_k}^2 \quad (20)$$

したがって、リンクフローの分散は

$$\sigma_{X_j}^2 = \sum_k \sum_r \delta_{j,r}^2 (\varphi_k^*)^2 \sigma_{X_k}^2 \quad (21)$$

ここに、\$\varphi_k^*\$ は OD ペア \$k\$ の \$r\$ 番目経路の分担率である。式(15)、(17)、(20)、(21)はそれぞれ \$j\$ と \$k\$ をそれぞれで、分散を既定することはできない。したがって、これらは連立して同時に解く必要がある。以下にその方法について説明する。まず、

$$X = [\sigma_{X_1}^2, \sigma_{X_2}^2, \dots, \sigma_{X_K}^2]^T, \quad Y = [\sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \dots, \sigma_{t_K}^2]^T \quad K: \text{OD ペア数}$$

と変数を変換する。ここに \$t\$ は転置記号である。また、以下においてプライムはリンクに関する変数であることを表わす。このとき、式(20)より

$$X = \varphi + \lambda Y \quad (22) \quad X: (K \times 1) \text{ベクトル}, \varphi: (K \times 1) \text{ベクトル}, \lambda: (K \times K) \text{の対角行列}, Y: (K \times 1) \text{ベクトル}$$

リンクフローの分散ベクトルを \$X' = [\sigma_{X_1}^2, \sigma_{X_2}^2, \dots, \sigma_{X_L}^2]^T\$、\$L\$: リンク数 とおき、\$P^2\$ は次元に合う配列をもつ行列とすると、式(21)より

$$X' = \mathcal{D} P^2 X \quad (23) \quad X': (L \times 1) \text{ベクトル}, \mathcal{D}: (L \times K) \text{行列}, P^2: (K \times K) \text{行列}$$

リンク所要時間の分散は式(15)より

$$\begin{aligned} Y' &= \xi + \omega X' & Y': (L \times 1) \text{ベクトル}, \xi: (L \times 1) \text{ベクトル} \\ &= \xi + \omega \mathcal{D} P^2 X & \omega: (L \times L) \text{の対角行列} \end{aligned} \quad (24)$$

$$P^k = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & k \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} (P_{11}^k)^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (P_{22}^k)^k & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & (P_{kk}^k)^k \end{bmatrix} \end{matrix}$$

P_k : ODペア k の対象経路数

$$\sum_{k=1}^K P_k = Q$$

さて、ODペア k の経路 r の所要時間の分散を、 $\bar{Y} = [\delta_{t_1}^k, \dots, \delta_{t_{P_k}^k}]^T$ とおくとき、式(17)より

$$\bar{Y} = (Y^T)^T \bar{S} = [Z + \omega \delta P^k X]^T \bar{S}, \quad \bar{Y}: (Q \times 1) \text{ ベクトル } (Y^T): (1 \times L) \text{ ベクトル} \quad (25)$$

OD間の所要時間分散を各経路の所要時間分散に経路分担率を乗じて重みづけしたもので定義するならば、

$$Y = [\bar{Y} P]^T, \quad P \text{ は } P^k \text{ と同じ配列で } (P_k^k) \text{ が代わりに } P_k^k \text{ と置いたもの}$$

ODペアの経路所要時間分散が等しいときは、明らかに $Y = \bar{Y}$ 。さて、式(25)を用いて表わすと、

$$Y = [\delta P]^T Z + [\delta P]^T \omega \delta P^k X \quad (26)$$

したがって、式(22)と式(26)より、分布モデルの所要時間分散とリンク走行時間モデルより得られるOD間の所要時間分散を等しくするOD交通量分散 $\bar{X}$ は、

$$\bar{X} = [I - \bar{\lambda}]^{-1} [Y + \lambda [\delta P]^T Z], \quad \bar{\lambda} = \lambda \{ P^k (\delta^T \omega \delta) P^k \} \quad (27)$$

で与えられる。式(27)と式(23)に代入するこゝによって $\bar{X}$ を得ることができ、重 Π による均衡流の存在範囲は、次の形式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_i^* - c_1 \delta_{X_i} &< \bar{X}_i^* < \bar{X}_i^* + c_1 \delta_{X_i} \\ \bar{X}_j - c_2 \delta_{X_j} &< \bar{X}_j < \bar{X}_j + c_2 \delta_{X_j} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ここで、記号 $\bar{X}$ は Wardrop 均衡モデルによって与えられる変数である。 $\bar{X}_i^*$ あるいは $\bar{X}_j$ の分布が与えられるば、ある確率をもって $\bar{X}_i^*, \bar{X}_j$ の存在する範囲が予測できる。

4. あとがき

ある経路を選択することによってトリップ主体が享受する効用は、かなり確率的性格の強い変数と考えられ、確率的均衡モデルは従来の配分手法の基礎原理となっている Wardrop 均衡に基づくフローパターンとは異なった結果を与えるであろう。しかし、トリップ主体の属性によって効用が変動するとした確率効用モデルは、その均衡解を求める手法が現在のところ存在しない。それに対し、本研究では経路属性に関する情報の不完全さによる確率モデルを考えた。この場合、トリップ主体は長期的には完全情報を得るものとして、定常状態で確率選定行動によりフローを求めようものとした。しかし、完全情報の状態に至る時間の長さは未知であるため、実際に生じる交通量は、不確定要因を反映して中もった量となる。また、分析者が交通行動に完全な知見を有しないのにもかかわらず不確定を考慮することも必然となる。本研究はこうした不確実性を含み交通量予測方式としての区間推定法によってその理論的研究を行なったものである。しかし、残された問題はまだまだ多くある。特に問題となるのが、経路分担と最小とする P_k の決定法とフローの存在範囲を求める場合に必要の定数 C の与え方である。この点について更に研究と進める必要がある。

- (1) Marvin L. Manheim: Fundamentals of Transportation Systems Analysis, MIT press, P.469, 1979
 (2) 加藤 晃, 宮城俊彦: 最短経路原則に基づく交通配分手法の比較検討, 交通工学, Vol.14, No.7, 1979
 (3) 加藤 晃: 道路網における交通流配分の基礎的な考え方について, 第8回日本道路会議論文集, 1965

付録A 確率関数モデルの分散近似式

次のモデルを考える。 $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ (A-1)
 このとき, $\bar{y}$ の期待値は, その同時確率密度関数と等しいことにより, 次式で与えられる。

$$E[\bar{y}] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \bar{y} g(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (A-2)$$

ここで, 式 (A-1) に推定量 $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$ のまわりでテイラー展開し, 2次項までとって近似すると,

$$\bar{y} = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x=\hat{x}_i} (x_i - \hat{x}_i) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_{x=\hat{x}} (x_j - \hat{x}_j) (x_k - \hat{x}_k)$$

この式を (A-2) に代入することにより,

$$\begin{aligned} E[\bar{y}] &= f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x=\hat{x}_i} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \hat{x}_i) g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_{x=\hat{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \hat{x}_j) (x_k - \hat{x}_k) g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= f(\hat{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \sigma_i^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \sigma_{j,k} \end{aligned} \quad (A-3)$$

$\bar{y}^2$ についても, $\bar{y}^2 = \bar{h}$ とおき, $\partial \bar{h} / \partial x_i = 2\bar{y}(\partial \bar{y} / \partial x_i)$,

$$\partial^2 \bar{h} / \partial x_i^2 = 2\bar{y}(\partial^2 \bar{y} / \partial x_i^2) + 2(\partial \bar{y} / \partial x_i)^2,$$

$$\partial^2 \bar{h} / \partial x_i \partial x_k = 2(\partial \bar{y} / \partial x_i)(\partial \bar{y} / \partial x_k) + 2\bar{y}(\partial^2 \bar{y} / \partial x_i \partial x_k)$$

という関係式と (A-3) を利用して,

$$\begin{aligned} E[\bar{y}^2] &= f^2(\hat{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{ 2\bar{y} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x_i^2} + 2(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x_i})^2 \} \sigma_i^2 \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \{ (\frac{\partial \bar{y}}{\partial x_j})(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x_k}) + \bar{y} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x_j \partial x_k} \} \sigma_{j,k} \end{aligned} \quad (A-4)$$

$\sigma_{j,k}^2 = E[\bar{y}^2] - E^2[\bar{y}]$ であり, (A-3) と (A-4) より,

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{y}}^2 &= \sum_{i=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_j})(\frac{\partial f}{\partial x_k}) \sigma_{j,k} \\ &\quad - \frac{1}{4} (\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \sigma_i^2)^2 - (\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \sigma_{j,k})^2 \\ &\quad - (\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \sigma_i^2) (\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \sigma_{j,k}) \end{aligned} \quad (A-5)$$

(A-5) において, 2次導関数の値が1次導関数のそれと比べて十分小さいとき,

$$\sigma_{\bar{y}}^2 \approx \sum_{i=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 \sigma_i^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_j})(\frac{\partial f}{\partial x_k}) \sigma_{j,k} \quad (A-6)$$

付録B

次のモデルを考える。 $\tilde{Y} = \alpha_0 X^{d_1} \tilde{E}$ (B-1)

その対数をとると, $\ln \tilde{Y} = \ln \alpha_0 + d_1 \ln X + \ln \tilde{E}$ (B-2)

次のように変数を変換する。

$$\ln \tilde{Y} = \tilde{y}, \ln \alpha_0 = \beta_0, d_1 = \beta_1, \ln X = x, \ln \tilde{E} = \tilde{x}$$

よって, 次の線形モデルを得る。

$$\tilde{y} = \beta_0 + \beta_1 x + \tilde{x} \quad (B-3)$$

式 (B-3) の1/x-m-タの推定量を $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ とおくと, $\tilde{y}$ の分散は,

$$V[\tilde{y}] = V[\hat{\beta}_0] + x^2 V[\hat{\beta}_1] + 2x \text{Cov}[\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1] \quad (B-4)$$

ところで, 原モデルにおいて $\tilde{Y}$ の分散を (A-6) により求めると,

$$\sigma_{\tilde{Y}}^2 = \{ (1/\alpha_0)^2 \sigma_{\alpha_0}^2 + (\ln X)^2 \sigma_{d_1}^2 + 2 \ln X / \alpha_0 \sigma_{\alpha_0 d_1} \} \tilde{Y}^2 \quad (B-5)$$

さて, $\hat{\alpha}_1 = \hat{\beta}_1$ であるから, $\sigma_{\alpha_1}^2 = V[\hat{\beta}_1]$ 。ところで, $\hat{\alpha}_0$ については, これを次のように定数項と確率項に分けて考えよう。

$$\tilde{\alpha}_0 = \alpha_0 \tilde{E}_{\alpha_0} \quad (B-6)$$

$$\text{よって, } \sigma_{\alpha_0}^2 = \alpha_0^2 \sigma_{\tilde{E}_{\alpha_0}}^2 \quad (B-7)$$

(B-6) の両辺の対数をとると,

$$\ln \tilde{\alpha}_0 = \ln \alpha_0 + \ln \tilde{E}_{\alpha_0} \quad (B-8)$$

したがって, 回帰推定値 $\hat{\tilde{\alpha}}_0$ を定数項と確率項に分けて,

$$\hat{\tilde{\alpha}}_0 = \hat{\beta}_0 + \tilde{E}_{\beta_0} \quad (B-9)$$

ここで, $\tilde{E}_{\beta_0} \sim N(0, \sigma_{\beta_0}^2)$

(B-8) と (B-9) より, $\tilde{E}_{\beta_0} = \ln \tilde{E}_{\alpha_0}$ であり, したがって, $\tilde{E}_{\alpha_0} = e^{\tilde{E}_{\beta_0}}$ 。

このとき, $\tilde{E}_{\alpha_0}$ の分散は, モーメント母関数法によって求めることができ,

$$\sigma_{\tilde{E}_{\alpha_0}}^2 = e^{2\sigma_{\beta_0}^2} - e^{\sigma_{\beta_0}^2} \quad (B-10)$$

$\sigma_{\beta_0}^2$ が十分小さいとき, (B-10) の右辺を指数展開することにより,

$$\sigma_{\tilde{E}_{\alpha_0}}^2 \approx \sigma_{\beta_0}^2 \quad (B-11)$$

これを式 (B-7) に代入することにより,

$$\sigma_{\alpha_0}^2 = \alpha_0^2 \sigma_{\beta_0}^2 = \alpha_0^2 V[\hat{\beta}_0] \quad (B-12)$$

式 (B-12) と式 (B-5) の第1項と第3項に適用することにより, (B-4) を用いて (B-5) を求めることができた。